4.4. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR.

4.4.1. La Tierra dista del Sol, una unidad astronómica y es aproximadamente 23500 veces el radio de la Tierra, con ese dato se puede asegurar que la relación entre los módulos de los momentos angulares debido a su movimiento de traslación y de rotación es aproximadamente:

a) $3{,}8.10^6$ b) $3{,}8.10^8$ c) $3{,}8.10^4$ d) $3{,}8.10^7$

SOL:

En el movimiento de traslación se considerará la masa de la Tierra puntual, y el radio de giro, el radio orbital alrededor del Sol, por este motivo, si la relación de momentos es $\frac{I_{traslación}\omega_{traslación}}{I_{rotación}\omega_{rotación}}$, aplicando dichas premisas,

$$\frac{M_{tierra}R_{orbital}^2\frac{2\pi}{T_{año}}}{\frac{2}{5}M_{tierra}R_{tierra}^2\frac{2\pi}{T_{día}}}=\frac{5}{2}.\frac{\left(23500R_{tierra}\right)^2}{R_{tierra}^2}.\frac{T_{día}}{T_{año}}=3{,}78.10^6$$

. Tal como se expone en la propuesta a.

4.4.2.* En los espectáculos de patinaje artístico sobre hielo, habrás observado que en determinados momentos los bailarines, que tenían los brazos extendidos, los recogen y pegan al cuerpo. Suponiendo que su nuevo radio de giro es menor y vale $R = 0{,}9\ R_o$. Siendo R_o el radio de giro con los brazos extendidos. Con ello lo que consiguen es:

a) DISMINUIR SU MOMENTO DE INERCIA
b) DISMINUIR SU MOMENTO CINÉTICO
c) AUMENTAR SU VELOCIDAD ANGULAR
d) AUMENTAR SU ENERGÍA CINÉTICA
e) AL ABRIR DE NUEVO LOS BRAZOS Y ALCANZAR EL MISMO RADIO DE GIRO R_o, NO RECUPERA LA MISMA VELOCIDAD ANGULAR.

SOL:

Como $I_o = m R_o^2$ e $I = m R^2$ resulta que $I = m R^2 = m\left(0{,}9 R_o\right)^2 = 0{,}81 m R_o^2 = 0{,}81 I_o$ El momento de inercia disminuye y la solución a) es correcta.

Al no haber momentos debidos a fuerzas exteriores, $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}=0$ Y el momento angular $\vec{L}=Cte$ y por lo tanto se conservará, de modo que la solución b) no es correcta.

De la conservación del momento angular: $I_o \cdot \omega_o = I \cdot \omega$; $\omega = \frac{I_o}{I}\omega_o = \frac{mR_o^2}{mR^2}\omega_o = \frac{R_o^2}{0{,}9^2 R_o^2}\omega_o = \frac{\omega_o}{0{,}81} = 1{,}2\omega_o$

La velocidad angular aumenta y la solución c) es correcta.

La energía cinética de rotación inicial vale $E_{co} = \frac{1}{2}I_o\omega_o^2 = \frac{1}{2}mR_o^2\omega_2^2$.

Después de cerrar los brazos :

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}m(0{,}9R_o)^2(1{,}2\omega_o)^2 = \frac{1}{2}mR_o^2\omega_o^2\left(0.9^2\cdot 1{,}2^2\right) = 1{,}17\,E_{co}$$

Aumenta la energía cinética de rotación y la solución d) es correcta.

Para dar una explicación de este hecho tenemos que admitir la existencia de una energía potencial centrífuga, cuyo valor cero lo toma cuando tiene más estirados los brazos, de decir, cuando $r = R_o$ pues más allá de esta posición no puede aumentar el radio de giro.

En cualquier posición, la energía mecánica será la suma de la cinética más la potencial: $E_c + U$. Admitiendo que para $r = R_o$ toda la energía es solo cinética resulta.

$$\frac{1}{2}I_o\omega_o^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + U; \qquad U = \frac{1}{2}I_o\omega_o^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I_o\omega_o^2 - \frac{1}{2}I\left(\frac{I_o\omega_o}{I}\right)^2 = \frac{1}{2}I_o\omega_o^2\left[1-\frac{I_o}{I}\right]$$

Obsérvese que al ser $I < I_o$ esta energía potencial es negativa.

Como el sistema se considera conservativo, al abrir de nuevo los brazos y alcanzar el radio de giro $R_o$la ecuaciones dicen que la energía potencial centrífuga es nula, pues $I = I_o$ y toda la energía es cinética de modo que la velocidad angular que adquiere vuelve a ser la misma. La respuesta e) es incorrecta.

4.4.3.* Si la contaminación aumenta, y la composición atmosférica sigue su modificación constante, es posible que aumente su capacidad calorífica, y que a finales de siglo aumente la temperatura media del globo en varios grados y con el tiempo los casquetes polares se vayan derritiendo, lo cual aparte de aumentar en 6 metros el nivel del agua en los océanos, lo que también produciría sería:

a) DISMINUIR SU MOMENTO DE INERCIA
b) DISMINUIR SU VELOCIDAD ANGULAR
c) QUE EL DÍA DURE MÁS DE 24 HORAS
d) AUMENTAR SU ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

SOL:

La densidad del hielo es menor que la del agua, en consecuencia la misma masa, estando helada, ocupa más volumen que en estado líquido. En el caso de fusión parcial de los casquetes polares actuales, y repartirse uniformemente el agua sobre la Tierra, aumentaría el volumen del planeta y el radio de giro de ésta deberá aumentar, en consecuencia el momento de inercia y la opción a) es incorrecta.

Como en este fenómeno no intervienen momentos de fuerzas exteriores, el momento cinético de la Tierra se conserva, siendo su valor , puesto que su masa no varía, si aumenta el radio de giro R_G implica que la nueva velocidad angular de la Tierra ω' deberá disminuir para que el nuevo producto $I' \cdot \omega'$ siga valiendo igual que antes de derretirse los casquetes polares.

$I_0\omega_0 = I'\omega'$; Como I'>I$_0$ I *se deduce que* $\omega' \langle \omega_0$ La opción b) es correcta.

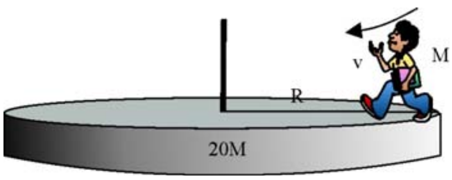
Como la relación entre el periodo de rotación y la velocidad angular es $T' = \dfrac{2\pi}{\omega'}$ con lo que el periodo aumenta y los días serían algo mayores que en la actualidad.

En cuanto a la energía cinética de rotación $E'_c = \frac{1}{2} I' \omega'^2$ debería decrecer, pues aunque aumente I', sin embargo, al depender del cuadrado de ω' ésta pesa mucho más y hemos visto que disminuye.

$$I_0\omega_0 = I'\,\omega' ; \qquad MR^2\omega_0 = M(R+\Delta R)^2\omega' \Longrightarrow \omega' = \omega_0\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega' < \omega_0$$

$$E'_c = \frac{1}{2}I'\omega'^2 = \frac{1}{2}\frac{I_0\omega_0}{\omega'}\omega'^2 = \frac{1}{2}I_0\omega_0\omega' = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2 = E_{c,0}\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2$$

Como $\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2 < 1 \;\Rightarrow\; E'_c < E_{c,0}$ Las soluciones correctas serán la <u>b</u> y la <u>c</u>.



4.4.4. Imagínate que una persona de masa M en la periferia de una plataforma circular de masa 20M y radio R, capaz de girar libremente alrededor de un eje central perpendicular a la misma, comienza a correr por su borde con una velocidad de módulo v. Lo que ocurriría es que:

a) LA PLATAFORMA PERMANECE INMÓVIL CUANDO LA PERSONA VA CORRIENDO
b) LA PLATAFORMA GIRARÁ EN SENTIDO CONTRARIO PERO VELOCIDAD ANGULAR CUYO MÓDULO ES v/R
c) LA PLATAFORMA GIRARÁ EN SENTIDO CONTRARIO PERO CON VELOCIDAD ANGULAR CUYO MÓDULO ES v/5R
d) LA PLATAFORMA GIRARÁ EN SENTIDO CONTRARIO CON VELOCIDAD ANGULAR CUYO MÓDULO ES v/10R

SOL:

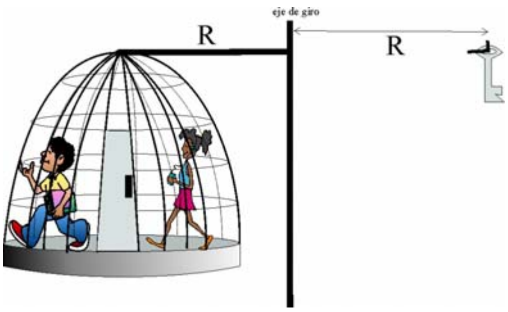
Por no haber momentos de fuerzas exteriores deberá conservarse el impulso angular o momento cinético del sistema, formado por la plataforma y la persona, que estaba inicialmente en reposo, $I_p\vec{\omega} + \overline{\vec{R}} \times M\vec{v} = 0$

$I_p\omega\vec{k} + RMv\,(-\vec{k}) = 0$

Por lo tanto, considerando la plataforma como un disco, $I_P = \dfrac{20MR^2}{2} = 10MR^2$. Sustituyendo y calculando sus módulos,

$10MR^2\omega\vec{k} - RM\,v\vec{k} = 0$; De lo que $\vec{\omega} = \frac{v}{10R}\vec{k}$

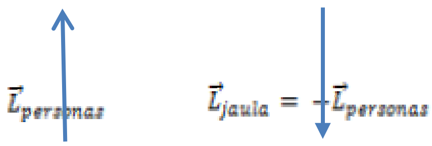
La propuesta a) es incorrecta pues al tratarse de un sistema aislado al moverse cambiando de lugar es porque hay rozamiento, en consecuencia hay una pareja de reacción sobre la plataforma que la hace moverse en sentido contrario. La respuesta b) es incorrecta porque gira en sentido contrario, pero con una velocidad angular distinta a la propuesta. Análogamente sucede con la propuesta c). Sólo resulta correcta la respuesta d).



4.4.5. En un planeta imaginario, una pareja terrícola es raptada por un monstruoso humanoide y situada en una jaula colgada a gran altura del suelo, y capaz de girar a lo largo de un eje. En la pared opuesta, están colgadas las llaves que abren la jaula. Para conseguir recoger las llaves nuestra pareja habrá de:

a) MOVER LA JAULA PARA CONSEGUIR DESPEGARLA DEL SOPORTE DE FORMA QUE SE ESTRELLE EN EL SUELO
b) DAR VUELTAS POR EL BORDE DE LA JAULA
c) GIRAR SOBRE SI MISMOS EN SENTIDOS CONTRARIOS
d) GIRAR SOBRE SI MISMOS EN EL MISMO SENTIDO

SOL:



El sistema total se compone de la jaula con las personas y el eje de giro, situado a una distancia R del eje de la jaula. En conjunto es un sistema cerrado sobre el que no actúa ningún momento debido a fuerzas exteriores, de modo que el momento angular total es constante. Suponiendo que el soporte de la jaula este rígidamente unido a la barra horizontal, entonces $\vec{L}_{jaula} + \vec{L}_{personas} = \mathbf{0}$; Si las dos personas se pusieran a girar sobre si mismas, en el mismo sentido, producirían un momento angular de la jaula $\vec{L}_{personas} \neq 0$ y en consecuencia el eje de giro y toda la jaula en conjunto se pondrían a girar en sentido contrario $\vec{L}_{jaula} = - \vec{L}_{personas}$ y podrían alcanzar las llaves.

Solo d) es correcta.

4.4.6. Si tienes dos huevos aparentemente iguales, uno que crees cocido A, y otro que deberá estar crudo B, los identificarás al hacerlos rodar por encima de una mesa porque:

a) EL CRUDO RODARÁ CON VELOCIDAD ANGULAR MAYOR QUE EL COCIDO
b) EL CRUDO RODARÁ CON MENOR VELOCIDAD ANGULAR QUE EL COCIDO
c) LOS DOS RUEDAN CON LA MISMA VELOCIDAD ANGULAR
d) AL HACERLOS RODAR AMBOS LO HACEN CON IGUAL MOMENTO DE INERCIA.

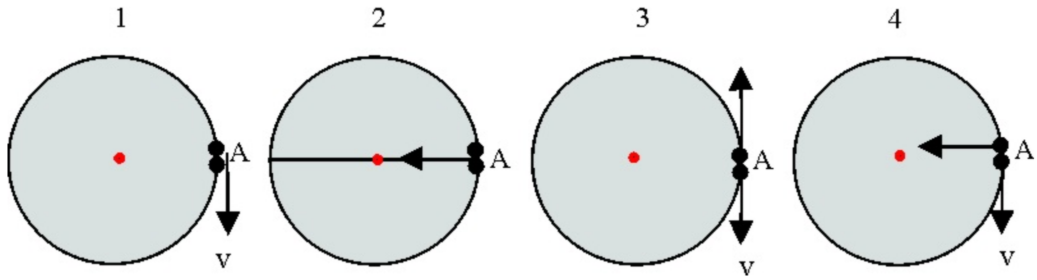
SOL:

El huevo cocido se puede considerar como si fuese un sólido rígido y al aplicarle un momento instantáneo adquiere una aceleración angular y después de un corto intervalo de tiempo una velocidad angular constante, en el supuesto de no existir rozamientos.

El huevo crudo hay que considerarlo como un fluido y sus moléculas tienen movilidad y al aplicarle un momento y empezar a girar por la fuerza de inercia, las moléculas tienen a desplazarse hacia la cáscara, con lo que aumenta el m.d.i. Como una vez girando tiene un momento angular constante, al aumentar el m.d.i. respecto del huevo cocido, tiene que su velocidad angular será menor que la del huevo cocido.

La única opción verdadera es la b).

4.4.7. Un par de amigos de masa individual M, se encuentran en el borde de una plataforma circular inicialmente en reposo, de radio R, masa 20M, capaz de girar por un eje central, en el punto A. Realizan cuatro experimentos tal como muestra el esquema:



1.- Los dos corren con velocidad v en el mismo sentido, por el borde hasta volver a A.
2.- Los dos corren con velocidad v, pasando por el eje hasta el punto opuesto de A.
3.- Uno corre con velocidad v, por el borde en un sentido, mientras que el otro lo hace en el contrario hasta encontrarse enfrente de A.
4.- Uno corre con velocidad v, por el borde, mientras que el otro cruza, por el centro hasta encontrarse en el punto opuesto.
Del resultado de las 4 experiencias podrás decir que:
a) SÓLO EN EL 3 LA PLATAFORMA NO SE MOVIÓ
b) EN EL 1. LA PLATAFORMA ADQUIRIÓ LA MAYOR VELOCIDAD
c) EN EL 2 EL MOMENTO CINÉTICO DEL SISTEMA ES SIEMPRE 0
d) EN EL 4 LA PLATAFORMA REALIZA UN MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

SOL:
Deberá conservarse el momento cinético total del sistema, por no existir momentos debidos a fuerzas exteriores, siendo inicialmente cero. $I_p\vec{\omega} + \vec{R}xM\vec{v} + \vec{R}xM\vec{v'} = 0$.

En el caso 1) los dos corren en el mismo sentido a la misma velocidad luego $\vec{\omega} = -\frac{\vec{R}xM\vec{v}+\vec{R}xM\vec{v'}}{I_p} = -2\frac{\vec{R}xM\vec{v}}{I_p}$ [1] La plataforma gira con esta velocidad angular.

En el caso 2) al pasar la dirección de su trayectoria constantemente por el eje de la plataforma los momentos $\vec{R}xM\vec{v} = 0$ y $\vec{R}xM\vec{v'} = 0$ por lo que la ecuación [1] nos dice que $\vec{\omega}$ será constantemente nula y la plataforma no gira.

En el caso 3) al salir en sentido contrarios, las velocidades tangenciales van a dar momentos en cada instante momentos angulares iguales y de sentidos contrarios $\vec{R}xM\vec{v}$ y - $\vec{R}xM\vec{v}$ de modo que la ecuación [1] da de nuevo $\vec{\omega} = 0$

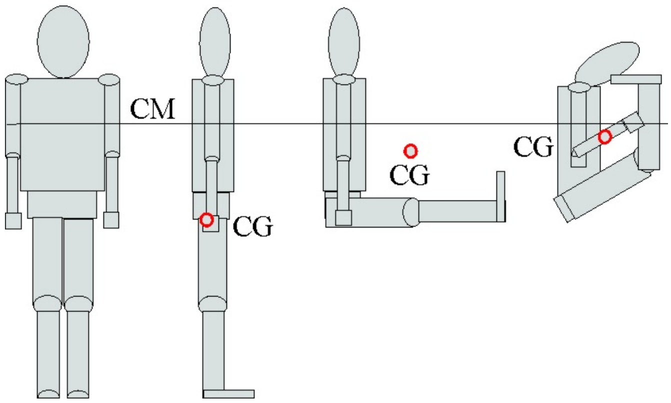
En el caso 4) un momento angular es nulo, pero no el otro, de modo que ahora $\vec{\omega} = -\frac{\vec{R}xM\vec{v}}{I_p}$ y como I_p varía. La velocidad angular no es constante.

En consecuencia, la respuesta a) es falsa, La respuesta b) es verdadera. La respuesta c) es correcta. La respuesta d) es verdadera.

4.4.8*. En las competiciones deportivas de salto de trampolín de 10 m, habrás observado que los saltadores~~,~~ toman impulso, y para hacer varios mortales antes de entrar de cabeza en el agua, forman con su cuerpo un ovillo, esto es debido a que así:

a) DISMINUYE SU RADIO DE GIRO
b) AUMENTA SU MOMENTO CINÉTICO
c) AUMENTA SU VELOCIDAD DE ROTACIÓN
d) INFLUYE EN LA VELOCIDAD DE ROTACIÓN LA FUERZA GRAVITATORIA

SOL:



La fuerza gravitatoria sólo afecta al movimiento del centro de masas del nadador, que describirá la consiguiente parábola, sin embargo, al estar aplicado el peso en el c.d.m. lugar por donde pasa el eje de rotación del cuerpo, no da momento y en consecuencia no afecta al impulso angular que debe conservarse a partir del instante en que abandona el trampolín $\vec{M} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow \vec{L} = Cte$.

La conservación del momento cinético del nadador de módulo $I\omega = MR_G{}^2\omega$, puesto que su masa no varía y para que la velocidad angular aumente, y dar más mortales antes de llegar al agua, tendrá que disminuir su radio de giro, para lo que deberá aproximar más las partículas de su cuerpo el eje de rotación. (véase la figura). Por lo tanto son correctas las propuestas a y c,

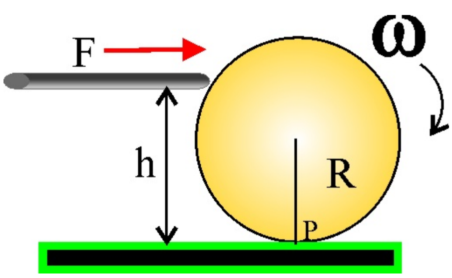
4.4.9. El momento de inercia de un saltador de trampolín, desde una altura de 10 m, que mantiene el cuerpo rígido, y consigue dar un mortal y medio antes de entrar en el agua, es el triple del que tendría si mantiene las piernas extendidas pero con su cuerpo adaptándose a ellas agarrándolas con las manos. En este caso antes de entrar en el agua saltando desde el mismo trampolín y con idéntico impulso, dará aproximadamente:

a) CUATRO MORTALES b) CUATRO MORTALES Y MEDIO
c) TRES MORTALES d) TRES MORTALES Y MEDIO

SOL:

Desde que abandona el trampolín conserva el momento angular, por lo expuesto en el ejercicio anterior. El impulso angular del nadador vale $I\omega = I.2\pi N$, siendo N la frecuencia (el número de vueltas por segundo), siendo constante independientemente de la postura que adopte. Por lo tanto $I.2\pi N = I'.2\pi N'$. Suponiendo que tarde 1s en alcanzar el agua, y siendo N = 1,5 vueltas/s e I = 3I', sustituyendo.

$3I'.2\pi.1,5 = I'.2\pi N'$, N'=4,5 vueltas/s, tal como se indica en la propuesta b.



4.4.10. Para que una bola de billar de radio R, comience a rodar sin rozamiento, deberá golpearse a una altura:

a) 4R/3 b) 7R/5 c) R d) 3R/4

SOL:

Suponiendo que la fuerza se aplica a una distancia vertical d, del centro de masas las ecuaciones de la dinámica permiten escribir:

$$\begin{cases} F = m \cdot a \\ F \cdot d = I \cdot \alpha \\ a = \alpha \cdot R \end{cases} \qquad m \cdot a \cdot d = I \cdot \frac{a}{R}; \qquad d = \frac{I}{mR} = \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR} = \frac{2}{5}R$$

Como se pide la altura h = R + 2R/5 = 7R/5

Solo la solución b) es correcta.

4.4.11*. Cuando un cuerpo de masa m, colisiona inelásticamente con un sólido de la misma masa, que oscila como un péndulo simple, desde un punto fijo, dirás que en dicho choque:

a) SE CONSERVA EL MOMENTO LINEAL DEL SISTEMA DURANTE EL IMPACTO
b) SE CONSERVA LA ENERGÍA MECÁNICA DEL SISTEMA DURANTE EL IMPACTO
c) SE CONSERVA EL MOMENTO CINÉTICO DEL SISTEMA DURANTE EL IMPACTO
d) LA ENERGÍA MECÁNICA DEL SISTEMA DESPUÉS DEL IMPACTO SE TRANSFORMA ÍNTEGRAMENTE EN ENERGÍA POTENCIAL

SOL:

En las colisiones inelásticas entre sólidos dado que dicho fenómeno es interno al sistema formado por los dos cuerpos, y las fuerzas exteriores ~~no~~ ajenas al fenómeno no influyen directamente, y se conservará tanto el momento lineal como el momento cinético total del sistema, de acuerdo con las ecuaciones:

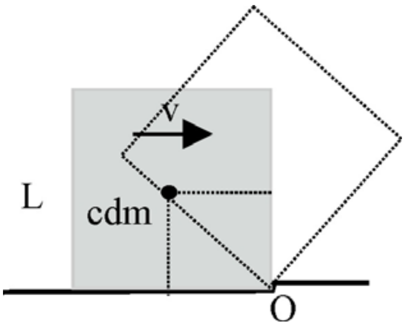
$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \cdot \vec{a}_{CM} = 0 = \frac{d\vec{P}_{Sist}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{P}_{Sist} = Cte \qquad\qquad \sum \vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{Sist}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{Sist} = Cte$$

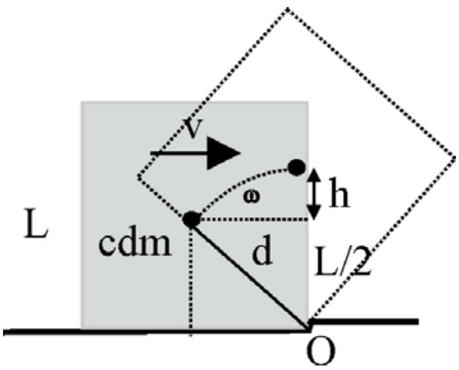
En consecuencia el centro de masas continúa a la misma velocidad antes y después de la colisión, sin consecuencias de la misma.

La energía mecánica del sistema no se va a conservar pues en las interacciones inelásticas se producen deformaciones que requieren una transformación de la energía, siendo en este caso la energía mecánica que pasa finalmente a calor, disipándose al medio.

$$mv = (m+m)v' \quad , \qquad v' = \frac{v}{2}; \quad E_{c,0} = \frac{1}{2}mv^2 \; ; \qquad E_{c,F} = \frac{1}{2}2mv'^2 = m\frac{v^2}{4} = \frac{E_{c,0}}{2}$$

Las respuestas correctas son la <u>a</u> la <u>c</u> y la <u>d</u> siendo la <u>b</u> falsa.





4.4.12. Un cubo de lado L y masa M, se desliza por una mesa. Al cabo de cierto tiempo tropieza con el borde O de otra mesa desnivelada respecto a la inicial, volcando sobre ésta. Para que esto ocurra, si su momento de inercia respecto a su centro de masas es $ML^2/6$, la velocidad que deberá tener su centro de masas tendrá que ser en ms^{-1}, aproximadamente:

a) $\frac{\sqrt{gL}}{2}$ b) $\sqrt{gL}$ c) $\frac{\sqrt{gL}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{gL}}{4}$

SOL:

Primero se calculará el momento de inercia del cubo respecto a la arista que pasa por O, aplicando el teorema de Steiner. $I_O = I_{cdm} + Md^2$. Siendo d la mitad de la diagonal $d = \frac{L\sqrt{2}}{2}$. Como $d^2 = \frac{L^2}{2}$, sustituyendo. $I_O = \frac{ML^2}{6} + \frac{ML^2}{2} = \frac{2ML^2}{3}$.

Aplicando la conservación del momento cinético en el instante de la colisión y considerando que la velocidad del c.d.m. es un vector horizontal paralelo al suelo y situado a una distancia L/2 del mismo. Resulta que $\frac{L}{2}$ Mv = $I_o \cdot$ por lo tanto $\frac{2ML^2}{3}\omega = \frac{L}{2}Mv$, o sea $\omega = \frac{3v}{4L}$

Admitiendo que toda la energía cinética de rotación al girar alrededor de la arista que pasa por el punto O, se transforma en energía potencial, calcularemos la velocidad mínima necesaria para que se produzca el vuelco. En el proceso el c.d.m se desplaza una altura h: $Mgh = \frac{I\omega^2}{2}$. Teniendo en cuenta que h=d-L/2, como se observa en la figura. $h = \frac{L\sqrt{2}}{2} - \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$. Sustituyendo los valores: $Mg\frac{L}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2ML^2}{3}\right)\left(\frac{3v}{4L}\right)^2$.

Simplificando: $\frac{3v^2}{8} = gL\left(\sqrt{2}-1\right)$. De lo que $v = \sqrt{\frac{8gL\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}} = 1{,}05\sqrt{gL}\; ms^{-1}$, que coincide aproximadamente con la propuesta b.