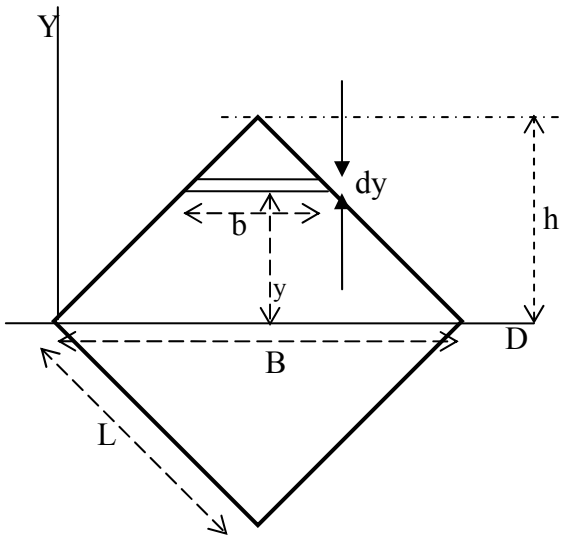
4.3. TRABAJO Y ENERGÍA DEL SÓLIDO EN ROTACIÓN. CONSERVACIÓN. (1ª parte)

4.3.1. Tomas un cuadrado rígido de masa M y lado L, lo sujetas por dos vértices opuestos, y lo haces girar con una velocidad angular ω. Su energía cinética de rotación será:
a) $ML^2\omega^2/12$ b) $ML^2\omega^2/24$ c) $ML^2\omega^2/4$ d) $ML^2\omega^2/2$

SOL:
La energía cinética de rotación $E_R = I\omega^2/2$, por lo tanto la dificultad de la cuestión estará en el cálculo del momento de inercia del cuadrado cuando gira a través de su diagonal.



l
En la figura el eje de rotación es D y el cuadrado queda dividido en dos triángulos iguales, cada uno de base B y altura h. Calculamos el momento de inercia del triángulo superior respecto del eje E. Designamos con σ a la densidad superficial del material del cuadrado Tomamos una franja de base b y espesor dy, que dista del eje y, cuyo momento de inercia es:

$$dE = \sigma\, b\, dy \cdot y^2$$

b depende y pero se puede establecer la siguiente relación de semejanza

$$\frac{B}{h} = \frac{b}{h-y} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{B(h-y)}{h}$$

Luego

$$E = \int_0^h \sigma \frac{B(h-y)}{h} y^2 dy = \frac{\sigma B}{h}\left[\int_0^h h\, y^2 dy - \int_o^h y^3 dy\right] = \sigma B\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}\right) = \sigma B \frac{h^3}{12}$$

El momento de inercia del cuadrado es :$I_C = 2E = \sigma B \frac{h^3}{6}$

La altura h está relacionada con el lado del cuadrado $h^2 = L^2 - \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$ y la masa del cuadrado es

$M = \sigma L^2$, de donde $I_C = \sigma B \frac{h \cdot h^2}{6} = \sigma \cdot L\sqrt{2} \cdot \frac{L}{\sqrt{2}} \cdot \frac{L^2}{12} = \frac{M L^2}{12}$

La energía cinética de rotación: $E_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{M L^2}{12}\omega^2 = \frac{M L^2 \omega^2}{24}$. La opción correcta es b.

4.3.2. Cuando una esfera rueda por un plano con velocidad de traslación v_{CM} y de rotación ω la energía cinética de rotación es respecto a la total:

a) 1/5 b) 2/5 c) 2/7 d) 1/2

SOL:

La energía de una esfera que rueda con velocidad de traslación v_{CM} y angular ω, es

E.cinética total = E_C.de traslación del centro de masas + E_C.rotación

El momento de inercia de una esfera respecto de un diámetro es: $I = \frac{2}{5}mr^2$

$mv_{CM}^2/2 + I\omega^2/2 = mv_{CM}^2/2 + 2mr^2\omega^2/10$.

Como $v_{CM}=\omega$ r, la energía cinética de rotación de la esfera será $mv_{CM}^2/5$, mientras que la total será : $\frac{mv_{CM}^2}{2} + \frac{mv_{CM}^2}{5} = \frac{7mv_{CM}^2}{10}$

Por lo tanto, su relación: $\frac{\frac{mv_{CM}^2}{5}}{\frac{7mv_{CM}^2}{10}} = \frac{2}{7}$, como se propone en c.

4.3.3. Un cuerpo se traslada y gira al mismo tiempo sin deslizar (rueda). Se observa que su energía cinética de rotación es igual que la de su traslación del centro de masas, concluirás que:

a) SE TRATA DE UN CILINDRO MACIZO
b) SE TRATA DE UNA ESFERA MACIZA
c) SE TRATA DE UN ARO
d) NO EXISTE UN CUERPO QUE CUMPLA LAS CONDICIONES DEL ENUNCIADO

SOL:

La energía cinética de traslación del c.d.m = $mv_{CM}^2/2$ (1), mientras que la de rotación: $I\omega^2/2$ (2). Como $I=mR_G^2$, siendo R_G el radio de giro. Puesto que el cuerpo gira sin deslizar $v_{CM}= \omega R$, tendremos,

$$\frac{1}{2}mv_{Cm}^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mR_G^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = \omega R_G = \omega R \Rightarrow R_G = R$$

Por lo tanto el cuerpo que gira, tiene toda la masa concentrada a una distancia del eje igual al radio. Esto nos indica que el cuerpo puede ser un aro en el que toda su masa esté concentrada en la periferia del mismo.

4.3.4. Si la masa de un vehículo de fórmula 1 es 50 veces la de una rueda (considerada como un cilindro hueco), la relación entre las energías cinéticas de traslación del mismo y de rotación de sus ruedas, será:

a) 0,87 b) 1,14 c) 1,00 d) 12,5

SOL:

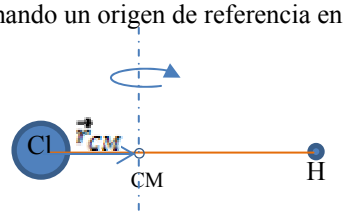
Operando como en cuestiones anteriores tendremos que la $E_{cT} = m_C v_{CM}^2/2$, mientras que la de rotación de las ruedas $Ec_R = 4(I\omega^2/2) = 2m_R r^2\omega^2 = 2m_R v_{CM}^2$. Si la v_{CM} del vehículo coincide con la tangencial de la ruedas $v_{CM} = \omega \cdot r$. Puesto que $m_C = 50\ m_R$ sustituyendo dichos valores, $E_{cT} = 50m_R v_{CM}^2/2$, $E_{cR} = 2m_R v_{CM}^2$, dividiendo ambas la relación nos da 12,5 que corresponde a la solución d.

4.3.5. Las moléculas de los gases no sólo pueden desplazarse, sino que también giran, y por lo tanto tienen una determinada energía cinética de rotación, con la cual contribuyen a su capacidad calorífica. Si conoces la distancia de enlace Cl-H (r=0,1275 nm), y que la masa del Cl es aproximadamente 35,5 veces la del hidrógeno $H \cong 1\ u$,
(1u = 1,66.10^{-27}kg), podrás afirmar que la energía cinética de rotación de la molécula de cloruro de hidrógeno cuando gira alrededor de un eje perpendicular al de enlace que pasa por su centro de masas con una frecuencia N, es en julios:.

a) 5.$10^{-6}N^2$ b) 2,5.$10^{-16}N^2$ c) 5.18.$10^{-26}N^2$ d) 5,18.$10^{-46}N^2$

SOL:

Tomando un origen de referencia en la masa mayor, Cl, la posición del c.d.m. es.



$$r_{CM} = \frac{M_{Cl}\cdot 0 + M_H \cdot r}{35{,}5M_H + M_H} = \frac{r}{36{,}5}$$

Las distancias de cada átomo al c.d.m son: $r_{Cl} = \frac{r}{36{,}5}$; $r_H = r - \frac{r}{36{,}5} = \frac{35{,}5\,r}{36{,}5}$

La velocidad angular $\omega = 2\pi N$

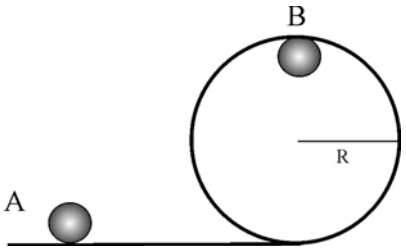
Considerando como masas puntuales al Cl y al H, sus momentos de inercia son:

$$I_{Cl} = M_{Cl}\cdot r_{Cl}^2 = 35{,}5M_H \cdot r_{Cl}^2 \quad ; \quad I_H = M_H \cdot r_H^2$$

La energía cinética de rotación del sistema:

$$E_c = \frac{1}{2}(I_{Cl} + I_H)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(35{,}5M_H\frac{r^2}{36{,}5^2} + M_H\frac{35{,}5^2}{36{,}5^2}r^2\right)(2\pi N)^2 = 19{,}2M_H r^2 N^2$$

$$E_c = 19{,}2 \cdot 1{,}66.10^{-27}(0{,}1275 \cdot 10^{-9})^2 N^2 = 5{,}18.10^{-46}\ N^2\ J$$



4.3.6. Si la bola de la figura masa m y radio r, se lanza desde A rodando, la velocidad mínima que debe dársele para que sobrepase sin caer la parte más alta del rizo de radio R, despreciando cualquier rozamiento deberá ser:

a) $\sqrt{2{,}7Rg}$ b) $\sqrt{5Rg}$ c) $\sqrt{5{,}4Rg}$ d) $\sqrt{1{,}5Rg}$

SOL:

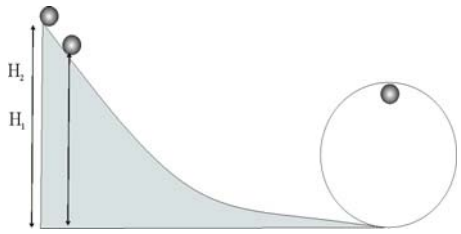
La energía total de la esfera en el punto más alto del rizo de radio R, que debe sobrepasar con la velocidad mínima v_B,

será: $mv_B^2/2 + mg.2R + I\omega^2/2$ (1); $I=2mr^2/5$, como $\omega = \frac{v_B}{r}$, sustituyendo en (1):

$$mv_B^2/2 + mg.2R + mv_B^2/5 = 7mv_B^2/10 + mg2R \quad (2).$$

Ahora bien, en el punto más alto del rizo, donde la velocidad del c.d.m es v_B; para que la velocidad sea mínima debe cumplirse que la fuerza centrípeta la proporcione únicamente el peso, $mv_B^2/R = mg$, por lo que $v_B^2=Rg$ (3), sustituyendo en (2), la E.total será: 7mgR/10 + 2mgR = 2,7mgR.

Al cumplirse la conservación de la energía mecánica $mv_A^2/2 = 2{,}7mgR$, $v_A = \sqrt{5{,}4Rg}$ como se propone en c



4.3.7. En el dispositivo de la figura la relación entre las mínimas alturas, H_1 y H_2, a las que se debe situar la esfera de radio r, para que sobrepase el rizo de radio R sin caerse, cuando baja rodando (H_1) o si lo hiciera deslizando sin rozamiento (H_2) será:
a) 1,05 b) 1,08 c) 1,09 d) 1,06

SOL:

La energía total de la esfera en el punto más alto del rizo de radio R, que debe sobrepasar con la velocidad mínima v_D, será :

$mv_D^2/2 + mg.2R + I\omega^2/2$ (I). $I=2mr^2/5$, como $v_D=\omega r$, sustituyendo en (I):

$mv_D^2/2 + mg.2R + mv_D^2/5= 7mv_D^2/10 + mg2R$ (II).

Ahora bien, en el punto más alto del rizo debe cumplirse que $mv_D^2/R = mg$, por lo que $v_D^2=Rg$ (III), sustituyendo en (II), la E.total será: 7mgR/10 + 2mgR = 2,7mgR. Al cumplirse la conservación de la energía mecánica $mgH_1=2,7mgR$, $H_1=2,7R$

En el caso de que la esfera deslice y no ruede, $\omega = 0$, la expresión (1), se reduce a : $mv_D^2/2 + mg.2R$.

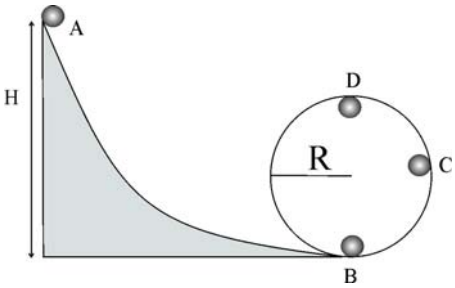
Sustituyendo el valor de (III), La E.total en D, será $mRg/2 + 2mgR = 2,5mgR$. Por lo tanto $mgH_2=2,5mgR$, $H_2=2,5R$.

La relación $H_1/H_2 = 2,7/2,5 = 1,08$, como se indica en b.

En el caso de que la esfera deslice y no ruede, $\omega = 0$, la expresión (I),se reduce a: $mv_D^2/2 + mg.2R$.

Sustituyendo el valor de (III), La E.total en D, será $mRg/2 + 2mgR = 2,5mgR$. Por lo tanto $mgH_2=2,5mgR$, $H_2=2,5R$.

La relación $H_1/H_2 = 2,7/2,5 = 1,08$, como se sugiere en b.



4.3.8.* Si una esfera de masa m, se deja caer rodando por una pista desde el punto A, a una altura H=3R, siendo R el radio de un rizo incluido en dicha pista, podrás decir de las fuerzas centrípetas que actúan sobre la esfera, en su punto más alto D, el más bajo B, y el intermedio C que:

a) LA DEL PUNTO MÁS ALTO ES EL TRIPLE DE LA DEL MÁS BAJO
b) LA MENOR TIENE LUGAR EN EL PUNTO C
c) EN EL PUNTO MÁS BAJO ES IGUAL AL PESO
d) EN EL PUNTO C ES IGUAL A LA QUE TIENE EN EL PUNTO OPUESTO

SOL:

En el punto A, la esfera sólo posee energía potencial mg3R que deberá convertirse en cinética de traslación y rotación en la parte inferior, B , del rizo, de tal forma que :

$$3mgR = mv_B^2/2 + I\omega^2/2$$

por rodar $\omega = \frac{v_B}{r}$ y el m.d.i. $I = \frac{2}{5}mr^2$

Sustituyendo: $3mgR== mv_B^2/2 + mR^2\omega^2/5 = mv_B^2/2 + mv_B^2/5$

$3mgR=7mv_B^2/10$, Así $v_B^2= 30Rg/7$.

De ese modo, al iniciar o terminar el rizo en B.

$$F_{CB}= mv_B^2/R = m30Rg/7R = 30mg/7$$

En D, empleando el mismo argumento

$$3mgR = mg2R + mv_D^2/2 + I\omega^2/2 = 2mgR + mv_D^2/2 + mR^2\omega^2/5 = 2mgR+ 7mv_D^2/10 .$$

Así $v_D^2= 10Rg/7$.

En este punto la fuerza centrípeta $F_{CD} = mv_D^2/R = 10Rgm/7R =10mg/7$.
Por lo tanto en B es triple que en D.

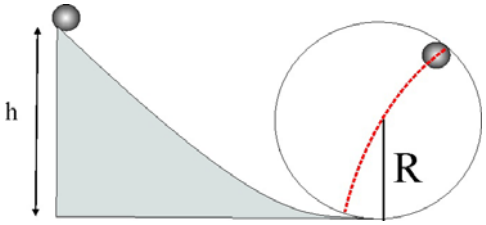
En el punto C, punto medio entre B y D, el principio de conservación de la energía

$$3mgR = mgR + mv_C^2/2 + I\omega^2/2 = mgR+ mv_C^2/2 + mR^2\omega^2/5 = mgR+ 7mv_C^2/10 .$$

Así $v_C^2= 20Rg/7$.

Llevando este valor a F_{cp} en C: $F_{CC} = mv_C^2/R= 20mRg/7R = 20mg/7$, doble que en D.

Como el punto opuesto, está a la misma altura en el rizo, será igual su velocidad y su fuerza centrípeta. Por lo tanto sólo son correctas la solución a y d



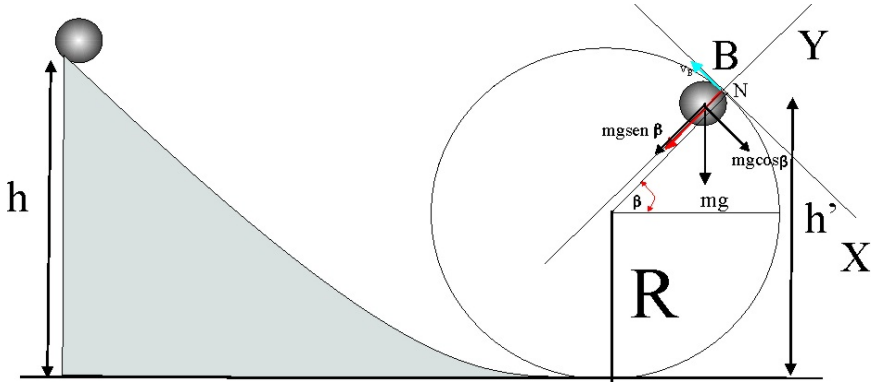
4.3.9. Si dejas rodar una pequeña esfera metálica por una pista, con un rizo de radio R, desde una altura h, observas que se despega de la pista, cayendo al suelo. Ahora bien si pretendes que al caer pase justamente por el centro del rizo, esa altura h, prescindiendo de todo rozamiento, será de:
a) 1,50R b) 1,85R c) 1,98R d) 2,25R

SOL:

Si se produce el despegue en el punto B, las fuerzas que actúan como centrípetas son: $mg\,sen\beta + N = mv_B^2/R$ y la condición que se cumple al despegar es que deja de tocar la pista, luego N = 0.

Así, $mg\,sen\beta = mv_B^2/R$, $v_B^2 = Rg\,sen\beta$ (1)

Si sale con dicha velocidad desde el punto B. tomamos un sistema de coordenadas centrado en él, con ejes cartesianos X (coincidente con la dirección de la velocidad) e Y perpendicular a ella y que pasará por el centro del rizo, cuyas coordenadas son (0, -R); véase la figura, tendremos que las ecuaciones paramétricas respectivas serán:



Sobre el eje X: $x = v_B t - g\cos\beta\, t^2/2$

Sobre el eje Y: $y = -g\,sen\beta\, t^2/2$

Sustituyendo en estas ecuaciones las coordenadas del centro del rizo (0; -R) tendremos:

$0 = v_B t - g\cos\beta\, t^2/2$; $0 = t(v_B - g\cos\beta\, t/2)$; $v_B = (t\, g\cos\beta)/2$ (2)

$-R = -g\,sen\beta\, t^2/2$, $t^2 = 2R/g\,sen\beta$ (3)

De (2) despejamos t y elevamos al cuadrado resultando, $t^2 = 4v_B^2/g^2\cos^2\beta$

Sustituyendo en (3) $4v_B^2/g^2\cos^2\beta = 2R/g\,sen\beta$; $v_B^2 = 2Rg^2\cos^2\beta/4g\,sen\beta = Rg\cos^2\beta/2sen\,\beta$

De igualar (1) con (4) resulta: $Rg\,sen\beta = Rg\cos^2\beta/2\,sen\beta$.

De donde : $sen^2\beta/\cos^2\beta = 1/2$, $\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 35{,}26^\circ$

Ahora se determinará la altura h, desde la debe dejarse rodar la esfera en el rizo para que al despegarse caiga pasando por el punto dado.

En el esquema de la figura, debido a la conservación de la energía mecánica y dado que $I_E = 2mr^2/5$

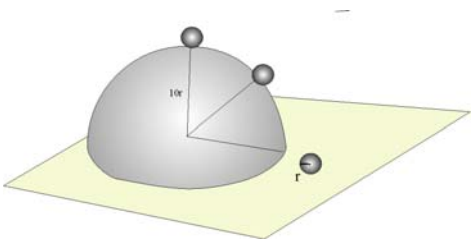
$mgh = mgh' + mv_B^2/2 + I\omega^2/2 = mgh' + mv_B^2/2 + mv_B^2/5 = mgh' + 7mv_B^2/10$;

$10g(h-h')/7 = v_B^2 = Rg\,sen\beta$ (5)

Como hay una relación geométrica entre h' y R, según se aprecia en la figura, así: $h' = R + R\,sen\beta = R(1+sen\beta)$, sustituyendo en (5)

$h = 7R\,sen\beta/10 + h' = 7R\,sen\beta/10 + R(1+sen\beta)$;

$h = 0{,}7R\,sen\,35{,}26^\circ + R(1+sem\,35{,}26^\circ) = 0{,}7R \cdot 0{,}577 + R(1+0{,}577) = 1{,}98\,R$, tal como se propone en c.



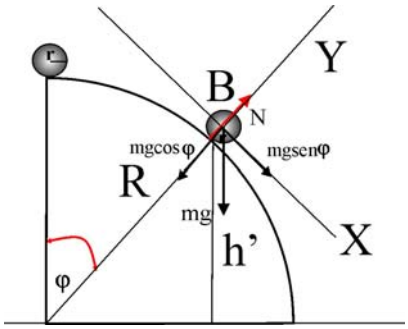
4.3.10. Si abandonas una esfera de radio r en el punto más alto de una cúpula semiesférica de radio R=10r, de forma que descienda rodando, el desplazamiento angular que habrá realizado la esfera pequeña, hasta que se despega de la cúpula será aproximadamente en radianes:

a) 3π b) 2π c) π d) π/2

SOL:

Se abandona la esfera en A a una altura R+r, produciéndose el despegue en B, a una altura h' (h´ es la distancia del c.d.m. de la bola al suelo horizontal). Lo cual implica un desplazamiento angular φ en la cúpula.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera en este punto son:



Sobre el eje Y, en el sistema de referencia centrado en el c.d.m de la esfera, actúan:

$$- mg\cos\varphi + N = -mv_B^2/(R+r).$$

Cuando abandona la cúpula N = 0. Por lo tanto

$$v_B^2=(R+r)g\cos\varphi \quad (1)$$

El principio de conservación de la energía, aplicado a este caso (R=10r), y considerando lo realizado en cuestiones anteriores, donde $\left(\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mv_B^2}{5}\right)$, resulta que la variación de energía potencial gravitatoria se transforma en cinética de traslación del c.d.m y de rotación alrededor de un eje perpendicular que pasa por el c.d.m.

$$mg(R+r) - mgh' = mv_B^2/2 + I\omega^2/2 ;$$

$$mg(R+r-h') = 7mv_B^2/10 .$$

Como h'= (R+r)cosφ = 11rcosφ , sustituyendo en la ecuación anterior:

$$11gr\,(1-\cos\varphi) = 7\,v_B^2/10$$

Sustituyendo (1) queda:

$$11gr - 11gr\cos\varphi = 0{,}7 \cdot 11gr\cos\varphi$$

$$11 = (11 + 7{,}7)\cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = 54º$$

Por rodar la esfera pequeña sobre la grande, la longitud de arco recorrido sobre la esfera grande S y la recorrida por un punto de la periferia de la pequeña s, son iguales, S = s.

Llamando con θ al ángulo girado por la esfera pequeña y recordando que la longitud del arco es igual al ángulo en radianes por el radio resulta:

$$S = s; \qquad \varphi \cdot R = \theta \cdot r ; \qquad \theta = \frac{10r}{r}\varphi = 10 \cdot 54\frac{\pi}{180} = 3\pi$$

Como se propone en a.