3.4. SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS (continuación)

3.4.16.* La energía cinética interna o energía cinética en el sistema de referencia del centro de masas de dos partículas A y B , con masas respectivas m_A y m_B, y velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ en un referencial de laboratorio, es :

a) MENOR QUE LA ENERGÍA CINÉTICA DE LAS PARTÍCULAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO
b) IGUAL A LA ENERGÍA CINÉTICA DE LAS PARTÍCULAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO
c) NULA SI LAS PARTÍCULAS SE ACERCAN O ALEJAN DEL CENTRO DE MASAS CON IGUAL MÓDULO DE SUS VELOCIDADES RESPECTIVAS
d) IGUAL A LA MITAD DE SU MASA REDUCIDA POR EL CUADRADO DE SU VELOCIDAD RELATIVA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO

SOL:

Supuestas dos partículas A y B, masas y velocidades respectivas m_A,$\mathbf{v}_A$ y m_B y $\mathbf{v}_B$, en un sistema de referencia de laboratorio, su energía cinética será la suma de las energías cinéticas de cada partícula , esto es $Ec=m_A v_A^2/2+ m_B v_B^2/2$ (I).

Como la $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}$

En el sistema de referencia del centro de masas: $\vec{v}_A^{'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM}$ y $\vec{v}_B^{'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM}$

Despejando $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, tendremos que : $\vec{v}_A^{'} + \vec{v}_{CM} = \vec{v}_A$ y $\vec{v}_B^{'} + \vec{v}_{CM} = \vec{v}_B$

Sus módulos elevados al cuadrado y sustituidos en (I), hacen que:

$Ec = m_A(v'_A+ v_{CM})^2/2 + m_B(v'_B+ v_{CM})^2/2 =$

$m_A v'^2_A/2+m_A v_{CM})^2/2 + 2m_A v'_A v_{CM}/2 + m_B v'_B/2+ m_B v_{CM}^2/2 + 2m_B v'_B v_{CM}/2$.

Agrupando y simplificando:

$[m_A v'^2_A/2 + m_B v'_B/2]$ + $[(m_A +m_B)v_{CM})^2/2]$ + $[(m_A v'_A +m_B v'_B) v_{CM}]$.

El primer término , $m_A v'^2_A/2 + m_B v'_B/2$ supone la energía cinética de las partículas A y B en el sistema de referencia del centro de masas, o energía cinética interna.

El segundo , $(m_A +m_B)v_{CM})^2/2$ es la energía cinética del centro de masas, supuesta en él toda la masa del sistema.

El tercero, $(m_A v'_A +m_B v'_B) v_{CM}$ se anula por serlo así la cantidad de movimiento en el sistema de referencia del centro de masas.

Por lo tanto $Ec_{total} = Ec_{interna} + Ec_{CM}$, expresión que se conoce como segundo teorema de König.

Por este motivo, la propuesta <u>a</u> es correcta y no la b.

Si $\left|\vec{v}_A^{'}\right| = \left|\vec{v}_B^{'}\right|$, esto es, los módulos de las velocidades de A y B referidas al centro de masas son iguales , nunca se anularía la energía cinética interna, por ello es errónea la propuesta c.

También la energía cinética interna, se podría expresar en función de la masa reducida, pues en la cuestión 3.4.7. se ha visto que :

$$m_A\vec{v}_A^{'} = m_A\vec{v}_A - m_A\vec{v}_{CM} = m_A\vec{v}_A - \frac{m_A^2\vec{v}_A + m_A m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A m_B(\vec{v}_A - \vec{v}_B)}{m_A + m_B} = \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

$$m_B\vec{v}_B^{'} = m_B\vec{v}_B - m_B\vec{v}_{CM} = m_B\vec{v}_B - \frac{m_B^2\vec{v}_B + m_A m_B\vec{v}_A}{m_A + m_B} = \frac{m_A m_B(\vec{v}_B - \vec{v}_A)}{m_A + m_B} = \mu(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$ En valor modular: $\mu\left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right|$ y $\mu\left|\vec{v}_B - \vec{v}_A\right|$ respectivamente

Al multiplicar la primera por $\dfrac{\left|\vec{v}_A\right|}{2}$, obtendremos la energía cinética de A, en el sistema de referencia del centro de masas (S.R.C.M.) : $Ec_A^{'} = \dfrac{\mu}{2}\left(\left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right|\right)\left|\vec{v}_A\right|$. Aplicando el mismo razonamiento a la partícula B, $Ec_B^{'} = \dfrac{\mu}{2}\left(\left|\vec{v}_B - \vec{v}_A\right|\right)\left|\vec{v}_B\right|$ Por ello la energía cinética interna será la suma de ambas $Ec_{A+B}^{'} = \dfrac{\mu}{2}\left(\left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right|\right)^2$, que coincide con la propuesta <u>d</u>.

3.4.17*.Dadas dos partículas A y B, de masas respectivas 4 y 6 kg, situadas en un sistema de referencia de laboratorio, con vectores de posición $\vec{r}_A = 2t\,\vec{i}\ m$ y $\vec{r}_B = t\,\vec{j}\ m$, dirás que:

a) SU ENERGÍA CINÉTICA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO VALE 11J

b) SU ENERGÍA CINÉTICA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS VALE 5 J

c) SU ENERGÍA CINÉTICA DEL CENTRO DE MASAS VALE 10J

d) LA ENERGÍA CINÉTICA DE SU MASA REDUCIDA CONSIDERANDO LA VELOCIDAD RELATIVA DE LAS PARTÍCULAS, SERÁ 6J

SOLUCIÓN

Dado que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = 2\vec{i}\ ms^{-1}$; $\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{j}\ ms^{-1}$. de lo que en el sistema de referencia de laboratorio:

$E_C = \frac{4.2^2}{2} + \frac{6.1^2}{2} = 11J$, como se propone en a

$\vec{v}_{CM} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{4.2\vec{i} + 6.i\vec{j}}{10} = 0{,}8\,\vec{i} + 0{,}6\,\vec{j}\ ms^{-1}$. cuyo módulo vale $\sqrt{0{,}8^2 + 0{,}6^2} = 1\,ms^{-1}$. Por lo que $E_{C(CdM)} = \frac{(4+6)}{2}.1^2 = 5\,J$ como se indica en b.

En el sistema de referencia del centro de masas:

$\vec{v}_A^{\,'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM} = 2\vec{i} - (0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) = 1{,}2\vec{i} - 0{,}6\vec{j}\ ms^{-1}$ cuyo módulo = $\sqrt{1{,}8}\ ms^{-1}$

$\vec{v}_B^{\,'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM} = \vec{j} - (0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) = -0{,}8\vec{i} + 0{,}4\vec{j}\ ms^{-1}$, cuyo módulo = $\sqrt{0{,}8}\ ms^{-1}$

por lo que la energía cinética en el sistema de referencia del centro de masas será:

$E_C' = \frac{4.1{,}8}{2} + \frac{6.0{,}8}{2} = 6J$, que no coincide con la propuesta c. Como se observa la energía cinética en el sistema de referencia del centro de masas, es igual a la energía cinética en el sistema de referencia de laboratorio, menos la energía cinética del centro de masas, supuesta en él toda la masa del sistema y seráigual a la energía cinética de su masa reducida, con la velocidad relativa de las partículas entre sí, o sea:

$E_C = \frac{\mu}{2}(|\vec{v}_A - \vec{v}_B|)^2$; $\vec{v}_A - \vec{v}_B = 2\vec{i} - \vec{j}\ ms^{-1}$, cuyo módulo vale $|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \sqrt{5}\ ms^{-1}$

mientras que $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \mu = 2{,}4\ kg$, por lo que $E_C = \frac{\mu}{2}(|\vec{v}_A - \vec{v}_B|)^2 = \frac{2{,}4}{2}.5 = 6J$, como se señala en la propuesta d

3.4.18*. Dadas los vectores de posición de dos puntos materiales A y B, de masas respectivas 2M y 3M, $\vec{r}_A = t^2\,\vec{i}$ y $\vec{r}_B = 2t^2\,\vec{j}$, podrás afirmar que a los 2 segundos y en el sistema de referencia del centro de masas :

a) EL VECTOR DE POSICIÓN DE A ES $2{,}4\vec{i} - 4{,}8\vec{j}\ m$

b) EL VECTOR DE POSICIÓN DE B ES $1{,}6\vec{i} + 3{,}2\vec{j}\ m$

c) LA ENERGÍA CINÉTICA DE LAS PARTÍCULAS ES 48MJ

d) LA ENERGÍA CINÉTICA DEL CENTRO DE MASAS ES 48MJ

e) LA VELOCIDAD DE A RESPECTO A B ES $4\vec{i} - 8\vec{j}\ ms^{-1}$

SOL:

Dado que $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i}$ (I), en el sistema de referencia de laboratorio (S.R.L.).

Si consideramos dos puntos materiales m_A= 2M y m_B = 3M, con r_A y r_B, en el S.R.L.,l os vectores de posición respectivos en el S.R.C.M., serían:

$$\vec{r}_A^{\,'} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CM} \text{ (II)}, \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_B^{\,'} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CM} \text{ (III)}.$$

Sustituyendo en (I),

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} = \frac{2M.t^2\,\vec{i} + 3M.2t^2\,\vec{j}}{5M} = \frac{2t^2}{5}\vec{i} + \frac{6t^2}{5}\vec{j}\ m \text{ (IV)}$$

Llevando este valor a (II) y (III):

$$\vec{r}_A^{\,'} = t^2\vec{i} - \left(0{,}4t^2\vec{i} + 1{,}2t^2\vec{j}\right) = 0{,}6t^2\vec{i} - 1{,}2t^2\vec{j}\ m. \quad \text{A los 2 segundos } \vec{r}_A^{\,'} = 2{,}4\vec{i} - 4{,}8\vec{j}\ m$$

$$\vec{r}_B^{\,'} = 2t^2\vec{j} - \left(0{,}4t^2\vec{i} + 1{,}2t^2\vec{j}\right) = -0{,}4t^2\vec{i} + 0{,}8t^2\vec{j}\ m. \text{ A los 2 segundos } \vec{r}_B^{\,'} = -1{,}6\vec{i} + 3{,}2\vec{j}\ m$$

$$\text{Como } \vec{v}^{\,'} = \frac{d\vec{r}^{\,'}}{dt}, \quad \vec{v}_A^{\,'} = 1{,}2t\vec{i} - 2{,}4t\vec{j}\ ms^{-1} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B^{\,'} = -0{,}8t\vec{i} + 1{,}6t\vec{j}\ ms^{-1}$$

En el S.R.C.M..

Para t=2s, la velocidad de A respecto a B será: $\vec{v}_A^{\,'} - \vec{v}_B^{\,'} = 2t\vec{i} - 4t\vec{j} = 4\vec{i} - 8\vec{j}\ ms^{-1}$ (V).

Las energías cinéticas en este sistema serán a los 2s:

$$\left|\vec{v}_A^{\,'}\right| = \sqrt{(1{,}2t)^2 + (-2{,}4t)^2} = \sqrt{7{,}2t^2}\ ms^{-1} \quad Ec_A^{'} = \frac{2M.7{,}2t^2}{2} = M.7{,}2.4 = 28{,}8M\ J \text{ y}$$

$$\left|\vec{v}_B^{\,'}\right| = \sqrt{(-0{,}8t)^2 + (1{,}6t)^2} = \sqrt{3{,}2t^2}\ ms^{-1} \quad Ec_B^{'} = \frac{3M.3{,}2t^2}{2} = 1{,}5M.3{,}2.4 = 19{,}2M\ J$$

Y la total sería la suma de ambas, o sea 48MJ.

Se llegaría al mismo resultado partiendo de la fórmula $E_C = \frac{\mu}{2}\left(|\vec{v}_A - \vec{v}_B|\right)^2$, siendo μ la masa reducida.

Así $\dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \mu = \dfrac{6M^2}{5M} = 1{,}2M$ Calculando el módulo de la velocidad relativa para t=2s a partir de:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = 2t\,\vec{i} = 4\,\vec{i}\ ms^{-1} \text{ y } \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = 4t\,\vec{j} = 8\,\vec{j}\ ms^{-1} \quad \vec{v}_A - \vec{v}_B = 4\vec{i} - 8\vec{j}\ ms^{-1} \quad Ec = \frac{1{,}2M.\left(4^2 + (-8)^2\right)}{2} = 0{,}6M.80 = 48M\ J$$

La energía cinética del c.d.m. considerando ahí toda la masa, se obtiene calculando $\mathbf{v}_{CM}$, a partir de (IV), por derivación.

$$\text{Así} \quad \vec{v}_{CM} = \frac{d\,\vec{r}_{CM}}{dt} = 0{,}8t\vec{i} + 2{,}4t\vec{j} \quad ms^{-1}.$$

Su módulo será: $\left|\vec{v}_{CM}\right| = \sqrt{(0{,}8t)^2 + (2{,}4t)^2} = 2{,}53t\ ms^{-1}$

Por lo tanto $Ec_{CM} = \dfrac{5M.(2{,}53t)^2}{2} = 2{,}5M.(2{,}53.2)^2 = 64M\ J$

tal en el sistema de laboratorio $= Ec_{CM} = \dfrac{5M.(2{,}53t)^2}{2} = 2{,}5M.(2{,}53.2)^2 = 64M\ J$ igual a la suma de las dos energías cinéticas, la interna y la del centro de masas. Por lo tanto, la opción d) es falsa.

3.4.19. En la expresión $\Sigma \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_i^{'}$ las velocidades están referidas al centro de masas del sistema, por consiguiente el anterior sumatorio para un sistema de partículas vale:

a) CERO

b) $M\,\vec{v}_{CM}$, SIENDO M LA MASA DEL SISTEMA

c) DEPENDE DE LA VELOCIDAD QUE TENGA EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA

d) $\vec{L}_{CM}$

SOL:

El sumatorio se puede desarrollar así:

$$\Sigma \vec{r}_{CM} \wedge m_i \vec{v}_i^{'} = \vec{r}_{CM} \wedge m_1 \vec{v}_1^{'} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2 \vec{v}_2^{'} + ... + \vec{r}_{CM} \wedge m_n \vec{v}_n^{'} = \vec{r}_{CM}\left(m_1 \vec{v}_1^{'} + m_2 \vec{v}_2^{'} + ... + m_n \vec{v}_n^{'}\right) = 0$$

El resultado es cero ya que la suma que figura dentro del paréntesis es la cantidad de movimiento del sistema respecto del centro de masas y esa suma es nula. Es correcta la propuesta a

3.4.20. Dos partículas de masas iguales giran a velocidad angular constante alrededor de su centro de masas, siendo $\vec{L}_{CM}$ el momento angular del sistema. Si se duplica la velocidad angular ω de cada partícula, entonces el módulo de $\vec{L}_{CM}$:

a) PERMANECE IGUAL

b) SE DUPLICA

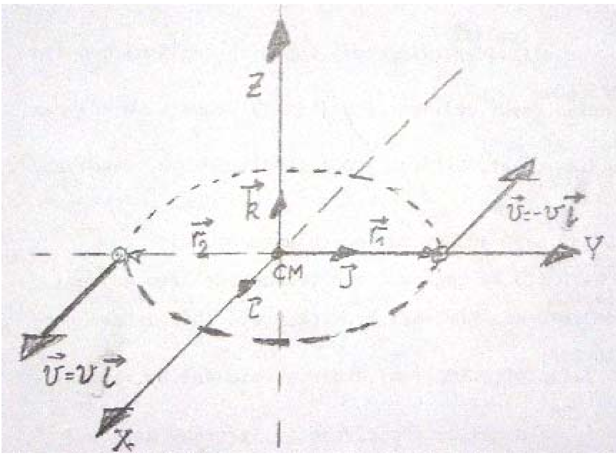
c) SE HACE CUATRO VECES MAYOR

d) SE HACE DIECISEIS VECES MAYOR

e) NADA DE LO DICHO

Sol:

Designamos con L a la distancia entre las dos partículas. Al tener la misma masa el centro de masas está a la misma distancia de las dos, esto es, L/2. El momento angular de las dos partículas es:



$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v} = r_1 \vec{j} \wedge m(-v\vec{i}\,) = \frac{L}{2} mv\vec{k} \;;\; \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \wedge m\vec{v} = -r_2 \vec{j} \wedge mv\vec{i} = \frac{L}{2} mv\vec{k}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = Lmv\vec{k} \Rightarrow L = Lm\omega\frac{L}{2} = \frac{L^2}{2} m\omega$$

Como la relación entre el módulo de momento angular y la velocidad angular ω es lineal, al duplicar la velocidad angular también se duplica dicho módulo. Es correcta la propuesta b.

3.4.21*.Si dos puntos materiales A y B, se mueven por el eje X en su sentido positivo, B con doble velocidad que A, que tiene a su vez doble masa que B. En el sistema de referencia del centro de masas dirías que:

a) A Y B TENDRÍAN IGUAL VELOCIDAD
b) LA VELOCIDAD DE A RESPECTO A B SERÍA IGUAL A LA QUE TENDRÍA A RESPECTO A B EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO.
c) A TENDRÍA DOBLE ENERGÍA CINÉTICA INTERNA QUE B
d) EL MOMENTO CINÉTICO DE A SERÍA IGUAL AL DE B

SOL:

Si $m_A = 2m$ y $m_B = m$, $\vec{v}_A = v\vec{i}$ y $\vec{v}_B = 2v\vec{i}$,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{2m.v\vec{i} + m.2v\vec{i}}{3m} = \frac{4v}{3}\vec{i}$$

$$\vec{v}_A^{'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM} = v\vec{i} - \frac{4v}{3}\vec{i} = -\frac{v}{3}\vec{i}\ ms^{-1} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B^{'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM} = 2v\vec{i} - \frac{4v}{3}\vec{i} = \frac{2v}{3}\vec{i}\ ms^{-1}.$$

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = -v\vec{i}\ ms^{-1} \quad \text{y} \quad \vec{v}_A^{'} - \vec{v}_B^{'} = -\frac{v}{3}\vec{i} - \frac{2v}{3}\vec{i} = -v\vec{i}\ ms^{-1}$$

Por lo tanto, mientras b es correcta, a no lo es.

La energía cinética interna de A = 2m. v²/2.9= mv²/9 , mientras que la de B=m.4v²/2.9= 2mv²/9, por lo tanto la de B es doble de la de A,y no al revés,como indica c.

El momento cinético de A , $\vec{L}_A = \vec{r}_A \wedge 2m\vec{v}_A = r_A\vec{i} \wedge 2m.v\vec{i} = 0$, puesto que sen"=0

y el de B, $\vec{L}_B = \vec{r}_B \wedge m\vec{v}_B = r_B\vec{i} \wedge m.2v\vec{i} = 0$, por la misma razón. Por lo tanto la propuesta d, es correcta.

3.4.22. El momento angular de un sistema de partículas respecto a un punto es:

a) LA SUMA DE LOS MOMENTOS CINÉTICOS DE TODAS LAS PARTÍCULAS RESPECTO A ESE PUNTO
b) LA SUMA DE LOS MOMENTOS CINÉTICOS DE TODAS LAS PARTÍCULAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS
c) EL MOMENTO CINÉTICO DEL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA SUPUESTA TODA LA MASA EN EL, RESPECTO A ESE PUNTO
d) LA SUMA DEL MOMENTO CINÉTICO DEL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA SUPUESTA TODA LA MASA EN EL, RESPECTO AL PUNTO Y DE LOS MOMENTOS ANGULARES DE LAS PARTÍCULAS EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS

SOL:

Para mejor comprensión de la cuestión, suponemos dos partículas de masas m_1 y m_2, vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$,y velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el referencial de laboratorio.

El momento cinético o angular del sistema en este referencial es: $\vec{L} = \Sigma\vec{r}_i \wedge m_i\vec{v}_i$

Aplicándolo a estas dos partículas $\vec{L} = \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$ (I).

Pero si consideramos la relación de estas magnitudes con las correspondientes en el S.R.C.M.[cuestión 2.4.9 (I)]:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1^{'} + \vec{r}_{CM} \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2^{'} + \vec{r}_{CM}\ ;\ \vec{v}_1^{'} + \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 \quad \text{y} \quad \vec{v}_2^{'} + \vec{v}_{CM} = \vec{v}_2$$

Al sustituir en (I): $\vec{L} = \left(\vec{r}_1^{'} + \vec{r}_{CM}\right) \wedge m_1\left(\vec{v}_1^{'} + \vec{v}_{CM}\right) + \left(\vec{r}_2^{'} + \vec{r}_{CM}\right) \wedge m_2\left(\vec{v}_2^{'} + \vec{v}_{CM}\right)$

Desarrollando y separando variables :

$$\vec{L} = (\vec{r}_1^{'} \wedge m_1\vec{v}_1^{'} + \vec{r}_2^{'} \wedge m_2\vec{v}_2^{'}) + (\vec{r}_1^{'} \wedge m_1\vec{v}_{CM} + \vec{r}_2^{'} \wedge m_2\vec{v}_{CM}) + (\vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{v}_1^{'} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{v}_2^{'}) + (\vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{v}_{CM})$$

Descomponiendo en sumandos , $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_a + \vec{L}_b + \vec{L}_{CM}$

El primer bloque constituye la suma de los momentos cinéticos de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas, o momento cinético interno o de spin $\vec{L}'$

El segundo bloque $\vec{L}_a = (\vec{r}_1^{'} \wedge m_1\vec{v}_{CM} + \vec{r}_2^{'} \wedge m_2\vec{v}_{CM}) = 0$ **r'**$_1$ en función de las propiedades del S.R.C.M.

El tercer bloque $\vec{L}_b = (\vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{v}_1^{'} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{v}_2^{'}) = 0$, pues el segundo factor lo es, en función de las propiedades del S.R.C.M.

El cuarto bloque $\vec{L}_{CM} = (\vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{v}_{CM}) = \vec{r}_{CM} \wedge (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM}$, corresponde al momento cinético del sistema, supuesta toda la masa situada en el vector de posición del centro de masas , o sea $\vec{L}_{CM}$ también denominado momento cinético orbital.

En consecuencia $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$. O sea el momento cinético de un sistema de partículas es igual al momento cinético interno L', o momento cinético en el sistema del centro de masas o momento cinético de espín mas el momento cinético del centro de masas, o momento cinético orbital. Este enunciado constituye el primer teorema de König, y hace correcta la propuesta d, tal como la a , no siéndolo las b y c.

3.4.23.El momento cinético de un sistema de dos partículas A y B , de masas M y 2M, y con vectores de posición $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ respecto a un referencial de laboratorio, en un sistema de referencia baricéntrico o del centro de masas es:

a) $\vec{r}_A \wedge M\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{r}_B \wedge 2M\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} - \left(\dfrac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_B}{3}\right) \wedge M\left(\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + 2\dfrac{d\vec{r}_B}{dt}\right)$

b) $(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge 3M(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$

c) $(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge 2M\dfrac{(\vec{v}_A - \vec{v}_B)}{3}$

d) $(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \wedge \mu(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$, SIENDO μ SU MASA REDUCIDA

e) NADA DE LO DICHO

SOL:

Si se parte de la cuestión anterior y puesto que $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$, $\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_{CM}$ sustituyendo los valores en $\vec{L} = \vec{r}_A \wedge m_A\vec{v}_A + \vec{r}_B \wedge m_B\vec{v}_B$ y puesto que $\vec{r}_{CM} = \dfrac{M\vec{r}_A + 2M\vec{r}_B}{3M} = \dfrac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_B}{3}$ (I) ,

y como $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{L}_{CM} = \left(\dfrac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_B}{3}\right) \wedge M\left(\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + 2\dfrac{d\vec{r}_B}{dt}\right)$ y $\vec{L} = \vec{r}_A \wedge M\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{r}_B \wedge 2M\dfrac{d\vec{r}_B}{dt}$.

De lo que $\vec{L}' = \vec{r}_A \wedge M\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{r}_B \wedge 2M\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} - \left(\dfrac{\vec{r}_A + 2\vec{r}_B}{3}\right) \wedge M\left(\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + 2\dfrac{d\vec{r}_B}{dt}\right)$

como se propone en a.

Como $\vec{L}' = (\vec{r}_A\,' \wedge m_A\vec{v}_A\,' + \vec{r}_B\,' \wedge m_B\vec{v}_B\,')$ (II), $\vec{v}_A\,' = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM}$ y $\vec{v}_B\,' = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM}$

Derivando respecto al tiempo la expresión (I), $\vec{v}_{CM} = \dfrac{\vec{v}_A + 2\vec{v}_B}{3}$ e igualmente los vectores de posición de A y B, para determinar las velocidades respectivas y sustituyendo en (II):

$$\vec{L}' = \vec{r}_A\,' \wedge m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_{CM}) + \vec{r}_B\,' \wedge m_B(\vec{v}_B - \vec{v}_{CM})$$

$$= \vec{r}_A\,' \wedge M(\vec{v}_A - \frac{\vec{v}_A + 2\vec{v}_B}{3}) + \vec{r}_B\,' \wedge 2M(\vec{v}_B - \frac{\vec{v}_A + 2\vec{v}_B}{3})$$

$$= \vec{r}_A\,' \wedge 2M\frac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{3} + \vec{r}_B\,' \wedge 2M\frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{2} = (\vec{r}_A\,' - \vec{r}_B\,') \wedge \frac{2M}{3}(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

Como $\vec{r}_A\,' - \vec{r}_B\,' = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ y la masa reducida $\dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \mu$; $\mu = \dfrac{2M^2}{3M} = \dfrac{2M}{3}$:

y $\vec{L}' = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \wedge \mu(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$

Por lo tanto el momento cinético de un sistema de dos partículas en un referencial del centro de masas, corresponde al momento cinético de la masa reducida por la velocidad relativa, respecto a la posición relativa de ambas partículas. Sólo son correctas las propuestas a,c y d .

3.4.24.El sistema de referencia del centro de masas, y el concepto de masa reducida, se empleó en la física del átomo, para la determinación del momento cinético del sistema protón-electrón en el átomo de hidrógeno. Así conociendo que la masa del protón es 1836 veces la del electrón, que la distancia protón-electrón para el átomo de hidrógeno es 52,3 pm, y la velocidad angular del electrón y del protón **T** = $4{,}4.10^{16}$ rad/s ,y la masa del electrón $9{,}1.10^{-31}$kg, dirás que el módulo del momento cinético interno del sistema de las dos partículas atómicas, es aproximadamente en m.kg m/s :

a) NULO b) NEGATIVO c) 10^{-31} d) 10^{-20}

SOL:

El momento cinético total es la suma de los momentos cinéticos del protón y del electrón:

$\vec{L}_H\acute{} = (\vec{r}_p^{\,'} \wedge m_p\vec{v}_p^{\,'} + \vec{r}_e^{\,'} \wedge m_e\vec{v}_e^{\,'})$, teniendo en cuenta que $\vec{v}_p^{\,'} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p^{\,'} = \omega\vec{k} \wedge r_p^{'}\vec{i} = \omega r_p^{'}\vec{j}$ y $\vec{v}_e^{\,'} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_e^{\,'} = \omega\vec{k} \wedge r_e^{'}\vec{i} = \omega r_e^{'}\vec{j}$

$\vec{L}_H\acute{} = (r_p^{'}\vec{i} \wedge m_p\omega r_p^{'}\vec{j} + r_e^{'}\vec{i} \wedge m_e\omega r_e^{'}\vec{j}) = (m_p r_p^{'2} + m_e r_e^{'2})\omega\vec{k}\ kg.m^2.rad.s^{-1}$ (I)

En el S.R.C.M. $\vec{r}_p^{\,'}m_p + \vec{r}_e^{\,'}m_e = 0$; $\vec{r}_e^{\,'} = -\dfrac{\vec{r}_p^{\,'}m_p}{m_e}$

$\vec{r}_e^{\,'} - \vec{r}_p^{\,'} = \vec{r}$; $\vec{r} = -\dfrac{\vec{r}_p^{\,'}m_p}{m_e} - \vec{r}_p^{\,'} = -\vec{r}_p^{\,'}\left(\dfrac{m_p}{m_e}+1\right)$, $\vec{r}_p^{\,'} = -\dfrac{\vec{r}}{\left(\dfrac{m_p}{m_e}+1\right)}$ haciendo una sustitución análoga $\vec{r}_e^{\,'} = -\dfrac{\vec{r}}{\left(\dfrac{m_e}{m_p}+1\right)}$

Considerando los módulos vectoriales y sustituyendo en (I) :

$$\vec{L}_H\acute{} = (m_p r_p^{'2} + m_e r_e^{'2})\omega\vec{k} = \left[m_p\left(-\frac{r}{\left(\frac{m_p}{m_e}+1\right)}\right)^2 + m_e\left(-\frac{r}{\frac{m_e}{m_p}+1}\right)^2\right]\omega\vec{k}$$

$$= r^2\left(\frac{m_p m_e^{\,2} + m_e m_p^{\,2}}{(m_p+m_e)^2}\right)\omega\vec{k} = r^2\,\frac{m_p m_e}{m_p+m_e}\,\omega\vec{k} = \mu r^2\omega\vec{k}$$

La masa reducida del sistema protón - electrón, será $1836.9{,}1.10^{-31}/1837$ kg.

El módulo de r, corresponde a la distancia entre protón y electrón, o sea el radio del hidrógeno = 523.10^{-12} m , y la velocidad angular $4{,}4.10^{16}$ rad/s.

Sustituyendo en la fórmula (II), obtenemos un $|\vec{L}|$ =$1{,}095.10^{-31}$ kg.m²/s. La única solución correcta es la c.

3.4.25. Supuestas dos partículas A y B, de masas 4M y 6M,con vectores de posición $\vec{r}_A = 2t\,\vec{j}$ y $\vec{r}_B = t\,\vec{j}$ (unidades del S.I.), el momento cinético interno , momento cinético de spin o momento cinético en el sistema de referencia del centro de masas será, para t=2s.

a) IGUAL AL MOMENTO CINÉTICO DEL SISTEMA DE PARTÍCULAS
b) IGUAL AL MOMENTO CINÉTICO DEL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA DE PARTICULAS
c) NULO d) 4,8M m.kg.m/s

SOL:

Dado que, según se ha visto en la cuestión 3.4.18. $\vec{L} = \vec{L}\acute{} + \vec{L}_{CM}$, $\vec{L}\acute{} = \vec{L} - \vec{L}_{CM}$

Si $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$: $\vec{L} = \vec{r}_A \wedge m_A\vec{v}_A + \vec{r}_B \wedge m_B\vec{v}_B = 2t\vec{j} \wedge 4M.2\vec{j} + t\vec{j} \wedge 6M.\vec{j} = 0$

$\vec{r}_{CM} = \dfrac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A+m_B} = \dfrac{4M.2t\vec{j} + 6M.t\vec{j}}{10M} = 1{,}4t\vec{j}\ m$; $\vec{v}_{CM} = 1{,}4\vec{j}\ ms^{-1}$

$\vec{L}_{CM} = 1{,}4t\vec{j} \wedge (4M+6M).1{,}4\vec{j} = 0$. La única solución correcta es la c.

3.4.26. * Dadas las partículas A y B, de masas 2M y 8M, con vectores de posición respectivos $\vec{r}_A = (t^2+2)\vec{i}\ m$ y $\vec{r}_B = (2-t^2)\,\vec{j}\ m$ podrás decir que a los 2 segundos :

a) LA TRAYECTORIA DEL CENTRO DE MASAS ES UNA RECTA CON PENDIENTE -4
b) EL CENTRO DE MASAS SE MUEVE CON UNA VELOCIDAD DE MÓDULO 3,3 m/s
c) LA ENERGÍA CINÉTICA INTERNA ES 25,6M J.
d) EL MOMENTO CINÉTICO EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS ES NULO

SOL:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A+m_B} = \frac{2M.(t^2+2)\vec{i} + 8M.(2-t^2)\vec{j}}{10M} = (0{,}2t^2+0{,}4)\vec{i} + (1{,}6-0{,}8t^2)\vec{j}\ m \quad \text{(I).}$$

La trayectoria se obtendría a partir de las ecuaciones paramétricas del centro de masas :

$x = 0{,}2t^2 + 0{,}4$; $y = 1{,}6 - 0{,}8t^2$; $0{,}2t^2 = x - 0{,}4$; $y = 1{,}6 - 4(x - 0{,}4) = -4x$; $y/x = -4$.

Ecuación de una recta con pendiente -4 . tal como se indica en a.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = 0{,}4t\vec{i} - 1{,}6t\vec{j}\ ms^{-1}$$ A los 2s.

$$|\vec{v}_{CM}| = \sqrt{(0{,}4t)^2 + (-1{,}6t)^2} = 1{,}65t = 3{,}3\ ms^{-1}.$$ Es correcta la propuesta b.

$$\frac{m_A m_B}{m_A+m_B} = \mu = \frac{16M^2}{10M} = 1{,}6M\ ;\ \vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = 2t\vec{i}\ ms^{-1} \text{ y } \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = -2t\vec{j}\ ms^{-1}$$

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = 2t\,\vec{i} - (-2t)\vec{j}\ ms^{-1}$$ A los 2s. $$|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2} = 2t\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ ms^{-1}$$

$$Ec'_{A+B} = \frac{\mu}{2}\left(|\vec{v}_A - \vec{v}_B|\right)^2 = \frac{1{,}6M.\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} = 25{,}6M\ J$$ como propone c.

$$\vec{L}' = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B);$$

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = (t^2+2)\vec{i} - (2-t^2)\vec{j}\ ms^{-1}\quad \vec{L}' = ((t^2+2)\vec{i} - (2-t^2)\vec{j}\ ) \wedge 1{,}6M(2t\vec{i} + 2t\vec{j}).$$

Para t=2s $\vec{L}' = (6\vec{i} + 2\vec{j}\ ) \wedge 1{,}6M(4\vec{i} + 4\vec{j}) = 1{,}6M(24\vec{k} - 8\vec{k}) = 25{,}6M\vec{k}\ m^2.kg.s^{-1}$

Es incorrecta la propuesta d.

3.4.27.* Supuestas las partículas A y B, de masas 2kg y 3kg, a una distancia 1m del origen y en reposo sobre la parte positiva de los ejes X e Y, respectivamente. Si sobre A actúa una fuerza $\vec{F}_1 = 2\vec{j}\ N$, y sobre B otra $\vec{F}_2 = 3\vec{i}\ N$, dirás que :

a) AL CABO DE 1s, EL VECTOR DE POSICIÓN DE A COINCIDE CON EL DE B
b) PASADO MEDIO SEGUNDO EL MÓDULO DEL VECTOR DE POSICIÓN DEL CENTRO DE MASAS VALE 0,8m
c) LA ENERÍGIA CINÉTICA INTERNA PARA t=0,5s ES 0,5 J
d) EL MOMENTO CINÉTICO INTERNO O DE ESPÍN PARA t=0,5s ES NULO
e) EL MOMENTO CINÉTICO ORBITAL O DEL CENTRO DE MASAS PARA t=0,5s ES 0,75**k** m.kg.m/s

SOL:

Los vectores de posición, para t=0, serán $\vec{r}_A = \vec{i}$ y $\vec{r}_B = \vec{j}$, en unidades del S.I. y

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_{BC}}{m_A + m_B} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j}}{5} = \frac{2\vec{i}}{5} + \frac{3\vec{j}}{5}\ m$$

La $\vec{a}_{CM} = \dfrac{m_A\vec{a}_A + m_B\vec{a}_B}{m_A + m_B} = \dfrac{3\vec{i} + 2\vec{j}}{5}\ ms^{-2}$, $\vec{a}_A = \dfrac{\vec{F}_1}{m_A} = \dfrac{2\vec{j}}{2} = \vec{j}\ ms^{-2}$ mientras que la de B , $\vec{a}_B = \dfrac{\vec{F}_2}{m_B} = \dfrac{3\vec{i}}{3} = \vec{i}\ ms^{-2}$

Puesto que son constantes, ambos puntos describen un M.U.A.,

Así para t=1s $\vec{r}_A = \vec{r}_{A(0)} + \dfrac{\vec{a}_A}{2}t^2 = \vec{i} + \dfrac{t^2}{2}\vec{j} = \vec{i} + 0{,}5\vec{j}\ m$ (I) y $\vec{r}_B = \vec{r}_{B(0)} + \dfrac{\vec{a}_B}{2}t^2 = j + \dfrac{t^2}{2}\vec{i} = 0{,}5\vec{i} + \vec{j}\ m$ (II). No pueden coinciden, y por lo tanto la propuesta a es errónea.

El vector de posición del centro de masas: $\vec{r}_{CM(ts)} = \vec{r}_{CM(0)} + \dfrac{\vec{a}_{CM}}{2}t^2 = (0{,}4\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) + \dfrac{3\vec{i} + 2\vec{j}}{10}t^2\ m$.

Para t=0,5s

$$\vec{r}_{CM(0,5s)} = \vec{r}_{CM(0)} + \frac{\vec{a}_{CM}}{2}t^2 = (0{,}4\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) + \frac{3\vec{i} + 2\vec{j}}{10}.0{,}5^2 = 0{,}475\vec{i} + 0{,}65\vec{j}\ m$$

Cuyo módulo $\left|\vec{r}_{CM}\right|_{0,5s} = \sqrt{(0{,}475)^2 + (0{,}65)^2} = 0{,}8\ m$ como propone b .

La $\vec{v}_{CM(0,5s)} = \dfrac{d\,\vec{r}_{CM}}{dt} = 0{,}6t\vec{i} + 0{,}4t\vec{j} = 0{,}3\vec{i} + 0{,}2\vec{j}\quad ms^{-1}$

La energía cinética interna, la obtenemos a partir de la fórmula $E_C = \frac{\mu}{2}\left(\left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right|\right)^2$: .

La masa reducida será 2.3/5=1,2 kg .

De (I) y (II), Para t=0,5s $\vec{v}_A = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} = t\vec{j} = 0{,}5\vec{j}\ ms^{-1}$ y $\vec{v}_B = \dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = t\vec{i} = 0{,}5\vec{i}\ ms^{-1}$

$$\vec{v}_A - \vec{v}_B = -0{,}5\vec{i} + 0{,}5\vec{j}\ ms^{-1} ; \left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right| = \sqrt{(-0{,}5)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}5\sqrt{2}\ ms^{-1}$$

Por lo tanto $Ec'_{A+B} = \dfrac{\mu}{2}\left(\left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right|\right)^2 = \dfrac{1{,}2.\left(0{,}5\sqrt{2}\right)^2}{2} = 0{,}3\ J$. La solución c no es correcta.

El momento cinético interno $\vec{L}' = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \mu\left(\vec{v}_A - \vec{v}_B\right)$

$$\vec{r}_{A(0,5s)} = \vec{r}_{A(0)} + \frac{\vec{a}_A}{2}t^2 = \vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} = \vec{i} + 0{,}125\vec{j}\ m ;$$

$$\vec{r}_{B(0,5s)} = \vec{r}_{B(0)} + \frac{\vec{a}_B}{2}t^2 = j + \frac{t^2}{2}\vec{i} = 0{,}125\vec{i} + \vec{j}\ m ; \vec{r}_A - \vec{r}_B = (0{,}875\vec{i} - 0{,}875\vec{j}\ ms^{-1}$$

$\vec{L}' = (0{,}875\vec{i} - 0{,}875\vec{j}\ ) \wedge 1{,}2(-0{,}5\vec{i} + 0{,}5\vec{j}) = (0{,}525\vec{k} - 0{,}525\vec{k}) = 0$, tal como se propone en d.

El momento cinético del centro de masas para t=0,5s:

$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{CM} = (0{,}475\vec{i} + 0{,}65\vec{j}) \wedge 5(0{,}3\vec{i} + 0{,}2\vec{j}) = -0{,}5\vec{k}\ m^2.kg.s^{-1}$. Es incorrrecta la propuesta e.

3.4.28.* La variación del momento cinético de un sistema de partículas, respecto al tiempo, en el sistema de referencia de laboratorio es igual a:

a) LA MISMA VARIACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO INTERNO DE DICHAS PARTÍCULAS.
b) LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE CADA PARTÍCULA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS.
c) LA SUMA DE LOS MOMENTOS DE LAS FUERZAS EXTERNAS QUE ACTÚAN SOBRE CADA PARTÍCULA
d) EL MOMENTO DE LA SUMA DE LAS FUERZAS EXTERNAS ACTUANDO SOBRE TODA LA MASA EN EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA.
e) LA SUMA DE LA VARIACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO INTERNO DE LAS PARTÍCULAS CON EL TIEMPO Y EL MOMENTO DE LAS FUERZAS EXTERNAS ACTUANDO SOBRE LA SUMA DE LAS MASAS EN EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA.

SOL:

Si consideramos dos puntos materiales de masas m_1 y m_2, con vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, y velocidades respectivas $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, el momento cinético del sistema $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_1 \wedge m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{r}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 + \vec{r}_2 \wedge m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

Como $\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$ y $\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$ los primeros productos vectoriales de ambos términos son nulos ya que el ángulo que forman los vectores es de 0E y dado que $\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt}$ y $\vec{a}_2 = \frac{d\vec{v}_2}{dt}$. Por lo tanto $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{a}_1 + \vec{v}_2 \wedge m_2\vec{v}_2 + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{a}_2$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{a}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{a}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$, que corresponde a la suma de los momentos de las fuerzas exteriores que actúan sobre m_1 y m_2 , dado que la suma de las fuerzas interiores es nula , que hacen válida la solución <u>c</u> y <u>a</u> , anulando la b.

Como en el S.R.C.M. según se ha visto en 3.4.24: $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$

Al derivar respecto al tiempo ,

$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_1{}' \wedge m_1\vec{v}_1{}' + \vec{r}_1{}' \wedge m_1\frac{d\vec{v}_1{}'}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{r}_2{}' \wedge m_2\vec{v}_2{}' + \vec{r}_2{}' \wedge m_2\frac{d\vec{v}_2{}'}{dt}$, de lo que:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{r}_1{}' \wedge m_1\vec{a}_1{}' + \vec{r}_2{}' \wedge m_2\vec{a}_2{}'$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_1\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} + \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$

de lo que:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{a}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{a}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1{}' \wedge m_1\vec{a}_1{}' + \vec{r}_2{}' \wedge m_2\vec{a}_2{}' + \vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{a}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{a}_{CM}$$

El primer término supone la suma de los momentos de las fuerzas en el S.R.C.M., mientras que el segundo implica el momento de la suma de las fuerzas aplicado en el centro de masas, en el S.R.L. , tal como se indica en la propuesta <u>e</u> ,que invalida la d.

3.4.29.* Dadas dos partículas A y B, de masas respectivas m_A y m_B, y vectores de posición en un sistema de referencia de laboratorio $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$, y en en sistema de referencia del centro de masas $\vec{r}_A^{\,'}$ y $\vec{r}_B^{\,'}$, dirás que la variación de su momento cinético en el sistema de referencia del centro de masas con el tiempo, $\frac{d\vec{L}'}{dt}$ es igual a:

a) $\left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \mu\left(\vec{a}_A - \vec{a}_B\right)$

b) CERO

c) $\vec{r}_A{}' \wedge m_A \vec{a}_A{}' + \vec{r}_B{}' \wedge m_B \vec{a}_B{}'$

d) $\vec{r}_A \wedge m_A \vec{a}_A + \vec{r}_B \wedge m_B \vec{a}_B + \vec{r}_{CM} \wedge (m_1 + m_2)\vec{a}_{CM}$

SOL:

Teniendo en cuentas el desarrollo efectuado en 3.4.23. $\vec{L}' = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \mu\left(\vec{v}_A - \vec{v}_B\right)$

siendo μ su masa reducida.

Derivando respecto al tiempo , sustituyendo y eliminando los factores nulos:

$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \mu\left(\vec{a}_A - \vec{a}_B\right)$, como se propone en a.

3.4.30.* Si la variación del momento cinético de un sistema de dos partículas A y B, con el tiempo es cero , implica que :

a) LOS VECTORES DE POSICIÓN RELATIVOS DE LAS PARTÍCULAS EN DICHO SISTEMA TIENEN EL MISMO SENTIDO QUE SUS ACELERACIONES RELATIVAS
b) LAS FUERZAS ACTUANTES SON RADIALES
c) LAS FUERZAS ACTUANTES SÓLO ACTUAN ENTRE ELLAS
d) SU MOMENTO CINÉTICO NO DEPENDE DEL TIEMPO
e) LAS FUERZAS ACTUANTES TIENEN LA MISMA DIRECCIÓN

SOL:

Dado que , como se explicó en 3.4.30, $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \mu\left(\vec{a}_A - \vec{a}_B\right)$=0, dado que es un producto vectorial se anulará si el ángulo formado sea de 0, o 180º, por lo tanto basta que tengan la misma dirección.

Puesto que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \wedge m_1 \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2 \vec{a}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$ =0, también ocurriría si las fuerzas fueran radiales, puesto que ocurriría un caso similar.

3.4.31.* Si la variación del momento cinético interno, respecto al tiempo (d**L'**/dt), de un sistema de dos partículas A y B, es cero, quiere decir que :

a) SU MOMENTO CINÉTICO EN DICHO SISTEMA NO DEPENDE DEL TIEMPO
b) SU MASA REDUCIDA ES NULA
c) LAS FUERZAS EXISTENTES SÓLO ACTÚAN ENTRE DICHAS PARTÍCULAS
d) TODAS LAS PARTÍCULAS TIENEN LA MISMA ACELERACIÓN
e) LAS FUERZAS ACTUANTES ESTÁN ALINEADAS CON LOS VECTORES DE POSICIÓN EN DICHO SISTEMA

SOL:

Dado que , como se explicó en 3.4.30, $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \mu\left(\vec{a}_A - \vec{a}_B\right)$=0, basta con ue su masa reducida sea nula, lo cual es imposible, para que sea nula la variación. Sin embargo si todas las partículas tienen la misma aceleración, el segundo término se anularía, y con ello toda la expresión.

Dado que por otra parte $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{r}_1{}' \wedge m_1 \vec{a}_1{}' + \vec{r}_2{}' \wedge m_2 \vec{a}_2{}'$, Si F_1 y F_2, tienen la misma dirección que los vectores de posición, también se anularía el producto vectorial al ser seno 0º o seno de 180º =0.

Por lo tanto las propuestas a y c son falsas, la b imposible, y sólo son válidas la d y la e.

3.4.32.* Dadas las partículas A y B, de masas respectivas 4 y 6 kg, con vectores de posición en un sistema de referencia de laboratorio $\vec{r}_A = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j}\ m$ y $\vec{r}_B = t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j}\ m$. Dirás que al cabo de 1s:

a) SU MOMENTO CINÉTICO INTERNO ES NULO

b) LA VARIACIÓN DE SU MOMENTO CINÉTICO INTERNO CON EL TIEMPO ES $-9{,}6\vec{k}\ m.N$

c) EL MOMENTO CINÉTICO DE SU CENTRO DE MASAS SUPUESTA ALLÍ, TODA LA MASA ES $-10\vec{k}\ m^2.kg.s^{-1}$

d) LA VARIACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO CON EL TIEMPO ES $-9{,}6\vec{k}\ m.N$

e) LA VARIACIÓN DEL MOMENTO CINÉTICO DEL CENTRO DE MASAS CON EL TIEMPO ES $-10{,}4\vec{k}\ m.N$

SOL:

$\vec{L}' = \vec{r}_A^{\,'} \wedge m_A(\vec{v}_A - \vec{v}_{CM}) + \vec{r}_B^{\,'} \wedge m_B(\vec{v}_B - \vec{v}_{CM})$ **o** $\vec{L}' = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$ **(3.4.24)**

$\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = \mu = \frac{24}{10} = 2{,}4\,kg$; $\vec{r}_A = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j}\ m$ $\quad \vec{r}_B = t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j}\ m$; $\vec{r}_A - \vec{r}_B = (t^2 - t)\,\vec{i} + (t + t^2)\vec{j}\ ms^{-1}$; Para t=1s $\vec{r}_A - \vec{r}_B = 2\,\vec{j}\ m$,

$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = 2t\vec{i} + \vec{j}\ ms^{-1} \quad \vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{i} - 2t\vec{j}\ ms^{-1}$

$\vec{v}_A - \vec{v}_B = (2t-1)\,\vec{i} - (1-2t)\,\vec{j}\ ms^{-1}$ Para t=1s; $\vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{i} + \vec{j}\ ms^{-1}$,

cuyo módulo es $\sqrt{2}\ ms^{-1}$

$\vec{L}' = (2\vec{j}\,) \wedge 2{,}4(\vec{i} + \vec{j}) = -4{,}8\,\vec{k}\ m^2kg.s^{-1}$; $\quad \vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge (m_A + m_B)\vec{v}_{CM}$

$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} = \frac{4.(t^2\vec{i} + t\,\vec{j}) + 6.(t\,\vec{i} - t^2\vec{j})}{10} = (0{,}4t^2 + 0{,}6t)\vec{i} + (0{,}4t - 0{,}6t^2)\,\vec{j}\ m$. Para t=1s; $\vec{r}_{CM} = \vec{i} - 0{,}2\,\vec{j}\ m$

$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = (0{,}9t + 0{,}6)\vec{i} + (0{,}4 - 1{,}2t)\,\vec{j}\ ms^{-1}$ Para t=1s , $\vec{v}_{CM} = 1{,}4\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j}\ ms^{-1}$

$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \wedge (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = (\vec{i} - 0{,}2\,\vec{j}) \wedge 10(1{,}4\vec{i} - 0{,}8\vec{j}) = -10\vec{k}\ m^2.kg.s^{-1}$

$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{r}_A{}' \wedge m_A\vec{a}_A{}' + \vec{r}_B{}' \wedge m_B\vec{a}_B{}'$ **.** Para t=1s

$\vec{r}_A^{\,'} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CM}$; Como $\vec{r}_{CM} = \vec{i} - 0{,}2\vec{j}\ m$ y $\vec{r}_A = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}\ m$ $\quad \vec{r}_A^{\,'} = 1{,}2\,\vec{j}\ m$

$\vec{r}_B^{\,'} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CM}$ y $\vec{r}_B = t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}\ m$ $\quad \vec{r}_B^{\,'} = -0{,}8\vec{j}\ m$

$\vec{v}_A^{\,'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM}$, como $\vec{v}_{CM} = (0{,}9t + 0{,}6)\vec{i} + (0{,}4 - 1{,}2t)\,\vec{j}\ ms^{-1}$ y $\vec{v}_A = 2t\vec{i} + \vec{j}\ ms^{-1}$

$\vec{v}\,'_A = (1{,}1t - 0{,}6)\vec{i} + (0{,}6 + 1{,}2t)\,\vec{j}\ ms^{-1}$ $\vec{a}\,'_A = \frac{d\vec{v}\,'_A}{dt} = 1{,}1\,\vec{i} + 1{,}2\,\vec{j}\ ms^{-2}$

$\vec{v}_B^{\,'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM}$, $\vec{v}_B = \vec{i} - 2t\vec{j}\ ms^{-1}$; $\vec{v}\,'_B = (0{,}1t - 0{,}6)\vec{i} - (0{,}4 + 0{,}8t)\,\vec{j}\ ms^{-1}$; $\vec{a}\,'_B = 0{,}1\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j}\ ms^{-2}$

$\frac{d\vec{L}'}{dt} = 1{,}2\,\vec{j} \wedge 4(1{,}1\,\vec{i} + 1{,}2\,\vec{j}) + 0{,}8\,\vec{j} \wedge 6(0{,}1\,\vec{i} - 0{,}8\,\vec{j}) = -9{,}6\,\vec{k}\ m.N$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_A \wedge m_A\vec{a}_A + \vec{r}_B \wedge m_B\vec{a}_B = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B$ **.** Para t=1s

$\vec{r}_A = \vec{i} + \vec{j}\ m$; $\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = 2\,\vec{i}\ ms^{-2}$; $\vec{r}_B = \vec{i} - \vec{j}\ m$; $\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = -2\,\vec{j}\ ms^{-2}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{i} + \vec{j}) \wedge 4(2\,\vec{i}\,) + (i - \vec{j}) \wedge 6(-2\,\vec{j}) = (-8\vec{k} - 12\vec{k}) = -20\vec{k}\ m.N$

$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{r}_{CM} \wedge m_A\vec{a}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_B\vec{a}_{CM}$ **.** Para t=1s

$\vec{r}_{CM} = \vec{i} - 0{,}2\,\vec{j}\ m$; $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = 0{,}8\vec{i} - 1{,}2\,\vec{j}\ ms^{-2}$

$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = (\vec{i} - 0{,}2\,\vec{j}) \wedge 4(0{,}8\,\vec{i} - 1{,}2\,\vec{j}) + (i - 0{,}2\,\vec{j}) \wedge 6(0{,}8\vec{i} - 1{,}2\,\vec{j}) = -10{,}4\vec{k}\ mN$

3.4.33.* Si la variación del momento cinético del centro de masas con el tiempo de un sistema de dos partículas A y B es cero, es debido a que:

a) EL CENTRO DE MASAS TIENE UNA VELOCIDAD CONSTANTE
b) EL MOMENTO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LAS PARTÍCULAS EN EL SISTEMA DE LABORATORIO ES EL MISMO QUE EL QUE ACTÚA EN EL SISTEMA DEL CENTRO DE MASAS
c) LA ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASAS TIENE EL MISMO SENTIDO QUE SU VECTOR DE POSICIÓN
d) DICHO MOMENTO CINÉTICO ES CONSTANTE
e) NO ACTÚAN FUERZAS EXTERNAS SOBRE DICHO SISTEMA

SOL:

$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{r}_{CM} \wedge m_1\vec{a}_{CM} + \vec{r}_{CM} \wedge m_2\vec{a}_{CM}$. Se anularía si $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = 0$; $\vec{v}_{CM} = Constante$, tal como indica la primera propuesta. También se anularía si los vectores $\vec{a}_{CM}$ y $\vec{r}_{CM}$, tienen la misma dirección o sentido, por lo dicho en test anteriores y claro está si dicho momento es constante, o no actúan fuerzas externas, como indican las propuestas c,d y e.

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{L}'}{dt}$, puesto que $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$, pero $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = 0$, o sea que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}'}{dt}$, pero $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \wedge m_1\vec{a}_1 + \vec{r}_2 \wedge m_2\vec{a}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2$ **y** $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{r}_1' \wedge m_1\vec{a}_1' + \vec{r}_2' \wedge m_2\vec{a}_2'$, por lo tanto los momentos son iguales, como se propone en b.

3.4.34.* Dadas dos partículas A y B de masas 2M y 8M, con vectores de posición respectivos $\vec{r}_A = (t^2+2)\vec{i}\ m$ y $\vec{r}_B = 6\vec{i} - t^2\vec{j}\ m$, podrás asegurar que :

a) LA ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA DEL CENTRO DE MASAS ES UNA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN
b) LA HODÓGRAFA DEL CENTRO DE MASAS ES UNA RECTA CON PENDIENTE 4,5
c) LA ENERGÍA CINÉTICA INTERNA DEL SISTEMA AL CABO DE UN SEGUNDO ES 6,4M JULIOS
d) AMBAS PARTÍCULAS SE ENCUENTRAN AL CABO DE 2 SEGUNDOS
e) EN EL INSTANTE EN QUE SE ENCUENTRAN LA ENERGÍA CINÉTICA INTERNA DE A ES IGUAL A LA DE B

SOL:

Se calcula el vector de posición del centro de masas :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_{BC}}{m_A + m_B} = \frac{2M.(t^2+2)\vec{i} + 8M.(6\vec{i} + t^2\vec{j})}{10M} = (0{,}2t^2 + 5{,}2)\vec{i} + 0{,}8t^2\vec{j}\ m$$

Cuyas ecuaciones paramétricas serán x = $0{,}2t^2+5{,}2$; y = $0{,}8t^2$.

Como $0{,}2t^2$ = x-5,2 ; y = 4(x-5,2) = 4x-20,8 , corresponden a una recta con pendiente 4, y punto de corte del eje Y, y =-20,8.

La velocidad del centro de masas $\vec{v}_{CM} = \frac{d\,\vec{r}_{CM}}{dt} = 0{,}4t\vec{i} + 1{,}6t\vec{j}\ ms^{-1}$

La ecuación de la hodógrafa se obtiene de las componentes de la velocidad.

Así v_x=0,4t ;v_y=1,8t ; t=v_x/0,4 ; v_y=1,8v_x/0,4 =4,5v_x , que corresponde a una recta con pendiente 4,5 como se propone en b.

La energía cinética interna, o energía cinética de las partículas en el sistema del centro de masas

$E_C' = \frac{2M}{2}|\vec{v}'_A|^2 + \frac{8M}{2}|\vec{v}'_B|^2$ o $Ec'_{A+B} = \frac{\mu}{2}(|\vec{v}_A - \vec{v}_B|)^2$ siendo $\mu = \frac{16M^2}{10M} = 1{,}6M$

Para calcular las velocidades :

$\vec{r}_A' = \vec{r}_A - \vec{r}_{CM}$; $\vec{r}_A' = (t^2+2)\vec{i} - \left(0{,}2t^2 + 5{,}2)\vec{i} + 0{,}8t^2\vec{j}\right) = (0{,}8t^2 - 3{,}3)\vec{i} - 0{,}8t^2\vec{j}\ m$

Como $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$; $\vec{v}_A' = 1{,}6t\vec{i} - 1{,}6t\vec{j}\ ms^{-1}$

$\vec{r}_B' = \vec{r}_B - \vec{r}_{CM}$:$\vec{r}_B' = (6\vec{i} - t^2\vec{j} - \left(0{,}2t^2 + 5{,}2)\vec{i} + 0{,}8t^2\vec{j}\right) = (-0{,}2t^2 + 0{,}8)\vec{i} + 0{,}2t^2\vec{j}\ m$

$\vec{v}_B = -0{,}4t\vec{i} + 0{,}4t\vec{j}\ ms^{-1}$ y Al cabo de 1s, $\vec{v}_A' - \vec{v}_B' = 2t\vec{i} - 2t\vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j}\ ms^{-1}$, siendo su módulo $|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}\ ms^{-1}$, de lo que la energía ciética interna :

$$Ec'_{A+B} = \frac{\mu}{2}\left(\left|\vec{v}_A - \vec{v}_B\right|\right)^2 = \frac{1{,}6M.\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2} = 6{,}4M\ J\ ,$$ como indica c.

Para que se encuentren se deberá cumplir que $\vec{r}_A = \vec{r}_B$,o sea $(t^2+2)\vec{i} \ = 6\vec{i} - t^2\vec{j}$ lo cual es imposible, por lo tanto no se producirá el encuentro. El que pudieran ser iguales $\vec{r}_A = \vec{r}_B$, y por lo tanto los vectores de posición en el referencial del centro de masas, no implica que las energías cinéticas internas lo sean, pues también dependen de las masas, sólo cuando $m_A = m_B$, serían iguales Por lo cual las soluciones d y e son erróneas.