

Un circuito con entrada y salida.

Introducción

Se dispone un circuito que consiste en dos condensadores iguales C y dos resistencias iguales R , dispuestas como indica la figura 1 (ver la fotografía 1) A la izquierda está situado un transformador que provoca una caída de tensión eficaz U_E que se registra en el multímetro de color negro. A la derecha se sitúa un multímetro que mide la caída de tensión eficaz U_S . En el experimento los dos condensadores son fijos, en cambio las resistencias son variables. Experimentalmente se busca la relación U_S/U_E en función de la resistencia R . La curva experimental se compara con los valores de la parte real de la impedancia del sistema.

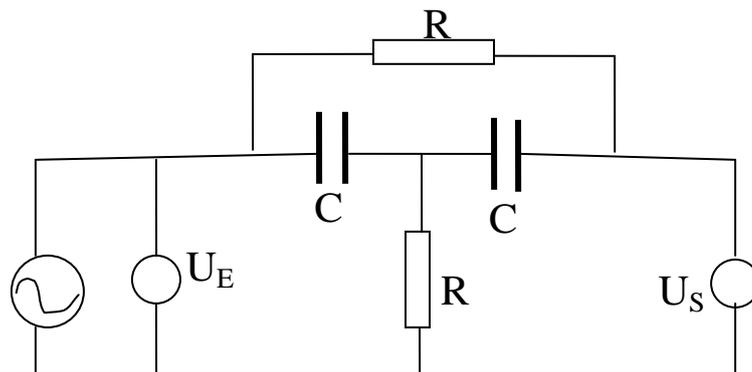
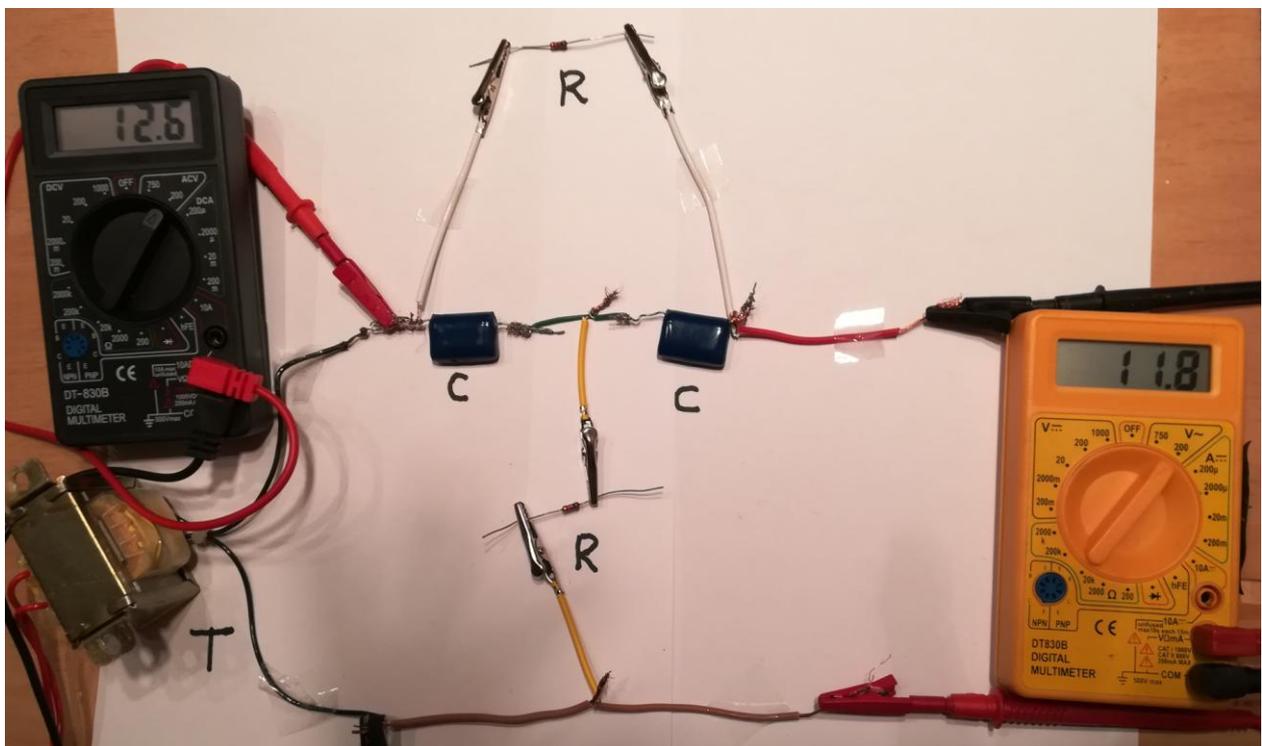


Fig.1



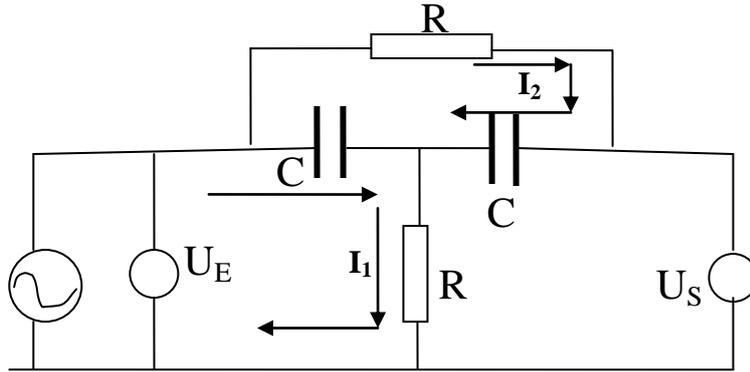
Fotografía 1.- El transformador reductor está señalizado con la letra T , el primario está unido a un voltaje de 250 V y frecuencia 50 Hz(no aparece en la fotografía). El voltaje eficaz de entrada vale en esta fotografía $U_E = 12,6$ V y el voltaje de salida $U_S = 11,8$ V. Las dos resistencias deben ser iguales, sin embargo hay veces que las dos resistencias comerciales difieren algo en su valor, entonces se utiliza como R la media aritmética de los dos valores.

Material

Un juego amplio de resistencias (comprendidas entre 100Ω y 15000Ω)
 Dos multímetros
 Dos condensadores no electrolíticos de $1 \mu\text{F}$ cada uno
 Un transformador reductor 220- 14 V o parecido

Análisis del circuito

Las magnitudes escritas en negritas son magnitudes complejas.



$$\text{Malla superior} \quad \mathbf{I_2 R} + \mathbf{I_2 X_C} + (\mathbf{I_2} - \mathbf{I_1}) \mathbf{X_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mathbf{I_1 X_C} + \mathbf{I_2 (R + 2X_C)} = 0$$

$$\text{Malla inferior} \quad (\mathbf{I_1} - \mathbf{I_2}) \mathbf{X_C} + \mathbf{I_1 R} = \mathbf{U_E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I_1 (X_C + R)} - \mathbf{I_2 X_C} = \mathbf{U_E}$$

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer

$$\mathbf{I_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{R + 2X_C} \\ \mathbf{U_E} & -\mathbf{X_C} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\mathbf{X_C} & \mathbf{R + 2X_C} \\ \mathbf{X_C + R} & -\mathbf{X_C} \end{vmatrix}}; \quad \mathbf{I_1} = \frac{-(\mathbf{R + 2X_C}) \mathbf{U_E}}{\mathbf{X_C}^2 - (\mathbf{R + 2X_C})(\mathbf{X_C + R})}$$

$$\mathbf{I_2} = \frac{\begin{vmatrix} -\mathbf{X_C} & 0 \\ \mathbf{X_C + R} & \mathbf{U_E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\mathbf{X_C} & \mathbf{R + 2X_C} \\ \mathbf{X_C + R} & -\mathbf{X_C} \end{vmatrix}}; \quad \mathbf{I_2} = \frac{-\mathbf{X_C U_E}}{\mathbf{X_C}^2 - (\mathbf{R + 2X_C})(\mathbf{X_C + R})}$$

$$\mathbf{U_S} = \mathbf{I_2 X_C} + \mathbf{I_1 R} = \frac{-\mathbf{X_C U_E X_C}}{\mathbf{X_C}^2 - (\mathbf{R + 2X_C})(\mathbf{X_C + R})} + \mathbf{R} \frac{-(\mathbf{R + 2X_C}) \mathbf{U_E}}{\mathbf{X_C}^2 - (\mathbf{R + 2X_C})(\mathbf{X_C + R})} \Rightarrow$$

$$\mathbf{U_S} = \frac{-\mathbf{X_C}^2 \mathbf{U_E} - \mathbf{R}^2 - 2\mathbf{R X_C U_E}}{\mathbf{X_C}^2 - (\mathbf{R + 2X_C})(\mathbf{X_C + R})} \Rightarrow \frac{\mathbf{U_S}}{\mathbf{U_E}} = \frac{-\mathbf{X_C}^2 - \mathbf{R}^2 - 2\mathbf{R X_C}}{-\mathbf{X_C}^2 - \mathbf{R}^2 - 3\mathbf{X_C R}} = \frac{\mathbf{X_C}^2 + \mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R X_C}}{\mathbf{X_C}^2 + \mathbf{R}^2 + 3\mathbf{X_C R}}$$

$$\mathbf{X}_C = -\frac{1}{C\omega} \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{X}_C^2 = \left(-\frac{1}{C\omega} \mathbf{j}\right) \cdot \left(-\frac{1}{C\omega} \mathbf{j}\right) = -\frac{1}{C^2\omega^2}$$

\mathbf{X}_C^2 no es una magnitud compleja . La expresión del cociente de los voltajes de salida y entrada lo escribimos siendo $A = \mathbf{X}_C^2 + R^2$

$$\begin{aligned} \frac{U_S}{U_E} &= \frac{A + 2R \mathbf{X}_C}{A + 3R \mathbf{X}_C} \Rightarrow \frac{U_S}{U_E} = \frac{(A + 2R \mathbf{X}_C)(A - 3R \mathbf{X}_C)}{(A + 3R \mathbf{X}_C)(A - 3R \mathbf{X}_C)} = \frac{A^2 - 3R A \mathbf{X}_C + 2R A \mathbf{X}_C - 6R^2 \mathbf{X}_C^2}{A^2 - 9R^2 \mathbf{X}_C^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{U_S}{U_E} = \frac{A^2 - R(\mathbf{X}_C^2 + R^2) \mathbf{X}_C - 6R^2 \mathbf{X}_C^2}{(\mathbf{X}_C^2 + R^2)^2 - 9R^2 \mathbf{X}_C^2} = \frac{\mathbf{X}_C^4 + R^4 - 4R^2 \mathbf{X}_C^2 - (R \mathbf{X}_C^2 + R^3) \mathbf{X}_C}{\mathbf{X}_C^4 + R^4 - 7R^2 \mathbf{X}_C^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

La parte real de la impedancia es:

$$\begin{aligned} \text{P.R.} &= \frac{\mathbf{X}_C^4 + R^4 - 4R^2 \mathbf{X}_C^2}{\mathbf{X}_C^4 + R^4 - 4R^2 \mathbf{X}_C^2} = \frac{\frac{1}{C^4\omega^4} + R^4 + \frac{4R^2}{C^2\omega^2}}{\frac{1}{C^4\omega^4} + R^2 + \frac{7R^2}{C^2\omega^2}} = \frac{\frac{1}{10^{-24} \cdot (2\pi 50)^4} + R^4 + \frac{4}{10^{12} \cdot (2\pi 50)^2} R^2}{\frac{1}{10^{-24} \cdot (2\pi 50)^4} + R^2 + \frac{7}{10^{12} \cdot (2\pi 50)^2} R^2} \Rightarrow \\ &\text{P.R.} = \frac{1,0266 \cdot 10^{14} + R^4 + 4,053 \cdot 10^7 R^2}{1,0266 \cdot 10^{14} + R^4 + 7,092 \cdot 10^7 R^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Si representamos P.R. frente a R obtenemos una curva (la cual compararemos con los valores experimentales de U_S/U_E). Veamos si la curva citada presenta un máximo o un mínimo, para ello derivamos la función P.R. frente a R e igualamos a cero.

Para mayor comodidad en la operación escribimos la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{P.R.} &= \frac{a + R^4 + bR^2}{a + R^4 + cR^2} \Rightarrow \frac{d(\text{P.R.})}{dR} = \frac{(a + R^4 + cR^2)(4R^3 + 2bR) - (a + R^4 + bR^2)(4R^3 + 2cR)}{(a + R^4 + cR^2)^2} = 0 \\ 4aR^3 + 2abR + 4R^7 + 2bR^5 + 4cR^5 + 2bcR^3 &= 4aR^3 + 2acR + 4R^7 + 2cR^5 + 4bR^5 + 2bcR^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2abR + 2bR^5 + 4cR^5 &= 2acR + 2cR^5 + 4bR^5 \Rightarrow R^4(2b + 4c - 2c - 4b) = 2a(c - b) \Rightarrow \\ \Rightarrow R^4 &= \frac{2a(c - b)}{2c - 2b} = a \Rightarrow R = a^{\frac{1}{4}} = (1,0266 \cdot 10^{14})^{\frac{1}{4}} = 3183 \Omega \end{aligned}$$

Este valor de R es $\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{10^{-6} \cdot 2\pi 50} = 3183 \Omega$

Medidas experimentales

1.- Monte el circuito de la fotografía 1. Las resistencias R deben ser iguales o al menos parecidas. Debe medirlas con uno de los multímetros. Empiece con resistencias del orden de 100 o 200 ohmios y termine con unos valores próximos a 15000 ohmios. Para cada resistencia anote los valores de U_E y U_S , calcule el cociente U_S/U_E . Recoja los valores en una tabla.

2.- Con ayuda de una hoja de cálculo de valores a R en la ecuación (1).y calcule PR .

3.- Represente en la misma gráfica 1) R en el eje de abscisas frente a U_S/U_E en ordenadas. 2) PrR en ordenadas frente a R en abscisas.

Compruebe si hay concordancia en el valor del mínimo experimental con el obtenido teóricamente.