

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

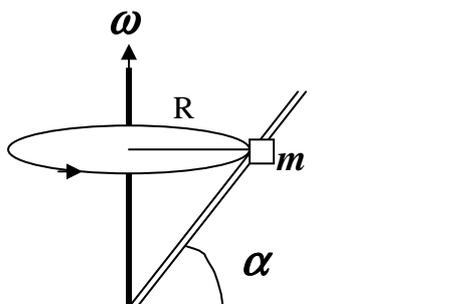
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

8ª OLIMPIADA DE FÍSICA. REPÚBLICA DEMOCRÁTICA ALEMANA . 1975

1.-Una varilla da vueltas en torno de un eje vertical con una velocidad angular constante ω . En su giro, la varilla forma un ángulo constante con la dirección horizontal de α grados, tal como indica la figura inferior.



Una pequeña masa m puede deslizar a lo largo de la varilla siendo el coeficiente de rozamiento μ . ¿Cuál es la condición para que la masa m se mantenga a una altura fija sobre el suelo durante la rotación de la varilla?

8ª Olimpiada Internacional de Física. República Democrática Alemana - 1975

Las fuerzas que actúan sobre la masa m , analizadas desde un sistema no inercial ligado a la propia varilla son las indicadas en la figura 1

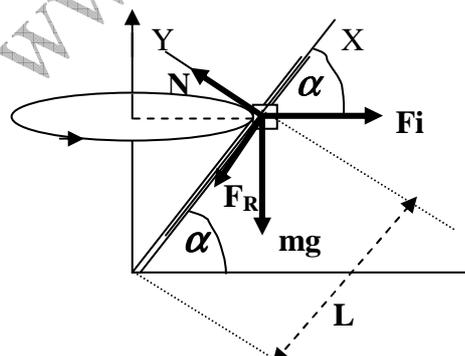


Fig. 1

El sistema de referencia XY se halla ligado a la propia varilla. F_i es la fuerza de inercia de sentido contrario a la aceleración de la varilla y que aparece debido a que el análisis del problema se hace desde un sistema no inercial.

1) Supongamos que la masa m puede moverse en sentido ascendente por la varilla. La fuerza de rozamiento, F_R , actúa hacia abajo.

Si la masa m está en equilibrio respecto de la varilla, también lo está respecto del sistema XY y por tanto la suma de las fuerzas debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} F_i \cos \alpha - \mu N - mg \sin \alpha = 0 \\ N - F_i \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \end{array} \right\} F_i \cos \alpha - \mu (mg \cos \alpha + F_i \sin \alpha) - mg \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

La fuerza de inercia que actúa sobre la masa es igual a $m \cdot \text{aceleración de la varilla}$, siendo la aceleración de la varilla la aceleración centrípeta, de valor

$$\omega^2 \cdot \text{radio} = \omega^2 \cdot L \cos \alpha$$

llevando esta relación a (1)

$$m \omega^2 L \cos \alpha - \mu (mg \cos \alpha + m \omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha) - mg \sin \alpha = 0$$

Llamamos a la solución de la ecuación anterior $L = L_1$

$$L_1 = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m \omega^2 \cos \alpha + \mu m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} * \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{1 + \mu \sin \alpha}$$

2) Si para la posición indicada en la figura 1 la fuerza de rozamiento tuviese sentido contrario al dibujado, lo cual significa que la masa m tiende a deslizarse hacia abajo de la varilla, el desarrollo matemático es similar salvo un cambio de signo y el resultado final es;

$$L_2 = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + \mu \sin \alpha}$$

Los valores de L comprendidos entre L_1 y L_2 , siendo $L_1 > L_2$, son aquellos para los que la masa m permanece en posición fija sobre la varilla.

2.-Buscar las condiciones para las que una lente gruesa tiene la misma distancia focal para dos longitudes de onda diferentes. Discutir el problema con los distintos tipos de lentes.

8ª Olimpiada Internacional de Física. República Democrática Alemana – 1975

Debemos deducir en primer lugar cuál es la distancia focal de una lente gruesa en función del índice de refracción de la lente, n , del espesor, d , y de los radios de curvatura R_1 y R_2 .

Analizamos en primer lugar la refracción de la luz en una superficie curva que separa el aire ($n=1$) de un material de índice de refracción n (figura 1). Los razonamientos solamente son válidos en la zona paraxial.

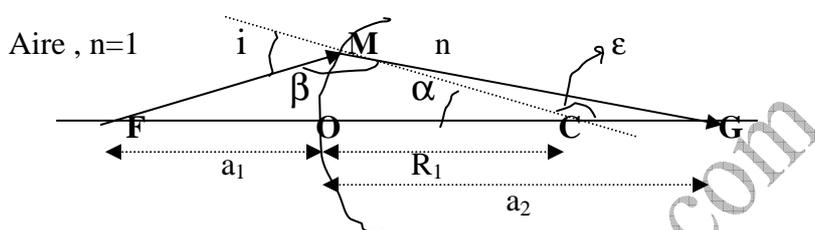


Fig. 1

$OC =$ Radio de la superficie de separación $= R_1$, $i =$ ángulo de incidencia, $r =$ ángulo de refracción, $OF = a_1$, $OG = a_2$, $\text{sen } i = \text{sen } \beta$, $\text{sen } \alpha = \text{sen } \varepsilon$

Las distancias se toman desde la superficie curva, y hacia la izquierda son negativas y hacia la derecha positivas

$$\left. \begin{array}{l} \text{En el triángulo FMC} \quad \frac{\text{sen } i}{-a_1 + R_1} = \frac{\text{sen } \alpha}{MF} \\ \text{En el triángulo CMG} \quad \frac{\text{sen } \varepsilon}{MG} = \frac{\text{sen } \alpha}{a_2 - R_1} \end{array} \right\} \frac{\text{sen } i * MF}{-a_1 + R_1} = \frac{\text{sen } r * MG}{a_2 - R_1}$$

Teniendo en cuenta la ley de Snell : $1 \text{ sen } i = n \text{ sen } r$ y que al estar en la zona paraxial podemos escribir que $MF = -a_1$ y $MG = a_2$, resulta

$$\frac{-na_1}{-a_1 + R_1} = \frac{a_2}{a_2 - R_1} \quad (1)$$

si $a_1 = \infty$; $a_2 = f_1^i$ siendo f_1^i la distancia focal imagen

.De la expresión (1)
$$f_1^i = \frac{nR_1}{n-1} \quad (2)$$

si $a_2 = \infty$, $a_1 = f_1^o$ siendo f_1^o la distancia focal objeto

De la expresión (1) resulta: $f_1^o = -\frac{R_1}{n-1}$ (3)

Si ahora suponemos que vamos del medio de índice de refracción n al aire a través de una superficie curva como la de la figura 2. R_2 designa al radio de esa superficie

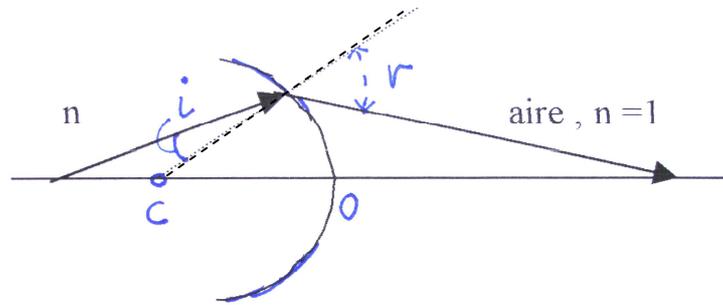


Fig 2

Haciendo el mismo razonamiento que anteriormente se llega a:

$$f_2^i = -\frac{R_2}{n-1} \quad (4) \quad f_2^o = \frac{nR_2}{n-1} \quad (5)$$

Una lente biconvexa gruesa que está en el aire está formada por dos superficies esféricas tal como indica la figura 3.

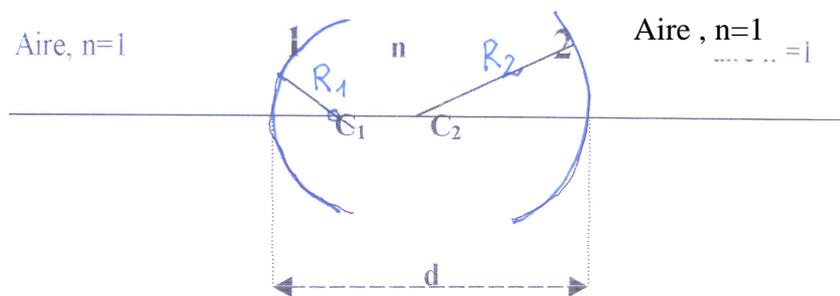


Fig 3

Vamos a hallar la distancia focal de la lente gruesa para ello hacemos uso de que los planos principales objeto e imagen son para cada superficie uno solo y que en la figura 4 aparecen representados mediante líneas rectas.

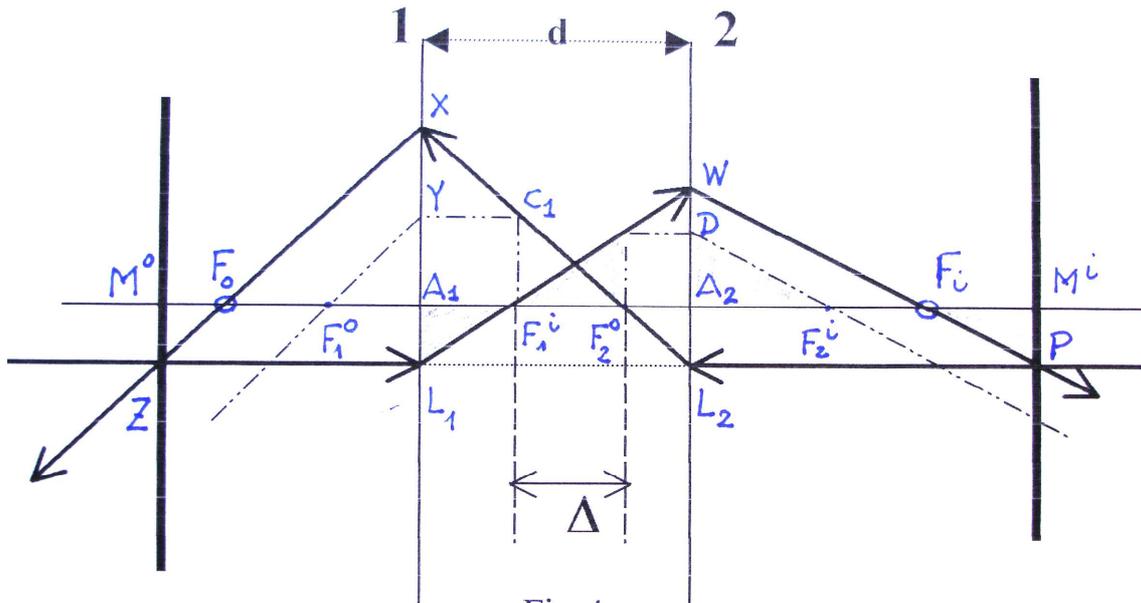


Fig 4

$\Delta = d - f_1^i + f_2^o$; $A_1F_1^o = f_1^o$, distancia focal objeto del sistema 1

$A_1F_1^i = f_1^i$, distancia focal imagen del sistema 1 , $A_2F_2^o = f_2^o$, distancia focal objeto del sistema 2 ; $A_2F_2^i = f_2^i$, distancia focal imagen del sistema 2

$M^oF_o = F^o$, distancia focal objeto de la lente gruesa $M^iF_i = F^i$, distancia focal imagen de la lente gruesa

El rayo PL_2 llega al sistema 2 y pasa por el foco F_2^o del sistema 2 y llega al plano principal del sistema 1 en el punto X. El punto C_1 pertenece al plano focal imagen del sistema 1, si de él sale un rayo paralelo al eje atraviesa el sistema 1 pasando por F_1^o . El rayo C_1X que es el mismo que L_2X procede de C_1 y ha de salir paralelo al YF_1^o ya que ambos proceden del mismo punto C_1 que está en el plano principal imagen del sistema 1.

El rayo ZL_1 paralelo al eje principal atraviesa el sistema 1 pasando por el foco F_1^i y llega al plano principal del sistema 2 en el punto W. El rayo C_2D procede del plano principal del sistema 2 y lo atraviesa pasando por el foco F_2^i , el rayo C_2W que es el mismo que L_1W atraviesa el sistema 2 y sale paralelo al DF_2^i puesto que ambos proceden de C_2 que es un punto del plano principal objeto del sistema 2.

El punto F_o es el foco objeto de la lente gruesa y F_i es el foco imagen de la misma lente. Los planos principales son M^oZ y M^iP , dibujados en la figura con trazo más grueso.

Al comparar los triángulos $A_1L_1F_1^i$ y $F_1^iF_2^oC_2$ resulta: $\frac{-A_1L_1}{f_1^i} = \frac{F_2^oC_2}{\Delta}$

Al comparar los triángulos $A_2DF_2^i$ y F_iM^iP resulta:

$$\frac{A_2 D = F_2^o C_2}{f_2^i} = \frac{-M^i P = -A_1 L_1}{-F_i} \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones (6) y (7) resulta $\frac{1}{F_i} = -\frac{\Delta}{f_1^i f_2^i}$ (8)

Si en la ecuación (8) sustituimos los valores de las distancias focales por (2) y (4) y el valor $\Delta = d - f_1^i + f_2^o$ y a su vez las distancias focales por (2) y (5) resulta:

$$\frac{1}{F_i} = -\frac{d - \frac{nR_1}{n-1} + \frac{nR_2}{n-1}}{\frac{nR_1}{n-1} * \left(-\frac{R_2}{n-1}\right)} \Rightarrow \frac{1}{F_i} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1 R_2} \right] \quad (9)$$

La expresión (9) corresponde a la distancia focal imagen de una lente gruesa de espesor d . Cuando la lente es delgada $d = 0$.

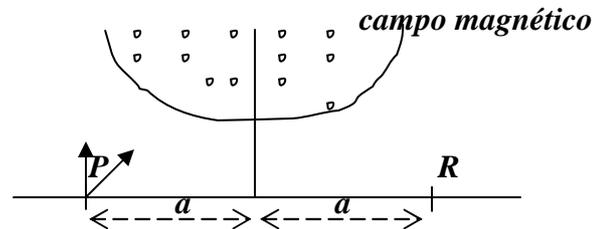
La lente tiene un índice de refracción que es función de la longitud de onda que la atraviese. Llamamos n_a y n_b los índices de refracción de la lente para dos longitudes de onda diferentes y aplicamos la condición del problema que establece que las distancias focales sean iguales

$$\begin{aligned} (n_a - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{n_a - 1}{n_a} \frac{d}{R_1 R_2} \right] &= (n_b - 1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{n_b - 1}{n_b} \frac{d}{R_1 R_2} \right] \\ \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] (n_a - 1 - n_b + 1) &= \frac{d}{R_1 R_2} \left[\frac{(n_a - 1)^2}{n_a} - \frac{(n_b - 1)^2}{n_b} \right] \\ (R_2 - R_1)(n_a - n_b) &= d \left[\frac{(n_a - 1)^2}{n_a} - \frac{(n_b - 1)^2}{n_b} \right] \Rightarrow R_1 - R_2 = d \left(1 - \frac{1}{n_a n_b} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

El segundo término de la ecuación (10) es positivo

- Cualquier lente que tenga una cara plana no puede cumplir la ecuación (10) ya que uno de los radios es infinito
- En una lente biconvexa R_1 es positivo y R_2 negativo, su suma es positiva y puede cumplir la ecuación (10)
- En una lente bicóncava R_1 es negativo y R_2 positivo, luego no puede cumplir la ecuación (10)
- En una lente convexo-cóncava, R_1 es positivo y R_2 es negativa, si en valores absolutos $R_1 > R_2$ el resultado es positivo y puede cumplir la ecuación (10)

3.- Desde un punto P sale un haz de iones, todos con la misma masa y carga y con la misma velocidad v en todas las direcciones (ver figura inferior) Un campo magnético B uniforme y perpendicular al plano del papel, los debe juntar en el punto $PR = 2a$. Sus trayectorias deben ser simétricas con relación al eje. Determinar los límites del campo magnético



8ª Olimpiada Internacional de Física. República Democrática Alemana. 1975

Si una partícula de carga q penetra en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme con una velocidad v sufre una fuerza magnética $F = qvB$, que es precisamente la fuerza centrípeta que necesita la partícula para describir una circunferencia

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

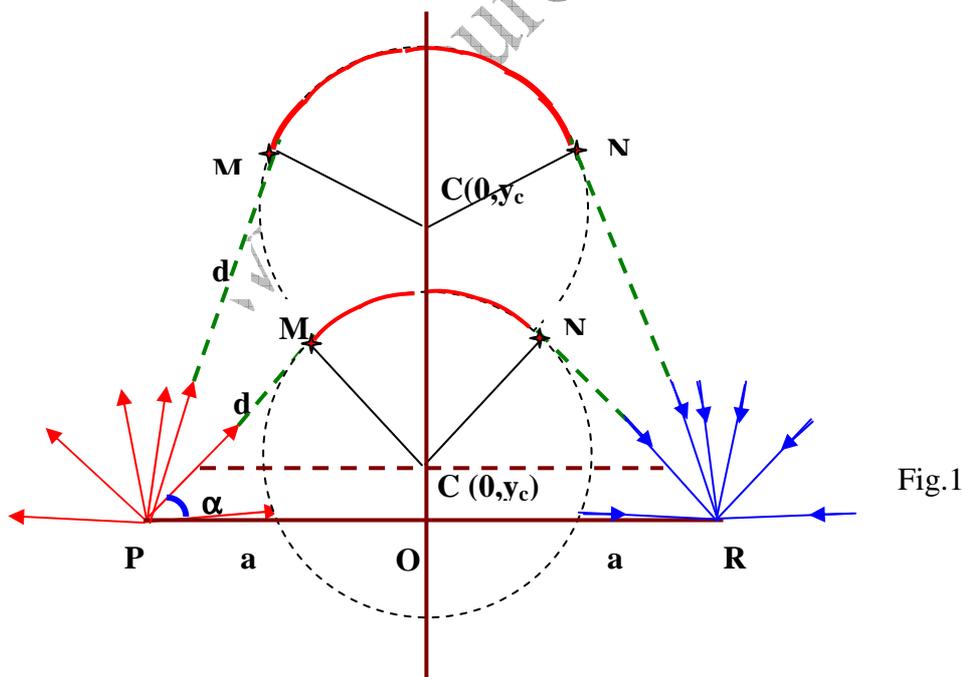


Fig.1

De la expresión (1) se deduce que al ser todos los términos iguales para los iones el valor del radio de la circunferencia es constante. En la figura 1 se observa que un ión abandona P formando su velocidad v un ángulo α con el eje horizontal, llega al campo en el punto M , dentro de él describe un arco de circunferencia, luego abandona el campo magnético y se dirige al punto R .

Con estas condiciones el punto P puede encontrarse dentro del campo B o fuera de él, la dirección del haz de iones puede tener una dirección dada por el ángulo α cuyo valor puede variar desde 0° hasta 180° . El radio de la circunferencia, como se ha visto depende de la velocidad v y del campo B, además de su carga y masa. Con todos estos condicionantes se puede hacer un razonamiento como el que sigue para tratar el problema propuesto:

Tomando como sistema de referencia la recta PR como eje OX y la mediatriz de PR como eje OY, el centro C de la circunferencia se encontrará en el eje OY y puede estar por arriba o por debajo de O, según sea la dirección del haz. Supongamos que P es exterior al campo B. La figura es simétrica respecto de OY.

La recta NR es tangente a la circunferencia descrita por el ión en el punto N de coordenadas (x,y) . El punto C es el centro de la circunferencia y sus coordenadas son $(0, y_c)$. La ecuación de dicha circunferencia es:

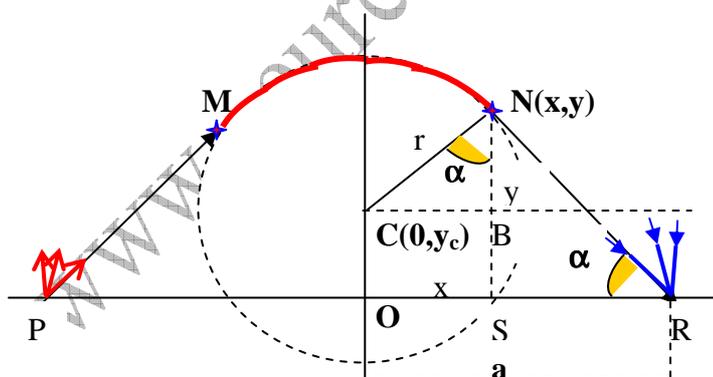
$$x^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \quad (2)$$

En el triángulo CNB (fig.2)

$$\cos\alpha = \frac{y - y_c}{r} \quad (3)$$

En el triángulo NSR (fig.2)

$$\cos\alpha = \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} \quad (4)$$



De (3) y (4) resulta:

Fig 2.

$$y - y_c = r \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} \text{ y esta expresión se sustituye en la ecuación (2)}$$

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{r^2(a-x)^2}{y^2 + (a-x)^2} = r^2 &\Rightarrow \frac{r^2(a-x)^2}{y^2 + (a-x)^2} = r^2 - x^2 \Rightarrow \frac{y^2}{r^2(a-x)^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2 - x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y^2}{r^2(a-x)^2} = \frac{1}{r^2 - x^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - r^2 + x^2}{r^2(r^2 - x^2)} &\Rightarrow y^2 = \frac{r^2(a-x)^2 x^2}{r^2(r^2 - x^2)} \Rightarrow y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Como se ve en estas expresiones la forma del perímetro del campo depende de a y de R . Se trata de una función que admite tratamiento por tanteos como el que sigue:

Si $a < R$, podemos suponer que $a = 6$ y $R = 5$ utilizando la hoja de cálculo podemos ver la forma del campo, fig 3. Si $a = 6$ $R = 6$, fig 4.

