

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXVII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. SINGAPUR. 2006

I.-LA GRAVEDAD EN UN INTERFERÓMETRO DE NEUTRONES

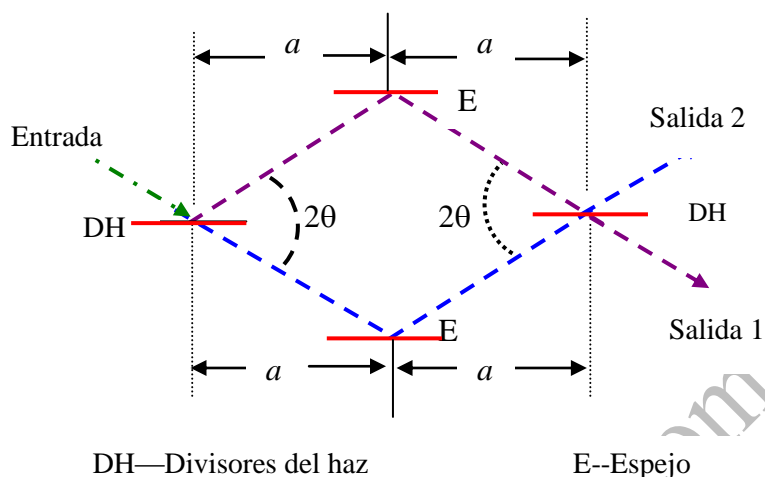


Fig.1a

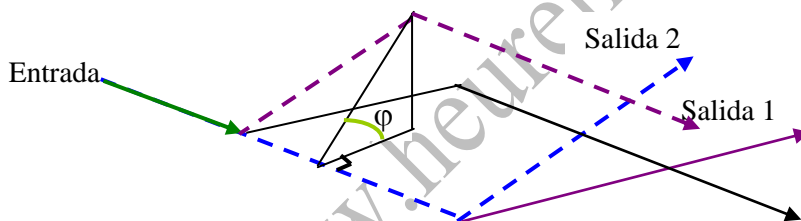


Fig. 1b

Situación física

Consideremos el famoso experimento de Collela, Overhauser y Werner con un interferómetro de neutrones, pero idealizado porque consideramos perfectos los divisores del haz de neutrones y los espejos dentro del interferómetro. El experimento estudia la influencia de la gravedad en las ondas de De Broglie de los neutrones.

La simbología utilizada en la figura 1 es análoga a la utilizada en un interferómetro óptico. Los neutrones ingresan el interferómetro por la "Entrada" y siguen los dos caminos mostrados. Los neutrones son detectados ya sea a la "Salida 1" o en la "Salida 2". Los dos caminos encierran un área en forma de rombo que es usualmente de unos cm^2 .

Las ondas de De Broglie de longitud de onda típica de 10^{-10} m interfieren de tal forma que todos los neutrones emergen del interferómetro a través de la “Salida 1” cuando el plano del interferómetro es horizontal. Cuando el interferómetro se rota un ángulo ϕ alrededor de un eje en la dirección del haz incidente de neutrones, se observa una redistribución de neutrones entre las “Salida 1” y “Salida 2” que depende al ángulo ϕ

Geometría

Cuando $\phi=0^\circ$ el plano del interferómetro es horizontal ; cuando $\phi=90^\circ$ el plano es vertical, con las salidas del interferómetro situadas por encima del eje de rotación.

1.1.- ¿Cuál es el valor del área A del rombo delimitada por los dos caminos de los neutrones en el interferómetro?

1.2.- ¿Cuál es la altura H de la “Salida 1” sobre el plano horizontal del eje de rotación?

Expresa A y H en función de a , θ y ϕ

Longitud del camino óptico

La longitud de camino óptico o simplemente camino óptico N_{opt} (valor numérico) es el cociente entre la longitud geométrica del camino (una distancia) y la longitud de onda λ . Si λ cambia a lo largo del camino, N_{opt} se calcula integrando λ^{-1} a lo largo del camino.

1.3.- ¿Cuál es la diferencia ΔN_{opt} entre los dos caminos ópticos cuando el interferómetro está girado un ángulo ϕ ? Expresa la respuesta en función de a , θ y ϕ , la masa del neutrón M , la longitud de onda de De Broglie λ_0 de los neutrones que llegan a la “Entrada”, la aceleración de la gravedad g , y la constante de Planck h .

1.4.- Defina el parámetro de volumen $V = \frac{h^2}{gM^2}$ y exprese ΔN_{opt} ,

únicamente en función de A , V , λ_0 y ϕ . Calcule el valor de V para los valores $M=1,675 \cdot 10^{-27}$ kg, $g=9,800$ ms⁻² y $h=6,626 \cdot 10^{-34}$ Js.

1.5.- ¿Cuántos ciclos (de alta intensidad a baja intensidad y de vuelta a alta intensidad) son completados por la “Salida 1” cuando ϕ aumenta de $\phi=-90^\circ$ a $\phi=90^\circ$?

Datos experimentales

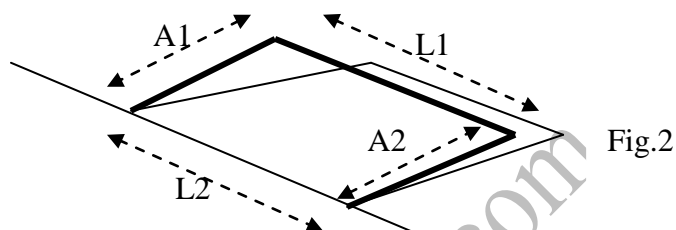
En un experimento real con un interferómetro caracterizado por los valores $a=3,600$ cm y $\phi=22,10^\circ$ se observan 19,00 ciclos completos

1.6.- ¿Cuál es el valor de λ_0 en el experimento?

1.7.- ¿Si se observan 30 ciclos completos en otro experimento del mismo tipo que utiliza neutrones con $\lambda_0=0,2000 \text{ nm}$, cuál es el valor del área A?

Ayuda: Si $|ax| \ll 1$, se puede sustituir $(1+x)^a$ por $1+ax$

Si nos fijamos en la figura 1a, los neutrones que por la “Entrada“ llegan al interferómetro, cuando el plano del mismo se encuentra en posición horizontal $\phi=0$, pueden recorrer dos caminos el superior y el inferior, pero en ambos están sometidos al mismo campo gravitatorio. Cuando el plano del interferómetro se rota un cierto ángulo ϕ , resulta que los neutrones ya no están sometidos en las mismas condiciones. Los que

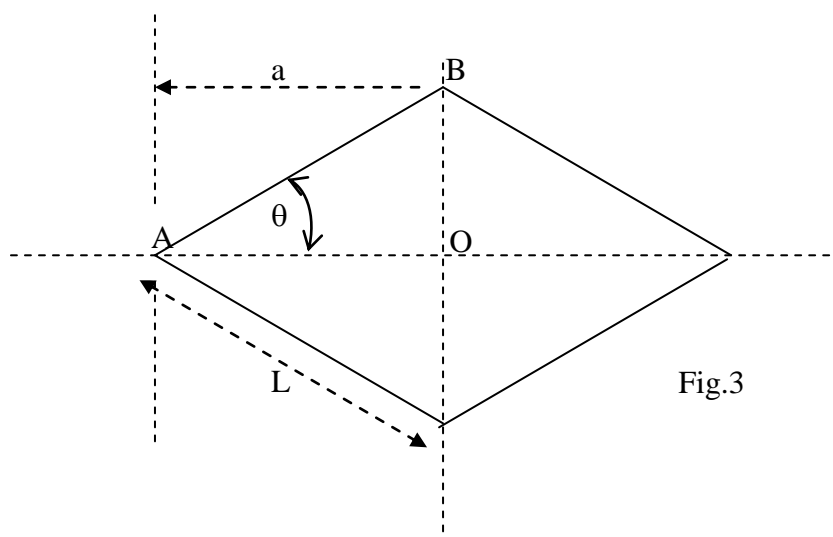


vayan por la parte superior de la figura 1b están sometidos a un campo gravitatorio diferente que los que lo hacen por el plano horizontal.

En la figura 2 se observa que los neutrones pueden seguir dos caminos A1 L1 y L2A2, siendo iguales las longitudes $L1 = L2$ y $A1 = A2$. Tanto por el camino A1 como por el A2 el campo gravitatorio para los neutrones es equivalente, no es así para L2 y L1 ya que L1 está a una altura H respecto de L2, esto es, respecto del plano horizontal y esa diferencia de alturas provoca un cambio en el campo gravitatorio respecto de L2, lo cual se traduce en que la longitud de onda de De Broglie de los neutrones cambia respecto de los que caminan por L2.

1.1 Cálculo del área A

En la figura 3 se observa el rombo que yace en un plano horizontal

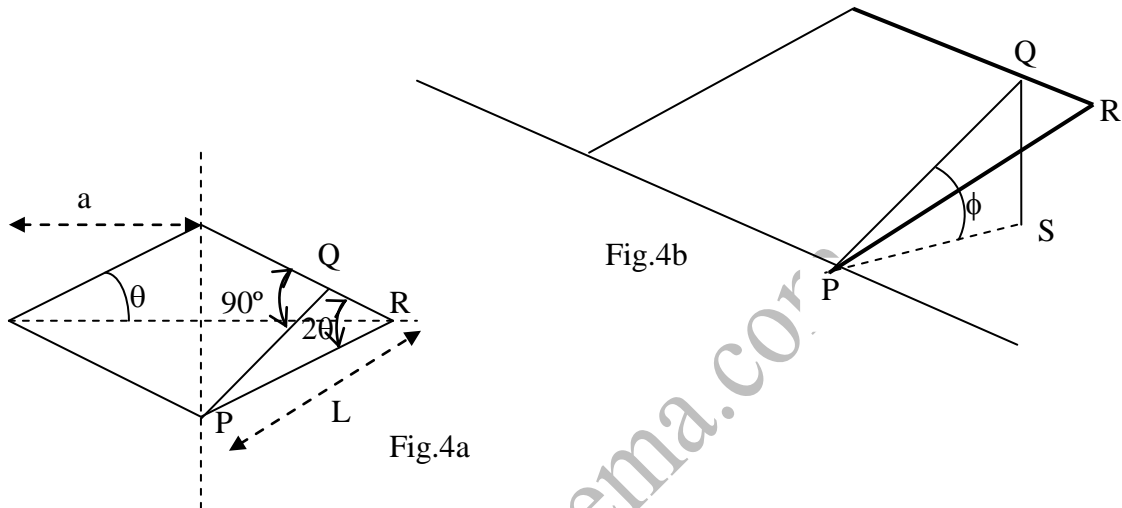


L designa la longitud de lado del rombo .El área del triángulo AOB es:

$$\frac{\overline{AO} * \overline{OB}}{2} = \frac{L \cos\theta * L \operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{a * \frac{a}{\cos\theta} \operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{a^2 \operatorname{tag}\theta}{2}$$

El área A de rombo es: $A = 4 * \frac{a^2 \operatorname{tag}\theta}{2} = 2a^2 \operatorname{tag}\theta$

1.1.Cálculo de la altura H



En la figura 4a el rombo se ha dibujado en su propio plano. PQR es un triángulo rectángulo cuyo lado en R vale 2θ y cuya hipotenusa $PR = L$, lado del rombo.

$$\overline{PQ} = L \operatorname{sen} 2\theta$$

En la figura 4b QS es la altura pedida H

$$\overline{QS} = H = \overline{PQ} \operatorname{sen}\phi = L \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \phi$$

Como $L = \frac{a}{\cos\theta}$, resulta para H

$$H = \frac{a}{\cos\theta} * 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{en}\theta \cdot \operatorname{sen}\phi = 2a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$$

1.3.Cálculo de ΔN_{opt}

λ_0 representa la longitud de onda de De Broglie de los neutrones que penetran por la entrada y siguen el camino $L_2 A_2$ y λ_1 los que siguen el otro camino.

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{L}{\lambda_1} = \frac{a}{\cos\theta \lambda_0} - \frac{a}{\cos\theta \lambda_1} = \frac{a}{\cos\theta} \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{a\lambda_0}{\cos\theta \lambda_0} \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta N_{\text{opt}} = \frac{a}{\cos\theta \lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)$$

Recordemos la hipótesis de De Broglie, según la cual, a toda partícula se le asocia una onda que cumple la relación

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

La energía cinética vale:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv * \frac{mv}{m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2\lambda^2 m}$$

Aplicando estas relaciones a los neutrones del interferómetro

$$\frac{1}{2} \frac{h^2}{\lambda_0^2 M} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\lambda_1^2 M} + MgH \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{2M^2 gH}{h^2} \Rightarrow 1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2} = \frac{2M^2 gH \lambda_0^2}{h^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \sqrt{1 - \frac{2M^2 gH \lambda_0^2}{h^2}}$$

Si hacemos uso de la aproximación del enunciado $(1+x)^\alpha$ por $1+ax$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 - \frac{gM^2 H \lambda_0^2}{h^2}$$

Llevando esta expresión a ΔN_{opt}

$$\Delta N_{opt} = \frac{a}{\cos \theta \lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) = \frac{a}{\cos \theta \lambda_0} \left(1 - 1 + \frac{gM^2 H \lambda_0^2}{h^2}\right) = \frac{agM^2 H \lambda_0}{h^2 \cos \theta}$$

Sustituyendo el valor de $H = 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$, en la expresión anterior

$$\Delta N_{opt} = \frac{agM^2 H \lambda_0}{h^2 \cos \theta} = \frac{agM^2 * 2a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi * \lambda_0}{h^2 \cos \theta} = \frac{2a^2 gM^2 \lambda_0}{h^2} \operatorname{tag} \theta \operatorname{sen} \phi$$

1.4. Parámetro $V = \frac{h^2}{gM^2}$

$$\Delta N_{opt} = \frac{2a^2 \lambda_0}{h^2} \operatorname{tag} \theta \operatorname{sen} \phi = \frac{2a^2 \lambda_0}{V} \operatorname{tag} \theta \operatorname{sen} \phi \Rightarrow \Delta N_{opt} = \frac{A \lambda_0 \operatorname{sen} \phi}{V}$$

$$V = \frac{h^2}{gM^2} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2 \text{ J}^2 \text{ s}^2}{9,800 \frac{\text{N}}{\text{kg}} * (1,675 \cdot 10^{-27})^2 \text{ kg}^2} = 1,597 \cdot 10^{-14} \text{ m}^3$$

1.5. Número de ciclos

Si la diferencia en el camino óptico ΔN_{opt} es un múltiplo entero 1,2,3habrá reforzamiento o aumento de la intensidad

Cuando sea 1 , $\text{sen}\phi = \frac{V}{\lambda_0 A}$

Cuando sea 2 , $\text{sen}\phi = \frac{2V}{\lambda_0 A}$

Cuando sea 3 , $\text{sen}\phi = \frac{3V}{\lambda_0 A}$

El valor máximo de $\text{sen}\phi$ es 1, cuando $\phi = 90^\circ$, entonces el valor entero es N' , es decir, el número de ciclos entre 0° y 90°

$$1 = \frac{N'V}{\lambda_0 A} \Rightarrow N' = \frac{\lambda_0 A}{V}$$

El número de ciclos entre 0° y -90° es el mismo, por tanto el número total es:

$$N = \frac{2\lambda_0 A}{V}$$

1.6 .Valor de λ_0 si $a = 3,600 \text{ cm}$ y $\theta = 22,10^\circ$, $N = 19,00$ ciclos

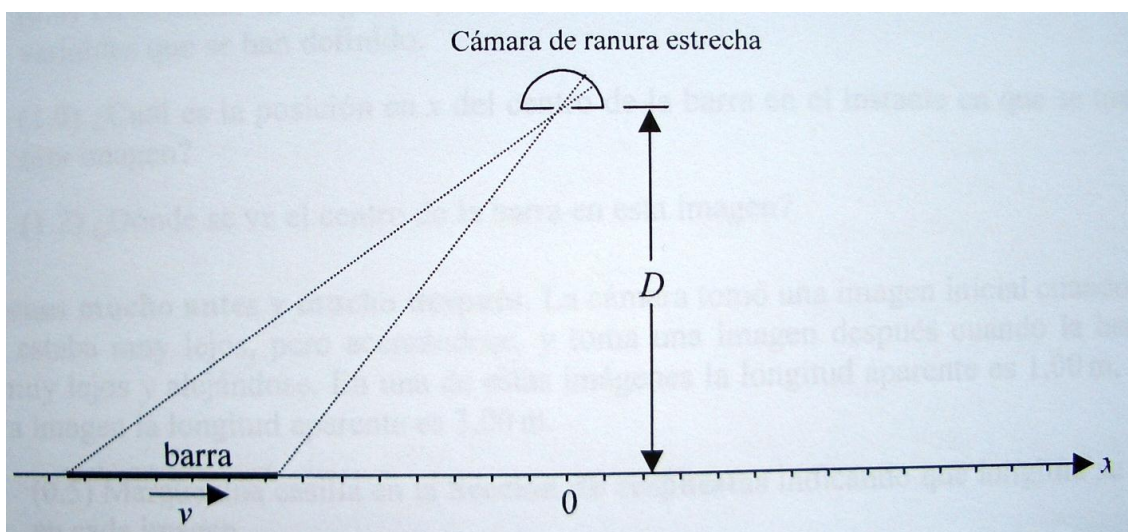
$$\lambda_0 = \frac{NV}{2A} = \frac{19,00 * 1,597.10^{-14}}{2 * 2 * (3,600.10^{-2})^2 * \text{tag } 22,10} = 1,441.10^{-10} \text{ m} = 0,1441 \text{ nm}$$

1.7.- ¿Si se observan 30 ciclos completos en otro experimento del mismo tipo que utiliza neutrones con $\lambda_0 = 0,2000 \text{ nm}$, cuál es el valor del área A?

$$A = \frac{NV}{2\lambda_0} = \frac{30,00 * 1,597.10^{-14}}{2 * 0,2000.10^{-9}} = 1,198.10^{-3} \text{ m}^2$$

II.-CONTRACCIÓN DE UNA BARRA EN MOVIMIENTO

Descripción. La cámara con ranura estrecha se encuentra en la posición $x=0$ y a una distancia D del eje x , (ver figura. inferior) de manera tal que la foto de la barra se toma al abrir la ranura un pequeño instante de tiempo. Las marcas equidistantes en el eje x permiten determinar la longitud aparente de la barra, a partir de la imagen en la foto. En la foto de la barra en reposo su longitud es L , sin embargo la barra no está en reposo, sino que se mueve con una velocidad constante v a lo largo del eje x .



Relaciones básicas. Una imagen tomada por la cámara muestra un segmento diminuto de la barra situado en la posición \tilde{x}

2.1.- ¿Cuál es la posición en x de este segmento en el instante en que se toma la imagen? Dar la respuesta en función de \tilde{x} , D , L , v , y c (velocidad de la luz, $3 \cdot 10^8$ m/s). Utilice las siguientes definiciones

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

2.2.- Obtenga además la relación inversa

Nota.- La posición en x en cada cuadro es la posición establecida con la cámara en reposo

Longitud aparente de la barra. *La cámara toma una imagen en el instante en que la posición del centro de la barra corresponde a cierto punto x_0 .*

2.3.- *Determinar la longitud aparente de la barra en esta imagen en función de las variables anteriores*

2.4. *Indique cómo varía la longitud aparente con el tiempo.*

Imagen simétrica. *Una de las imágenes de la cámara muestra los dos extremos de la barra a la misma distancia de la ranura de la cámara*

2.5.- *Determinar la longitud aparente de la barra en esta imagen en función de las variables anteriores*

2.6.- *¿Cuál es la posición en x del centro de la barra en el instante en que se toma esta imagen?*

2.7.- *¿Dónde se ve el centro de la barra en esta imagen?*

Imágenes mucho antes y mucho después. *La cámara tomó una imagen inicial cuando la barra estaba muy lejos, pero acercándose y toma una imagen después cuando la barra está muy lejos y alejándose. En una de estas imágenes la longitud aparente es 1,00 m y en la otra 3,00 m.*

2.8.- *Indique que longitud se ve en cada imagen*

2.9 *Calcule la velocidad v*

2.10 *Determine la longitud de la barra en reposo*

2.11.- *Deduzca la longitud aparente de la barra en la imagen simétrica*

2.1.- *¿Cuál es la posición en x de este segmento en el instante en que se toma la imagen?*

La imagen que aparece en la cámara muestra que la posición del segmento diminuto de la barra es \tilde{x} . Para obtener esta imagen la luz ha tenido que ir desde esa posición a la cámara y para ello debe recorrer la distancia que existe entre ese punto y la cámara, lo que conlleva un tiempo T que vale:

$$T = \frac{\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}}{c}$$

Pero en ese tiempo T el segmento diminuto ya no está en ese lugar, sino que ha recorrido una distancia vT sobre el eje y ocupa la posición x .

$$x = \tilde{x} + vT = \tilde{x} + \frac{v}{c} \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2} = \tilde{x} + \beta \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}$$

2.2.- Obtenga además la relación inversa

$$\begin{aligned} (x - \tilde{x})^2 &= \beta^2 D^2 + \beta^2 \tilde{x}^2 \Rightarrow \tilde{x}^2 (1 - \beta^2) - 2x\tilde{x} - x^2 - \beta^2 D^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{x} &= \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 4(1 - \beta^2)(x^2 - \beta^2 D^2)}}{2(1 - \beta^2)} = x\gamma^2 - \gamma^2 \sqrt{x^2 - \frac{x^2 - \beta^2 D^2}{\gamma^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{x} &= x\gamma^2 - \gamma \sqrt{x^2 (\gamma^2 - 1) + \beta^2 D^2} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Rightarrow 1 = \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 \Rightarrow \gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$, queda finalmente para \tilde{x}

$$\tilde{x} = x\gamma^2 - \gamma \sqrt{x^2 \gamma^2 \beta^2 + \beta^2 D^2} = x\gamma^2 - \gamma \beta \sqrt{D^2 + x^2 \gamma^2} \quad (1)$$

2.3.-- Determinar la longitud aparente de la barra en esta imagen en función de las variables anteriores.

Recordemos que la cámara está “viendo” a la barra en movimiento, por tanto, para un sistema ligado a la cámara la longitud es la longitud impropia cuyo valor es:

$$L\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L}{\gamma}$$

Las coordenadas de los extremos de la barra son respectivamente

$$x_D = x_o + \frac{L}{2\gamma} \quad \text{y} \quad x_T = x_o - \frac{L}{2\gamma}$$

siendo x_D el extremo delantero de la barra y x_T el trasero. Sustituyendo la ecuación (1) en cada una de las anteriores resulta:

$$\tilde{x}_D = \left(x_o + \frac{L}{2\gamma}\right) \gamma^2 - \gamma \beta \sqrt{\left(x_o \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} \quad ; \quad \tilde{x}_T = \left(x_o - \frac{L}{2\gamma}\right) \gamma^2 - \gamma \beta \sqrt{\left(x_o \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$$

Siendo \tilde{x}_D la imagen en la película fotográfica del extremo delantero de la barra y \tilde{x}_T del extremo posterior de dicha barra, por tanto, la longitud aparente es:

$$\tilde{L} = \tilde{x}_D - \tilde{x}_T = \gamma^2 \left(x_o \gamma + \frac{L}{2\gamma} - x_o \gamma + \frac{L}{2\gamma} \right) - \gamma \beta \sqrt{\left(x_o \gamma + \frac{L}{2} \right)^2 + D^2} + \gamma \beta \sqrt{\left(x_o \gamma - \frac{L}{2} \right)^2 + D^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{L} = L\gamma + \gamma \beta \sqrt{\left(x_o \gamma - \frac{L}{2} \right)^2 + D^2} - \gamma \beta \sqrt{\left(x_o \gamma + \frac{L}{2} \right)^2 + D^2} \quad (2)$$

2.4. Indique cómo varía la longitud aparente con el tiempo

De la formula (2) se deduce que el valor de \tilde{L} al aumentar x_o , depende de cómo varíe la diferencia entre los términos que contienen las raíces. Al aumentar el tiempo aumenta también x_o .

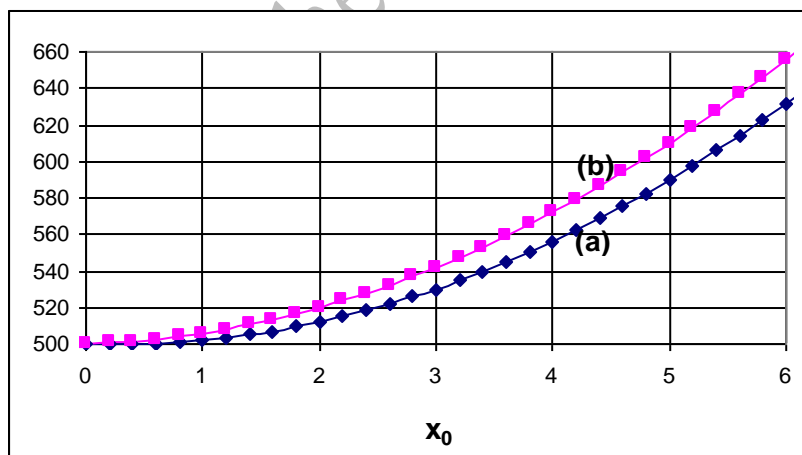
$$\sqrt{\left(x_o \gamma - \frac{L}{2} \right)^2 + D^2} - \sqrt{\left(x_o \gamma + \frac{L}{2} \right)^2 + D^2} \quad (2)$$

$$y = \left(x_o \gamma - \frac{L}{2} \right)^2 + D^2 = x_o^2 \gamma^2 - x_o L \gamma + \left(D^2 + \frac{L^2}{4} \right) \quad (a)$$

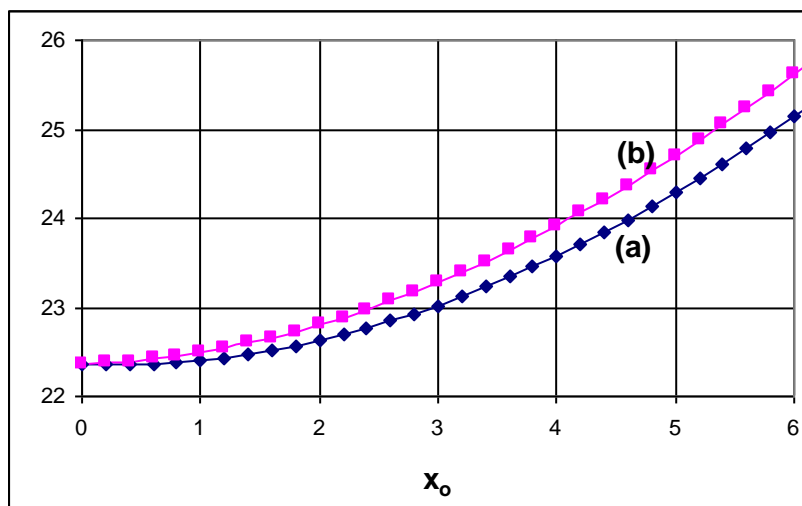
Hacemos:

$$y' = \left(x_o \gamma + \frac{L}{2} \right)^2 + D^2 = x_o^2 \gamma^2 + x_o L \gamma + \left(D^2 + \frac{L^2}{4} \right) \quad (b)$$

Ambas ecuaciones representan sendas parábolas de la forma que indica la figura inferior



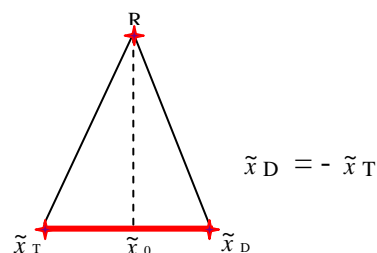
Si en lugar de a y b se representa las raíces cuadradas se obtiene



De la segunda gráfica se deduce que la diferencia expresada en la relación (2) se hace cada vez más negativa al aumentar x_0 , por tanto, el valor de \tilde{L} disminuye al aumentar el de x_0 , es decir al aumentar el tiempo.

2.5.- Determinar la longitud aparente de la barra en esta imagen en función de las variables anteriores

Imagen simétrica.-



La longitud aparente de la barra es $\tilde{L} = \frac{L}{\gamma}$

Por razones de simetría, ya que la luz procedente de los dos extremos fue emitida simultáneamente y alcanzó al mismo tiempo la rendija de arriba.

$$\tilde{L} = \frac{L}{\gamma} = \tilde{x}_D - \tilde{x}_T$$

Utilizamos las expresiones que se dedujeron en el párrafo 2.3

$$\tilde{x}_T = \left(x_0 - \frac{L}{2\gamma} \right) \gamma^2 - \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2} \right)^2 + D^2}$$

$$\tilde{x}_D = \left(x_0 + \frac{L}{2\gamma} \right) \gamma^2 - \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2} \right)^2 + D^2}$$

Tenemos para la suma de ambos:

$$\tilde{x}_D + \tilde{x}_T = 2\gamma^2 x_0 - \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} - \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} \quad (3)$$

y para su diferencia:

$$\tilde{x}_D - \tilde{x}_T = \gamma L - \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} + \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} \quad (4)$$

Tomando como origen \tilde{x}_0 ; $\tilde{x}_D + \tilde{x}_T = 0$; que sumada con $\frac{L}{\gamma} = \tilde{x}_D - \tilde{x}_T$

da $\frac{L}{\gamma} = 2x_D$, si sumamos (3) + (4) resulta:

$$2x_D = \gamma L + 2\gamma^2 x_0 - 2\gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$$

Igualando ambas, queda: $\frac{L}{\gamma} = \gamma L + 2\gamma^2 x_0 - 2\gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$ (5)

De la expresión (5) despejamos el último término y recordando que $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$, la ponemos en la forma que nos interesa: $\gamma^2 \beta^2 = \gamma^2 - 1$.

$$2\gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} = \gamma L - \frac{L}{\gamma} + 2\gamma^2 x_0 = 2\gamma^2 x_0 + L \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} = 2\gamma^2 x_0 + L \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma}$$

Despejamos la raíz, queda:

$$\sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} = \frac{\gamma x_0}{\beta} + \frac{\beta \cdot L}{2} \quad (6)$$

Si en lugar de sumar, restamos $\tilde{x}_D + \tilde{x}_T = 0$ menos $\frac{L}{\gamma} = \tilde{x}_D - \tilde{x}_T$;

Se obtiene $\frac{L}{\gamma} = -2x_T$, si restamos (4)-(3), resulta:

$$-2x_T = \gamma L - 2\gamma^2 x_0 - 2\gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$$

Igualando

$$\frac{L}{\gamma} = \gamma L - 2\gamma^2 x_0 - 2\gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$$

Despejando el último término

$$2\gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} = -\gamma L + \frac{L}{\gamma} + 2\gamma^2 x_0 = 2\gamma^2 x_0 - L \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} = 2\gamma^2 x_0 - L \frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma}$$

Despejamos la raíz, queda:

$$\sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} = \frac{\gamma x_0}{\beta} - \frac{\beta L}{2} \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones (6) y (7), elevamos los dos miembros de cada una al cuadrado

$$x_0^2 \gamma^2 + \frac{L^2}{4} + Lx_0 \gamma + D^2 = \frac{\gamma^2 x_0^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2 L^2}{4} + \gamma x_0 L$$

$$x_0^2 \gamma^2 + \frac{L^2}{4} - Lx_0 \gamma + D^2 = \frac{\gamma^2 x_0^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2 L^2}{4} - \gamma x_0 L$$

Sumando

$$2x_0^2 \gamma^2 + 2\frac{L^2}{4} + 2D^2 = 2\frac{\gamma^2 x_0^2}{\beta^2} + 2\frac{\beta^2 L^2}{4}$$

Simplificando

$$x_0^2 \gamma^2 + \frac{L^2}{4} + D^2 = \frac{\gamma^2 x_0^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2 L^2}{4} \rightarrow x_0^2 \gamma^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right) = D^2 + \frac{L^2}{4} - \frac{\beta^2 L^2}{4}$$

o sea :

$$x_0^2 \gamma^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} = D^2 + \frac{L^2}{4} (1 - \beta^2)$$

Recordando que $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$, $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$ y sustituyendo en la expresión anterior

$$\frac{x_0^2}{\beta^2} = D^2 + \frac{L^2}{4} (1 - \beta^2) \Rightarrow x_0 = \sqrt{D^2 \beta^2 + \frac{L^2 \beta^2}{4\gamma^2}} = \beta \sqrt{D^2 + \left(\frac{L}{4\gamma}\right)^2}$$

A la imagen del punto medio de la barra $\tilde{x}_0 = x_0 \gamma^2 - \gamma \beta \sqrt{D^2 + x_0^2 \gamma^2}$ le aplicamos el valor encontrado de x_0 y queda:

$$\tilde{x}_0 = \beta \gamma^2 \sqrt{D^2 + \frac{L^2}{4\gamma^2}} - \gamma \beta \sqrt{D^2 (1 + \beta^2 \gamma^2) + \frac{\beta^2 L^2}{4}}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \Rightarrow 1+\beta^2 \cdot \gamma^2 = \gamma^2$, resulta:

$$\tilde{x}_0 = \beta \cdot \gamma \left(\sqrt{D^2 \gamma^2 + \frac{L^2}{4}} - \sqrt{D^2 \gamma^2 + \frac{\beta^2 \cdot L^2}{4}} \right) \quad (8)$$

La distancia l desde la imagen del frente delantero a la del punto medio de la barra

$$l = \tilde{x}_D - \tilde{x}_0 = \frac{L}{2\gamma} - \tilde{x}_0$$

le aplicamos las relaciones anteriores

$$l = \frac{L}{2\gamma} - \beta \cdot \gamma \left(\sqrt{D^2 \gamma^2 + \frac{L^2}{4}} - \sqrt{D^2 \gamma^2 + \frac{\beta^2 \cdot L^2}{4}} \right)$$

Distancia entre el punto medio y el extremo

Imágenes mucho antes y mucho después.-

De la representación gráfica de las raíces que figuran en la expresión (2) de \tilde{L}

$$\tilde{L} = L\gamma + \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} - \gamma \beta \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} \quad (2)$$

Cuando en la expresión (2) sustituimos valores negativos de x_0 , resulta que

$$\sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} > \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$$

Luego $\tilde{L} = L\gamma +$ un sumando

Cuando en la expresión (2) sustituimos valores positivos de x_0 , resulta que

$$\sqrt{\left(x_0 \gamma - \frac{L}{2}\right)^2 + D^2} < \sqrt{\left(x_0 \gamma + \frac{L}{2}\right)^2 + D^2}$$

Luego $\tilde{L} = L\gamma -$ un sumando

Esto quiere decir que cuando $x_0 \rightarrow -\infty$, la \tilde{L} en la fotografía es mayor que cuando $x_0 \rightarrow +\infty$.

Si en la expresión (2) tenemos en cuenta que D es mucho menor que los términos del paréntesis

$$\tilde{L} = L\gamma + \left[\gamma \beta \left(x_0 \gamma - \frac{L}{2} - x_0 \gamma - \frac{L}{2} \right) \right] = L\gamma - \gamma \beta L$$

El término designando como un sumando es $\gamma\beta L$

$$\tilde{L}_{\text{antes}} = L\gamma + \gamma\beta L = L\gamma(1 + \beta) = L \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta}\sqrt{1 + \beta}} = L\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

$$\tilde{L}_{\text{después}} = L\gamma - \gamma\beta L = L\gamma(1 - \beta) = L \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta}\sqrt{1 + \beta}} = L\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

en consecuencia, aplicando los datos numéricos:

$$\tilde{L}_{\text{antes}} > \tilde{L}_{\text{después}} \quad \begin{array}{l} \tilde{L}_{\text{antes}} = 3; \text{ se acerca} \\ \tilde{L}_{\text{después}} = 1; \text{ se aleja} \end{array}$$

De las expresiones anteriores:

$$\tilde{L}_{\text{antes}} = L\gamma(1 + \beta) \quad \tilde{L}_{\text{después}} = L\gamma(1 - \beta)$$

La diferencia: $\tilde{L}_{\text{antes}} - \tilde{L}_{\text{después}} = 2.L\gamma.\beta$;

La suma: $\tilde{L}_{\text{antes}} + \tilde{L}_{\text{después}} = 2.L\gamma$;

El cociente de ambas: $\frac{\tilde{L}_{\text{antes}} - \tilde{L}_{\text{después}}}{\tilde{L}_{\text{antes}} + \tilde{L}_{\text{después}}} = \beta$

Con los datos numéricos $\frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2} = \beta$

Luego, en este supuesto, dado que $\beta = v/c$, nos queda que $v = \frac{1}{2}c$, aproximadamente 150.000 km/s

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

La longitud en reposo de la barra la obtenemos de la igualdad $\tilde{L}_{\text{antes}} = L\gamma(1 + \beta)$ aplicando los datos:

$$L = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

En el caso de la simetría es:

$$\tilde{L} = \frac{L}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{2}$$

PROBLEMA TEÓRICO 3

a) Cámara digital

Considere una cámara digital con un chip CCD cuadrado de lado $L = 35$ mm que tiene un número de píxeles igual a $N_p = 5$ Mpix (1 Mpix = 10^6 píxeles). La lente de la cámara tiene una distancia focal de $f = 38$ mm . La conocida secuencia de números (2; 2,8 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 11 ; 16 ; 22) que aparece en la lente se refiere al llamado número $-F$, que se denota $F\#$ y se define como el cociente entre la distancia focal f y el diámetro D de apertura de la lente

$$F\# = \frac{f}{D}$$

3.1.- Encuentre la mejor posible resolución espacial Δx_{min} permitida por las lentes en el chip de la cámara. Expresé el resultado en función de la longitud de onda λ y $F\#$ y calcule el valor numérico para $\lambda = 500$ nm.

3.2.- Encuentre el número N de Mpix que el chip CCD debería poseer para que pueda igualar la resolución óptima anterior.

3.3.- Algunas veces los fotógrafos tratan de utilizar una cámara con la menor apertura posible. Suponga que tiene una cámara con $N_0 = 16$ Mpix , con el mismo tamaño de chip CCD y la misma distancia focal que la cámara descrita anteriormente; ¿ Qué valor de $F\#$ debemos elegir para que la calidad de la imagen no esté limitada por la óptica?

3.4.- Sabiendo que el ojo humano tiene una resolución aproximada de $\phi = 2$ arcs y que una impresora fotográfica típica imprime un mínimo de 300 ppp (puntos por pulgada) ¿A qué distancia mínima z debe separar la página impresa de sus ojos para no distinguir puntos individuales?

$$1 \text{ arcs} = 2,91 \cdot 10^{-4} \text{ rad} ; 1 \text{ pulgada} = 25,4 \text{ mm}$$

3.1.- Cuando se quiere observar la imagen de dos puntos próximos, la difracción forma manchas anulares (claras y oscuras). El criterio para poder observar esos dos puntos separados se conoce como *criterio de Rayleigh*

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

En la que θ es el ángulo mínimo de separación de la imagen de dos puntos Q_1 y Q_2 , λ es la longitud de onda de la luz y D el diámetro de la rendija

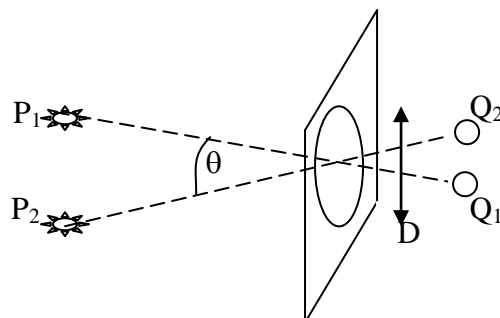


Fig.1

La figura 1 nos indica esquemáticamente el proceso de formación de la imagen en la cámara de P_1 y P_2 que son dos puntos exteriores que se quieren fotografiar. La imagen

se forma en el CCD en Q_1 y Q_2 , estos dos puntos tienen que aparecer en píxeles separados siendo el criterio de separación el de Rayleigh.

El ángulo θ es igual al arco por el radio. En este caso al ser pequeño el ángulo el arco es la distancia Q_1Q_2 y el radio es la focal de la lente

$$\theta = \frac{\Delta x_{\min}}{f} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \Delta x_{\min} = 1,22 \frac{\lambda f}{D} = 1,22 \frac{\lambda F\#D}{D} = 1,22 \lambda F\#$$

$$\Delta x_{\min} = 1,22 * 500.10^{-9} \text{ m} * 2 = 1,22.10^{-6} \text{ m} = 1,22 \mu \text{ m}$$

3.2.-

Como Q_1 y Q_2 ha de estar en píxeles distintos. Cada píxel debe tener un lado de valor 1,22 micrómetros. Si el píxel es cuadrado entonces el área de cada píxel es $(1,22)^2 \mu\text{m}^2$, el área del CCD es L^2 , si N el número de píxel en el chip

$$N * (1,22.10^{-6} \text{ m})^2 = L^2 = (35.10^{-3} \text{ m})^2 \Rightarrow N = 8,23.10^8 \text{ pix} = 823 \text{ Mpix}$$

3.3.-

Determinamos el tamaño de cada píxel

$$N_o * \Delta x^2 = L^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{L}{\sqrt{N_o}} = \frac{35.10^{-3}}{\sqrt{16.10^6}} = 8,75.10^{-6} \text{ m}$$

$$\Delta x = 1,22 \lambda F\# \Rightarrow F\# = \frac{8,75.10^{-6} \text{ m}}{1,22 * 500.10^{-9} \text{ m}} = 14,3$$

Como no existe el valor 14,3 elegimos el inferior más próximo que es 11.

3.4.-

La impresora es capaz de imprimir

$$300 \frac{\text{puntos}}{\text{pulgada}} = 300 \frac{\text{puntos}}{25,4 \text{ mm}} = 11,8 \frac{\text{puntos}}{\text{mm}}$$

La distancia entre dos puntos consecutivos es: $\frac{1}{11,8} \text{ mm}$

$$\text{arco} = \varphi * z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\text{arco}}{\varphi} = \frac{\frac{1}{11,8} \text{ mm}}{2 * 2,91 \cdot 10^{-4}} = 146 \text{ mm}$$

b) Huevo duro

Un huevo sacado directamente del frigorífico, a una temperatura $T_0 = 4^\circ\text{C}$, se introduce en un recipiente con agua que se mantiene hirviendo a una temperatura T_1 .

3.5.- ¿Qué cantidad de energía U se necesita para dejar el huevo coagulado?

3.6.- ¿Cuál es el flujo de calor J que se transmite al huevo?

3.7.- ¿Cuánto vale la potencia P de calor transmitida al huevo?

3.8.- ¿Cuánto tiempo se necesita cocer el huevo para que se transforme en un huevo duro?

Ayuda.- Puede utilizarse la forma simplificada de la ley de Fourier

$J = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta r}$, donde ΔT es la variación de la temperatura al variar la

distancia en el valor Δr . Las unidades de J son Wm^{-2} .

Datos.- Densidad de masa del huevo : $\mu = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Capacidad calorífica específica del huevo : $C = 4,2 \text{ JK}^{-1}\text{g}^{-1}$

Radio del huevo : $R = 2,5 \text{ cm}$

Temperatura de congelación de la albúmina (proteína del huevo) : $T_c = 65^\circ$

Coefficiente de transferencia de calor $\kappa = 0,64 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (suponga que es la misma para la albúmina sólida y líquida)

3.5.-

$$U = mC \Delta T = \mu VC \Delta T = \mu \frac{4}{3} \pi R^3 C \Delta T =$$

$$U = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * \frac{4}{3} \pi (2,5 \cdot 10^{-2})^3 \text{ m}^3 * 4,2 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot 10^{-3} \text{ kg}} * (65 - 4) \text{ K} = 1,68 \cdot 10^4 \text{ J}$$

3.6.-

Para Δr tomamos el radio del huevo

$$J = 0,64 \frac{\text{W}}{\text{Km}} * \frac{(100-4)\text{K}}{2,5 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 2,46 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

3.7.-

La transferencia de calor se hace a través de la superficie del huevo

$$P = J * 4\pi r^2 = 2,46 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} * 4\pi (2,5 \cdot 10^{-2})^2 = 19,3 \text{ W}$$

3.8.-

La potencia es la energía U dividida por el tiempo

$$P = \frac{U}{t} \Rightarrow t = \frac{U}{P} = \frac{1,67 \cdot 10^4 \text{J}}{19,3 \frac{\text{J}}{\text{s}}} = 865 \text{ s}$$

c) Rayos

Se presenta un modelo simplificado de rayos. Los rayos son causados por una acumulación de carga electrostática en las nubes. Como consecuencia la parte inferior de las nubes suele adquirir carga positiva, y la superior negativa y el suelo bajo la nube adquiere carga negativa. Cuando el campo eléctrico que se genera sobrepasa el valor crítico para la ruptura dieléctrica del aire, se produce una descarga: el rayo

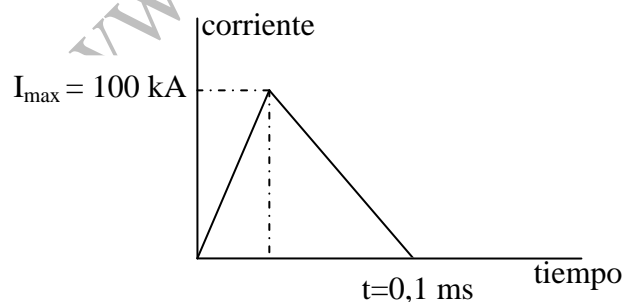


Fig.3.1.-Pulso de corriente idealizado fluyendo desde la parte inferior de una nube al suelo durante una descarga eléctrica

A partir de la gráfica anterior conteste.

3.9.- *¿Cuál es la carga total Q descargada por un rayo?*

3.10.- *¿Cuál es la corriente promedio I que fluye entre la parte inferior de la nube y el suelo durante una descarga?*

3.11. Imagine que la energía de todas las tormentas de un año se acumula y reparte entre toda la población mundial ¿Cuánto tiempo podría mantenerse encendida una bombilla de 100W con la energía de una sola persona?

Datos. Distancia de la parte inferior de la nube y el suelo $h = 1 \text{ km}$

Campo eléctrico necesario para la ruptura dieléctrica del aire húmedo $E_0 = 300 \text{ kV/m}$

Número N total de rayos que alcanzan la Tierra durante un año $32 \cdot 10^6$

Población de la Tierra, $P_{er} = 6,5 \cdot 10^9$ personas

3.9.-

La relación entre la intensidad y la carga es $I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int I dt$, esta integral es el área del triángulo de la figura superior

$$Q = \frac{0,1 \cdot 10^{-3} * 100 \cdot 10^3}{2} = 50 \text{ C}$$

3.10 .-

La intensidad promedio es el cociente entre la carga y el tiempo

$$I = \frac{50}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^4 \text{ A} = 50 \text{ kA}$$

3.11.-

Entre la parte inferior de la nube y el suelo existe un campo eléctrico semejante al que existe entre las placas de un condensador. La energía vale:

$$E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} QE_0 h$$

La energía total de todas las tormentas es : $E_{\text{total}} = N * \frac{1}{2} QE_0 h$

La energía por cada persona $E_{\text{persona}} = \frac{N * \frac{1}{2} QE_0 h}{P_{er}}$

La potencia es la energía dividida por el tiempo

$$t = \frac{E_{\text{persona}}}{\text{Potencia}} = \frac{\frac{N * \frac{1}{2} QE_0 h}{P_{er}}}{100} = \frac{32 \cdot 10^6 * 5 * 300 \cdot 10^3 * 10^3}{200 * 6,5 \cdot 10^9} = 3,69 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 10 \text{ horas}$$

d) Vasos capilares

Considere la sangre como un líquido viscoso e incompresible con una densidad m similar a la del agua y con viscosidad dinámica

$\eta = 4,5 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. En el modelo se considera a los vasos sanguíneos como tubos rectos de sección circular de radio r y longitud L y se describe el flujo sanguíneo utilizando la ley de Poiseuille

$$\Delta p = RD$$

que es el análogo en dinámica de fluidos de la ley de Ohm en electricidad. En esta expresión Δp es la diferencia de presión entre la entrada y la salida del vaso sanguíneo. $D = Sv$ es el flujo de volumen a través de una sección eficaz de área S del vaso sanguíneo, y v es la velocidad de la sangre. La resistencia hidráulica es.

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

Para la circulación sistémica de la sangre (la que fluye desde el ventrículo izquierdo a la aurícula derecha del corazón), el flujo sanguíneo es $D = 100 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ para una persona en reposo. Se supone que todos los vasos capilares están conectados en paralelo y que cada uno de ellos es de radio $r = 4 \mu\text{m}$ y longitud $L = 1 \text{ mm}$ y funcionan bajo una diferencia de presión de $\Delta p = 1 \text{ kPa}$

3.12.- *¿Cuántos vasos capilares hay en el cuerpo humano?*

3.13.- *¿Cuál es la velocidad v con la que fluye la sangre en un vaso capilar?*

3.12.-

Al considerar a los vasos capilares en derivación y de acuerdo con la analogía de la corriente eléctrica, se deduce que la resistencia de cada capilar es:

$$R_{\text{cap}} = \frac{R}{N} = \frac{8\eta L}{\pi r^4 N}$$

Aplicando la ecuación del enunciado

$$\Delta p = R_{\text{cap}} D = \frac{8\eta L}{\pi r^4 N} D \Rightarrow N = \frac{8\eta LD}{\pi r^4 \Delta p} = \frac{8 * 4,5 \cdot 10^{-3} * 10^{-3} * 100 \cdot 10^{-6}}{\pi * (4 \cdot 10^{-6})^4 * 10^3} = 4,5 \cdot 10^9$$

3.13.-

Determinamos en primer lugar el flujo por un capilar

$$D_{\text{cap}} = \frac{D}{N} = Sv \Rightarrow v = \frac{D}{NS} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{4,5 \cdot 10^9 \cdot \pi (4 \cdot 10^{-6})^2} = 4,42 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,44 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

e) Rascacielos

En la base de un rascacielos de 1000 m de altura la temperatura ambiente es $T_{\text{base}}=30^\circ\text{C}$. El objetivo de este problema es calcular la temperatura T_{tejado} en el tejado del edificio. Considere una capa fina de aire (gas ideal de nitrógeno con coeficiente adiabático $\gamma=7/5$) ascendiendo lentamente hasta una altura z donde la presión es más baja, y suponga que esta capa se expande adiabáticamente de manera que su temperatura disminuye hasta igualar la del aire que la rodea.

3.14.- ¿Cómo se relaciona el cambio fraccional de temperatura dT/T con el cambio fraccional de presión dp/p ?

3.15.- Expresar la diferencia de presión dp en función del cambio en altura dz

3.16.- ¿Cuál es la temperatura en el tejado del rascacielos?

Datos.- Constante de Boltzmann: $k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$; masa de la molécula de nitrógeno: $m = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$; aceleración de la gravedad $g=9,8 \text{ m/s}^{-2}$

3.14.-

En la figura se representa la capa de gas con una diferencia de alturas. La relación entre las coordenadas termodinámicas se obtiene a partir de la ecuación de los gases perfectos

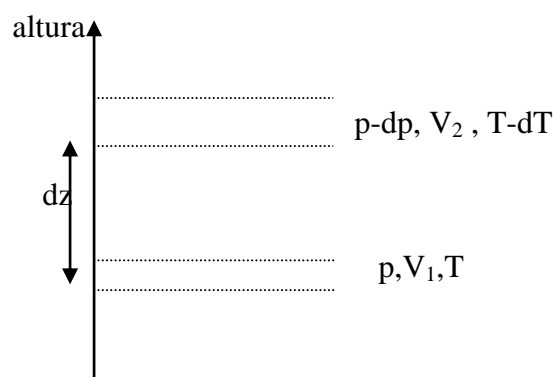
$$pV_1 = nRT \quad ; \quad (p-dp)V_2 = nR(T-dT)$$

Dividiendo una expresión por la otra resulta:

$$\frac{(p-dp)V_2}{pV_1} = \frac{nR(T-dT)}{nRT} \Rightarrow \frac{(p-dp)}{p} \frac{V_2}{V_1} = \frac{T-dT}{T} \quad (1)$$

La ecuación de la adiabática nos permite escribir:

$$pV_1^\gamma = (p-dp)V_2^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{p}{p-dp} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p}{p-dp}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2)$$



Llevando la ecuación (2) a la (1)

$$\frac{(p-dp)}{p} \left(\frac{p}{p-dp} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{T-dT}{T} \Rightarrow \left(\frac{p-dp}{p} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{T-dT}{T} \Rightarrow \left(1-\frac{dp}{p} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 1-\frac{dT}{T}$$

Desarrollando el paréntesis

$$1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dp}{p} = 1 - \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dp}{p}$$

3.15.-

Dado que la capa se eleva sin aceleración, debe existir un equilibrio de fuerzas entre el peso de la capa y la diferencia de presión que actúa por debajo y por encima de ella.

Mg representa el peso de la capa, n el número de moles y N_A el número de Avogadro, h la altura de la capa y S la superficie, $V = Sh$ el volumen de la capa, dp/dz es la variación de la presión con la altura, $\frac{dp}{dz}h$ representa la variación de presión entre la parte inferior y superior de la capa. El peso actúa verticalmente hacia abajo y la fuerza $\frac{dp}{dz}hS$ verticalmente hacia arriba

$$Mg = -\frac{dp}{dz}hS$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$pV = nRT = \frac{M}{mN_A}RT = \frac{M}{m}kT \Rightarrow M = \frac{pV}{kT}m$$

$$\frac{pV}{kT}mg = -\frac{dp}{dz}hS \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{pmg}{kT}$$

3.16.-

$$\frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dp}{p} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{-\frac{pmg}{kT}dz}{p} \Rightarrow dT = -\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{mg}{k} dz$$

Integramos la anterior expresión entre la base y el alto del rascacielos

$$\int_{T_{base}}^{T_{tejado}} dT = -\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{mg}{k} \int_0^H dz \Rightarrow T_{tejado} - T_{base} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{mg}{k} H \Rightarrow$$

$$T_{tejado} = 30 - \left(1 - \frac{5}{7} \right) \frac{4,65 \cdot 10^{-26} * 9,8}{1,38 \cdot 10^{-23}} * 1000 = 20,6^\circ C$$