

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXVI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. ESPAÑA 2005

I.-UN SATÉLITE DESAFORTUNADO

La mayoría de las maniobras orbitales en una nave espacial consisten en cambios de velocidad a lo largo de la dirección de vuelo, con la finalidad de alcanzar órbitas mayores o de frenado cuando se produce reentradas en la atmósfera. En este problema se estudia las variaciones orbitales cuando el empuje del motor se aplica en dirección radial.

Para obtener valores numéricos se utilizará: Radio de la Tierra, $R_T = 6,37 \cdot 10^6$ m, gravedad en la superficie terrestre $g = 9,81$ m/s², día sideral $T_0 = 24,0$ horas.

Consideramos un satélite geosincronizado (su periodo de revolución es $T_0 = 24$ h) de masa m , colocado en una órbita ecuatorial de radio r_0 . Este satélite dispone de un “motor apogeo” el cual proporciona un empuje tangencial necesario para alcanzar la órbita final.

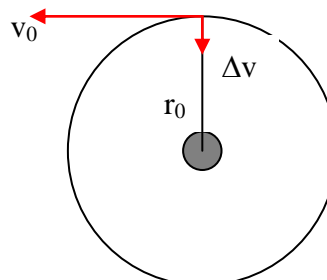
Cuestión 1

1.1.- Calcular el valor numérico de r_0 .

1.2.- Encontrar la expresión analítica de la velocidad v_0 del satélite en función de g , R_T y r_0 y calcular su valor numérico.

1.3.- Obtener la expresión de su momento angular L_0 y de la energía mecánica E_0 en función de v_0 , m , g y R_T .

Una vez que se ha alcanzado la órbita circular sincronizada (ver figura F-1), el satélite ha sido estabilizado en el lugar deseado, y esta siendo preparado para realizar su misión, pero un error de los controladores de tierra origina que el motor apogeo se encienda de nuevo.



F-1

El empuje se dirige hacia el centro de la Tierra y origina una indeseada variación de velocidad Δv en el satélite, el cual se caracteriza por el

cociente $\beta = \Delta v / v_0$. La duración del encendido del motor es despreciable con cualquier otro tiempo orbital por lo que se considera instantáneo.

Suponga que $\beta < 1$

Cuestión 2

2.1.- Determinar los parámetros de la nueva órbita (utilice la ayuda al final del problema), semi-latus-rectum l , y excentricidad ε , en función de r_0 y β .

2.2.- Calcular el ángulo α entre el eje mayor de la nueva órbita y el vector de posición en el punto del empuje accidental.

2.3.- Encontrar la expresión analítica del perigeo r_{min} y apogeo r_{max} respecto del centro de la Tierra, en función de r_0 y β y calcular sus valores numéricos cuando $\beta = 1/4$.

2.4.- Determinar el periodo de la nueva órbita, T , en función de T_0 y β y calcular su valor numérico para $\beta = 1/4$.

Cuestión 3

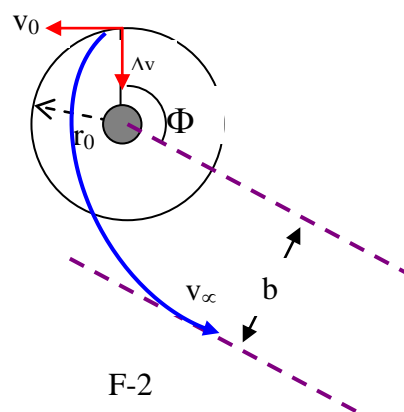
3.1.- Calcular el valor mínimo de β_{esc} necesario para que el satélite abandone el campo gravitatorio terrestre.

3.2.- Calcular en este caso la mínima distancia del satélite al centro de la Tierra en la nueva trayectoria de escape, $r_{a min}$ en función de r_0 .

Cuestión 4 (suponer que $\beta > \beta_{esc}$)

4.1.- Determinar la velocidad residual en el infinito v_∞ en función de v_0 y β .

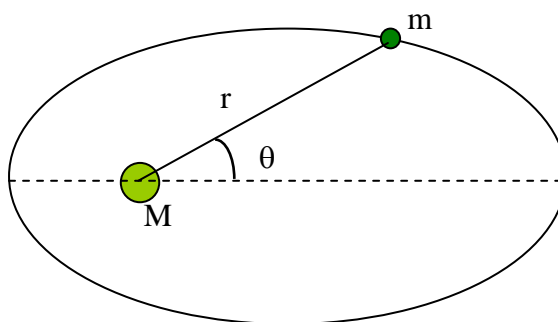
4.2.- Obtener el parámetro de impacto b , en la dirección asintótica de escape en función de r_0 y β . (ver figura F-2)



4.3.- Determinar el ángulo ϕ de la dirección de escape asintótico en función de β . Calcular su valor numérico para $\beta = 3/2 \beta_{esc}$.

Ayuda

Bajo la acción de fuerzas centrales que obedecen a la ley del inverso del cuadrado, las trayectorias son elipses, parábolas o hipérbolas, con la aproximación de $m \ll M$, siendo M la masa gravitatoria de uno de los focos. Si se toma como origen este foco, la ecuación polar de estas curvas se puede escribir como (ver figura F-3)



F-3

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$

En la que l es una constante positiva que recibe el nombre de semi-latus-rectum y ε es la excentricidad de la curva. En función de constantes del movimiento

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

Donde G es la constante de la gravitación de Newton, L es el módulo del momento angular de la masa que orbita, con respecto al origen y E su energía mecánica, siendo la energía potencia nula en el infinito. Se presentan los siguientes casos

- i) Si $0 \leq \varepsilon < 1$ la curva es una elipse (circunferencia cuando $\varepsilon = 0$)
- ii) Si $\varepsilon = 1$, la curva es una parábola
- iii) Si $\varepsilon > 1$ la curva es una hipérbola

Cuestión 1

1.1.- La fuerza centrípeta necesaria para que el satélite gire es la fuerza de gravitación entre el satélite y la tierra

$$G \frac{M_T m}{r_o^2} = \frac{mv_o^2}{r_o} \Rightarrow v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{r_o}} = \frac{2\pi r_o}{T_o} \Rightarrow r_o = \sqrt[3]{\frac{GM_T T_o^2}{4\pi^2}}$$

La intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre es:

$$G \frac{M_T}{R_T^2} = g \Rightarrow GM_T = gR_T^2$$

Sustituyendo en la expresión de r_o

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{gR_T^2 T_o^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,81 * (6,37 \cdot 10^6)^2 * (24 * 3600)^2}{4\pi^2}} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

1.2.-

$$v_o = \sqrt{\frac{GM_T}{r_o}} = R_T \sqrt{\frac{g}{r_o}} = 6,37 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{9,81}{4,22 \cdot 10^7}} = 3,07 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

1.3.- Usamos la definición de momento cinético y tenemos en cuenta la igualdad entre fuerza centrípeta y fuerza de atracción gravitatoria

$$L_o = r_o m v_o = \frac{GM_T}{v_o^2} m v_o = \frac{gR_T^2 m}{v_o} \quad (1)$$

La energía mecánica es la suma de la cinética y potencial

$$E_o = \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{r_o} - \frac{GM_T m}{r_o} = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{r_o} = -\frac{1}{2} m \frac{gR_T^2}{r_o} = -\frac{1}{2} m v_o^2 \quad (2)$$

Cuestión 2

2.1.- Determinar los parámetros de la nueva, semi-latus-rectum l , y excentricidad ε , en función de r_o y β .

Teniendo en cuenta que la fuerza del motor está dirigida en la dirección de r_o , su momento es nulo y por tanto el momento angular L_o no varía. En el enunciado del

problema se nos da la ecuación $l = \frac{L^2}{GMm^2}$ y sustituimos L por L_o y aplicamos la ecuación

(1).

$$l = \frac{L_o^2}{GM_T m^2} = \frac{\frac{g^2 R_T^4 m^2}{v_o^2}}{GM_T m^2} = \frac{g^2 R_T^4}{g R_T^2 v_o^2} = \frac{g R_T^2}{v_o^2} = r_o$$

En la expresión de la nueva energía mecánica E emplearemos la relación (2)

$$E = \frac{1}{2} m (v_o^2 + \Delta v^2) - G \frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_o^2 - G \frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m \Delta v^2 = -\frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} m \Delta v^2$$

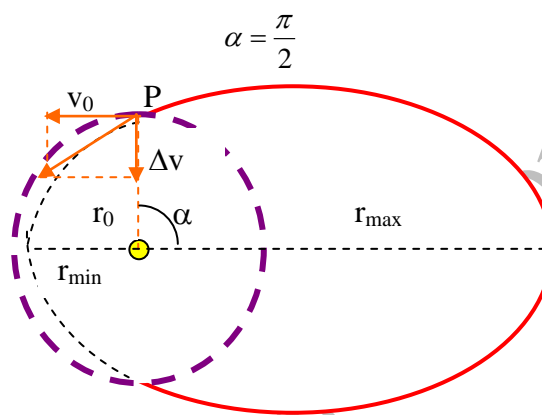
Como $\beta = \frac{\Delta v}{v_o}$, se deduce; $E = -\frac{1}{2} m v_o^2 + \frac{1}{2} m \beta^2 v_o^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 (\beta^2 - 1) \quad (3)$

Para obtener la excentricidad de la órbita $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}$ hacemos uso de las expresiones (1) y (3)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_o^2}{G^2M_T^2m^3}} = \sqrt{1 + \frac{2 \frac{1}{2}mv_o^2(\beta^2 - 1) * \frac{g^2R_T^4m^2}{v_o^2}}{G^2M_T^2m^3}} = \sqrt{1 + \frac{(\beta^2 - 1) g^2R_T^4}{(gR_T^2)^2}} = \beta$$

2.2.- Calcular el ángulo α entre el eje mayor de la nueva órbita y el vector de posición

En la figura inferior están dibujadas las órbitas antigua y nueva. En la nueva órbita la Tierra es uno de los focos de la elipse. Se ha calculado que $l = r_o$ y de la definición de semi-latus-rectum, como la recta que une el foco de la elipse con un punto de ella tal que esta recta es perpendicular al semieje mayor.



2.3 .- Encontrar la expresión analítica del perigeo r_{\min} y apogeo r_{\max} respecto del centro de la Tierra, en función de r_o y β y calcular sus valores numéricos cuando $\beta = 1/4$.

Dado que la fuerza del motor actúa de forma instantánea y en dirección perpendicular, no produce trabajo y se conserva la energía y el momento angular

$$\frac{1}{2}m(v_o^2 + \Delta v^2) - G \frac{M_T m}{r_o} = \frac{1}{2}mv_p^2 - G \frac{M_T m}{r_p} \quad ; \quad mv_o r_o = mv_p r_{\min}$$

Despejando de la segunda ecuación v_p y sustituyendo en la primera y recordando que $\beta = \frac{\Delta v}{v_o}$ y $GM_T = gR_T^2$, resulta:

$$v_o^2 + \beta^2 v_o^2 - \frac{2gR_T^2}{r_o} = \frac{v_o^2 r_o^2}{r_{\min}^2} - \frac{2gR_T^2}{r_{\min}}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$(3,07 \cdot 10^3)^2 \left(1 + \frac{1}{16}\right) - \frac{2 * 9,81 * (6,37 \cdot 10^6)^2}{4,22 \cdot 10^7} = \frac{(3,07 \cdot 10^3)^2 (4,22 \cdot 10^7)^2}{r_{\min}^2} - \frac{2 * 9,81 * (6,37 \cdot 10^6)^2}{r_{\min}}$$

Operando

$$-0,89 + \frac{7,96 \cdot 10^7}{r_{\min}} = \frac{1,68 \cdot 10^{15}}{r_{\min}^2}$$

Si hacemos $b = \frac{1}{r_{\min}}$, nos queda la ecuación de segundo grado

$$1,68 \cdot 10^{15} b^2 - 7,96 \cdot 10^7 b + 0,89 = 0$$

La resolución de esta ecuación conduce a $b_1 = 2,93 \cdot 10^{-8}$ y $b_2 = 1,81 \cdot 10^{-8}$ y de aquí:

$$r_{\max} = 5,5 \cdot 10^7 \text{ m y } r_{\min} = 3,4 \cdot 10^7 \text{ m}$$

2.4.- Determinar el periodo de la nueva órbita, T, en función de T_0 y β y calcular su valor numérico para $\beta = 1/4$.

De acuerdo con la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3} \Rightarrow T^2 = \frac{T_0^2 a^3}{r_0^3}$$

Teniendo en cuenta que $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{(5,5 + 3,4) \cdot 10^7}{2} = 4,45 \cdot 10^7 \text{ m}$

$$T = \sqrt{\frac{(24\text{h})^2 * (4,45 \cdot 10^7)^3}{(4,22 \cdot 10^7)^3}} \approx 26 \text{ h}$$

Cuestión 3

3.1.- Calcular el valor mínimo de β_{esc} necesario para que el satélite abandone el campo gravitatorio terrestre.

Si el satélite abandona su órbita y se dirige al infinito, su energía potencial es nula y su energía cinética mínima es también nula. La energía total del satélite se ha calculado en la expresión (3)

$$\frac{1}{2} m v_0^2 (\beta^2 - 1) = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

3.2.- La energía del satélite cuando está a la distancia mínima de la tierra es:

$$\frac{1}{2} m v_{\text{amin}}^2 - G \frac{M_T m}{r_{\text{amin}}} = 0$$

La conservación del momento angular conduce a $m v_0 r_0 = m v_{\text{amin}} r_{\text{amin}} \Rightarrow v_{\text{amin}} = \frac{v_0 r_0}{r_{\text{amin}}}$

Sustituyendo en la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $GM_T = gR_T^2$ y que

$$v_0 = R_T \sqrt{\frac{g}{r_0}} \Rightarrow r_0 = \frac{g R_T^2}{v_0^2} \text{ (vea el apartado 1.2)}$$

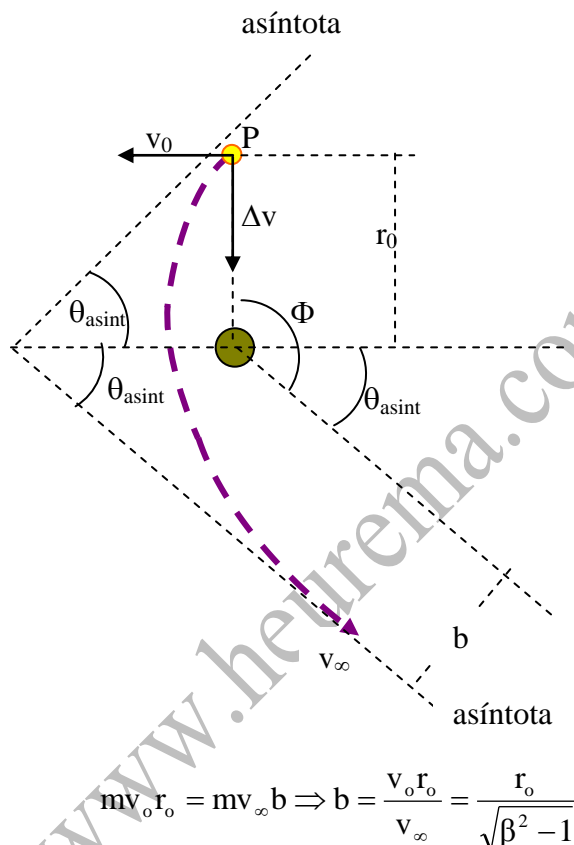
$$\frac{1}{2} \frac{v_0^2 r_0^2}{r_{\text{amin}}^2} - \frac{GM_T}{r_{\text{amin}}} = 0 \Rightarrow \frac{v_0^2 r_0^2}{r_{\text{amin}}^2} = \frac{2gR_T^2}{r_{\text{amin}}} \Rightarrow r_{\text{amin}} = \frac{v_0^2 r_0^2}{2gR_T^2} = \frac{r_0^2}{2r_0} = \frac{r_0}{2}$$

Cuestión 4

4.1.- Ahora la energía potencial en el infinito es cero pero la cinética tiene un determinado valor

$$\frac{1}{2}mv_0^2(\beta^2 - 1) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \Rightarrow v_\infty = v_0\sqrt{\beta^2 - 1}$$

4.2.- En la figura se ha dibujado la trayectoria hacia el infinito del satélite. Para calcular b aplicamos el principio de conservación del momento angular



4.3.- La ecuación de la hipérbola según la ayuda del problema es

$$r(\theta) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos\theta}$$

Cuando \$r\$ tiende a infinito \$1 - \varepsilon \cos\theta\$ tiende a cero y \$\theta\$ tiende a ser \$\theta_{asin}\$

$$\cos\theta_{asin} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \cos\theta_{asin} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\frac{3}{2}\beta_{esc}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_{asin} = 0,84 \text{ rad}$$

$$\varphi = 0,84 + \frac{\pi}{2} = 2,41 \text{ rad} = 138^\circ$$

II.-MEDIDA DE MAGNITUDES ELÉCTRICAS

2.-Las transformaciones científicas y tecnológicas ocurridas durante el siglo XIX produjeron la convincente necesidad de tener magnitudes eléctricas patrones aceptadas universalmente. La opinión es que las nuevas unidades absolutas deberían solamente depender de los patrones de longitud, masa y tiempo establecidos después de la Revolución Francesa. Un intenso trabajo experimental, para ajustar los valores de estas unidades, fue realizado entre los años 1861 y 1912. Aquí se proponen tres estudios.

Determinación del ohmio (Kelvin)

Una bobina circular de N vueltas, radio a y resistencia R gira con velocidad angular constante ω respecto de un diámetro en el seno de un campo magnético $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$.

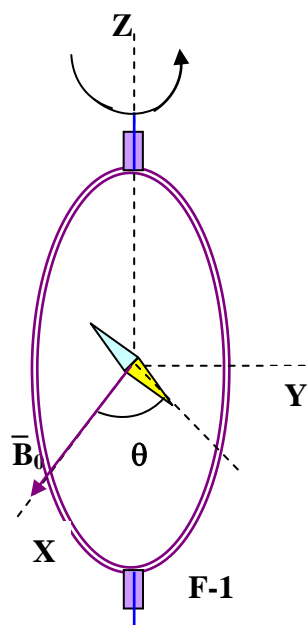
1.- Calcular la fuerza electromotriz ε inducida en la bobina y la potencia media $\langle P \rangle^*$ necesaria para mantener la bobina en movimiento. Despreciar la autoinducción en la propia bobina.

*El valor medio $\langle X \rangle$ de una cantidad $X(t)$ en un proceso periódico T ,

$$\text{es: } \langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

Una brújula pequeña se coloca en el centro de la bobina, tal como se muestra en la figura F-1 y puede rotar libremente alrededor del eje Z en un plano horizontal, pero no puede seguir la rápida rotación de la bobina.

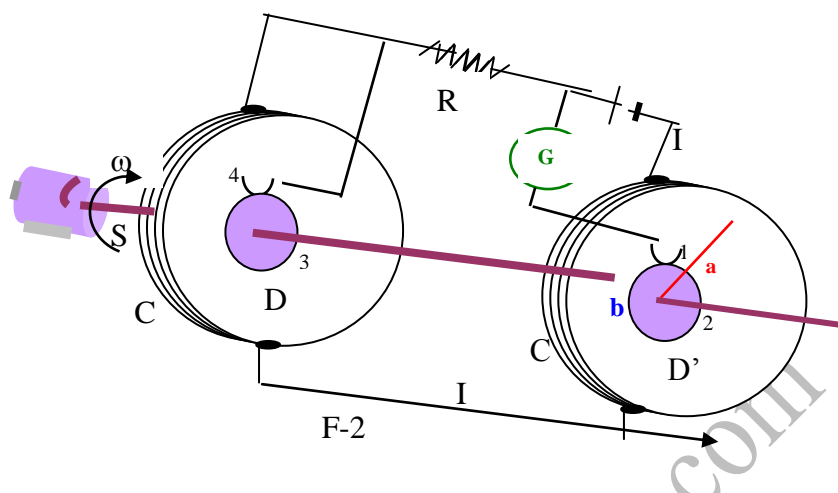
2.-Una vez que se alcanza el régimen estacionario la brújula se coloca en una dirección que forma un ángulo θ con el eje X . Calcular la resistencia R de la bobina en función de este ángulo y los otros parámetros del sistema.



Lord Kelvin utilizó este método en 1860 para obtener el patrón absoluto del ohmio. Con la finalidad de evitar la rotación de la bobina Lorenz ideó

un método diferente utilizado por Rayleigh y Ms Sidgwick , el cual analizamos en los próximos párrafos.

Determinación del ohmio (Rayleigh , Sidgwick)



El dispositivo experimental se indica en la figura F-2. Consiste en dos discos metálicos idénticos D y D' del mismo radio b , montados sobre un eje SS' .

Un motor hace girar al conjunto con velocidad angular ω , la cual puede cambiarse para medir R . Dos bobinas idénticas C y C' (de radio a y N vueltas cada una) rodean a los discos. Ellos están conectados de tal manera que la corriente I fluye a través de ellos en direcciones opuestas. El dispositivo en su conjunto sirve para medir la resistencia R .

3.- Suponer que la corriente I fluye a través de las bobinas C y C' creando un campo magnético uniforme alrededor de D y D' y cuyo valor es igual al creado en el centro de la bobina. Calcular la fuerza electromotriz ε inducida entre los anillos 1 y 4, se supone que la distancia entre las bobinas es mucho mayor que su radio, esto es, $a \gg b$.

Los discos se conectan al circuito mediante unas escobillas y el galvanómetro G detecta la corriente a través del circuito 1-2-3-4.

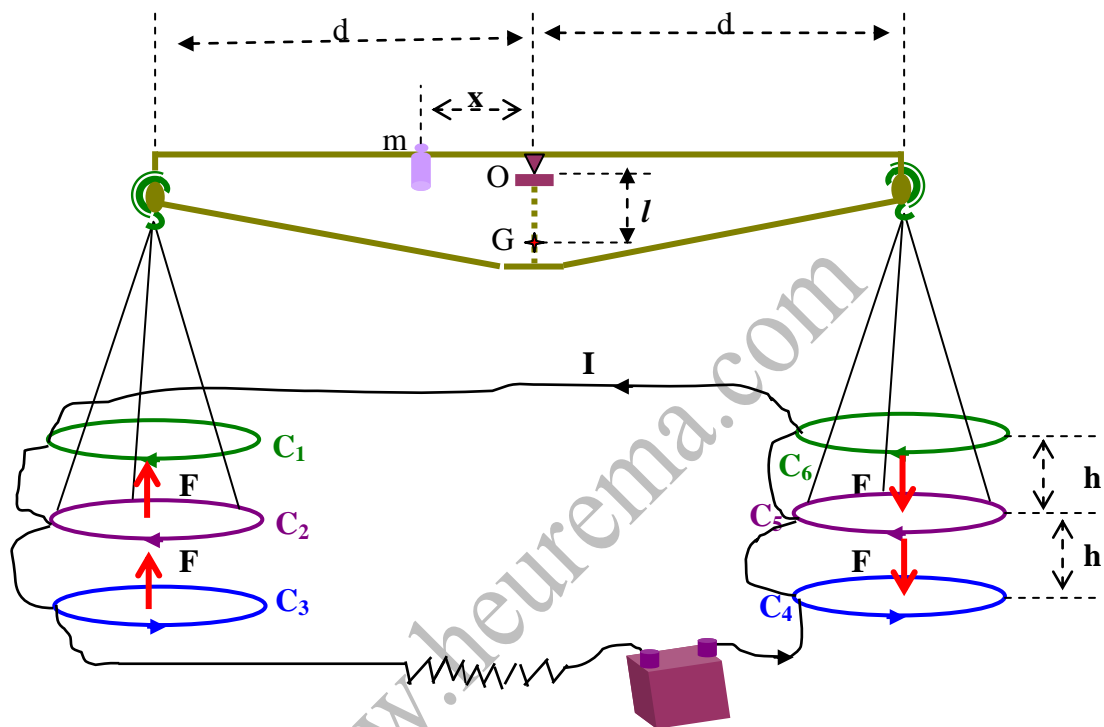
4.- La resistencia R se mide cuando G marca cero. Encontrar R en función de los parámetros del circuito.

Determinación del amperio

Cuando pasa la corriente a través de dos conductores y se mide la fuerza entre ellos es posible determinar la intensidad de la corriente. La "balanza de corrientes" diseñada por Lord Kelvin en 1882 se basa en este método. Consiste en seis idénticas bobinas C_1, C_2, \dots, C_6 , de radio a conectadas en serie. Como indica la figura F-3, las bobinas fijas C_1, C_3, C_4

y C_6 están en dos planos horizontales separadas por una pequeña distancia $2h$. Las bobinas C_2 y C_3 están unidas a los brazos de una balanza y se mantienen en equilibrio equidistante de ambos planos.

La corriente I fluye por las bobinas de modo que la fuerza magnética sobre C_2 es hacia arriba y sobre C_5 hacia abajo. Una masa m situada a una distancia x del punto de suspensión del brazo se requiere colocar para restaurar la posición de equilibrio cuando pasa la corriente por las bobinas.



5.- Calcular la fuerza F sobre C_2 debido a la interacción magnética con C_1 . Para simplificar se supone que la fuerza por unidad de longitud es la que aparece cuando dos hilos rectos y de gran longitud llevan corrientes paralelas.

6.- La corriente I se mide cuando la balanza se encuentra en equilibrio. Encontrar el valor de I en función de los parámetros físicos del sistema. Las dimensiones del aparato son lo suficientemente grandes para despreciar las interacciones entre las bobinas de la izquierda y de la derecha.

Sea M la masa de la balanza (excepto m y las partes que cuelgan), G es el centro de masas y l la distancia

7.- El equilibrio de la balanza es estable frente a desviaciones pequeñas δz en la altura de C_2 y $-\delta z$ en C_5 . Calcular el máximo valor δz_{max} para el que la balanza aún puede volver a la posición de equilibrio cuando se deja en libertad, (considerar que los centros permanecen alineados).

Puede utilizar las siguientes integrales

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx = 0; \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

Utilice las aproximaciones

$$\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \text{ ó } \frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2 \text{ para } \beta \ll 1, \text{ y } \sin \theta \approx \tan \theta \text{ para } \theta \text{ pequeño}$$

1.- Calcular la fuerza electromotriz ε inducida en la bobina y la potencia media $\langle P \rangle$ * necesaria para mantener la bobina en movimiento.

Supongamos que en el tiempo cero el plano de la bobina coincide con el plano YZ. Al cabo de un tiempo t el vector superficie de la bobina forma un ángulo θ con la dirección del campo magnético. El flujo que atraviesa la bobina en ese instante es:

$$\Phi = \vec{B}_0 \cdot \vec{N}\vec{S} = B_0 N \pi a^2 \cos \theta = B_0 N \pi a^2 \cos \omega t$$

La fuerza electromotriz inducida

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 N \pi a^2 \omega \sin \omega t$$

La potencia instantánea

$$P = \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{(B_0 N \pi a^2 \omega)^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

Y la potencia media

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(B_0 N \pi a^2 \omega)^2 \sin^2 \omega t}{R} dt = \frac{(B_0 N \pi a^2 \omega)^2}{R} * \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t \, dt = \frac{(B_0 N \pi a^2 \omega)^2}{R} * \frac{\omega}{2\pi} * \frac{\pi}{\omega}$$

$$\langle P \rangle = \frac{(B_0 N \pi a^2 \omega)^2}{2R}$$

2.- Calcular la resistencia R de la bobina en función de este ángulo y los otros parámetros del sistema.

Por la bobina circula una intensidad I la cual origina un campo magnético

$$B_b = \frac{\mu_0 N I}{2a} = \frac{\mu_0 N \frac{\varepsilon}{R}}{2a} = \frac{\mu_0 N B_0 N \pi a^2 \omega \sin \omega t}{2aR} = \frac{\mu_0 N^2 B_0 \pi a^2 \omega \sin \omega t}{2R} = K \sin \omega t$$

En la figura 1 se observa el campo \vec{B}_b , que tiene dos componentes sobre los ejes coordenados, cuyos módulos son:

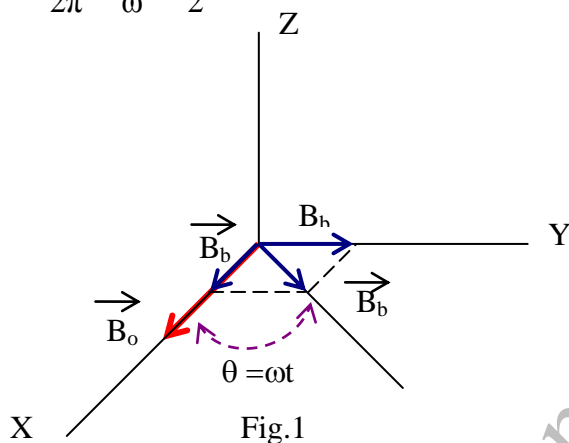
$$B_{bx} = K \sin \omega t \cos \omega t \quad ; \quad B_{by} = K \sin^2 \omega t$$

Sus valores promedios

$$\langle B_{bx} \rangle = \frac{1}{T} K \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t \, dt = 0$$

$$\langle B_{by} \rangle = \frac{1}{T} K \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{\omega}{2\pi} K \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t \, dt =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} K \frac{\pi}{\omega} = \frac{K}{2}$$



Si se sustituye K por su valor

$$\langle \bar{B}_{by} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 B_0 \pi a \omega}{4R} \bar{j}$$

El valor promedio del campo total es:

$$\langle \bar{B}_T \rangle = B_0 \bar{i} + \frac{\mu_0 N^2 B_0 \pi a \omega}{4R} \bar{j} \Rightarrow \tan \theta = \frac{B_{by}}{B_0} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R} \Rightarrow R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \tan \theta}$$

Determinación del ohmio (Rayleigh, Sidgwick)

3.- Calcular la fuerza electromotriz ϵ inducida entre los anillos 1 y 4

Si observamos uno de los discos D de frente tenemos la figura 2

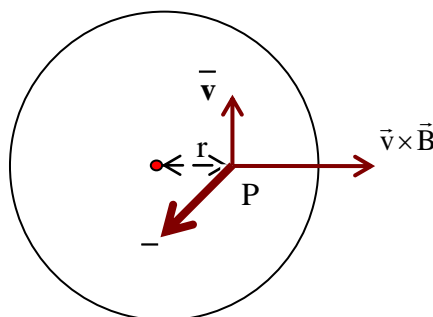


Fig.2

Las cargas negativas sufren una fuerza $\vec{F} = -q\vec{v} \times \vec{B}$ y tienden a acumularse en el centro del disco mientras que las positivas lo hacen en la periferia, por tanto, se forma una batería, cuya fuerza electromotriz vale:

$$\varepsilon = \int_0^b \vec{E}_m \cdot d\vec{r} = \int_0^b vB \, dr = b\omega \int_0^b r \, dr = B\omega \frac{b^2}{2}$$

El valor de B corresponde al de una bobina en su centro $B = N \frac{\mu_0 I}{2a}$, por lo que

$$\varepsilon = \frac{N\mu_0 I \omega b^2}{4a}$$

Al ser dos discos la fuerza electromotriz total es:

$$\varepsilon_T = \frac{N\mu_0 I \omega b^2}{2a}.$$

4.- Encontrar R en función de los parámetros del circuito.

El circuito eléctrico que corresponde a la figura F-2 es el de la figura 3.

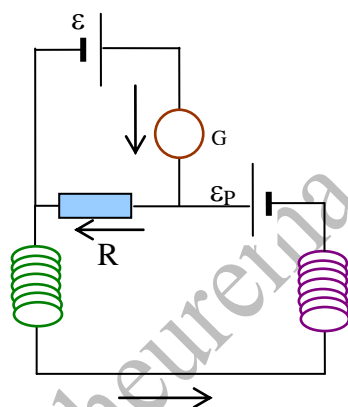


Fig. 3

Cuando por el galvanómetro no pase corriente, por la resistencia R circula la corriente I debida a la batería ε_p . Aplicamos el segundo lema de Kirchoff a la malla superior

$$\sum IR = \sum \varepsilon \Rightarrow R = \frac{\varepsilon_p}{I} = \frac{N\mu_0 I \omega \omega^2}{2aI} = \frac{N\mu_0 \omega b^2}{2a}$$

Determinación del amperio

5.- Calcular la fuerza F sobre C₂ debido a la interacción magnética con C₁.

El módulo de la fuerza por unidad de longitud entre dos corrientes paralelas vale:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

En el problema $I_1 = I_2 = I$, y la distancia $d = h$. La fuerza que recibe C₂ es:

$$F_{C_2} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi h} * 2\pi a = \frac{\mu_0 I^2 a}{h}$$

6.- Encontrar el valor de I en función de los parámetros físicos del sistema.

En la figura 4 se representa esquemáticamente las fuerzas y los momentos respecto de O.

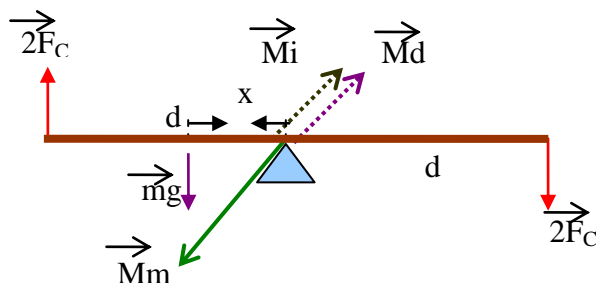


Fig.4

Mi es el momento respecto de O de la fuerza situada a la izquierda $2F_C$, Md el momento de la fuerza situada a la derecha $2F$ y Mm es el momento de la masa m respecto de O. Cuando el sistema está en equilibrio

$$M_m = M_i + M_d \quad \longrightarrow \quad mgx = 2F_{Cd} + 2F_{Cd} = 4F_{Cd}$$

Sustituyendo el valor de F_C

$$mgx = 4 \frac{\mu_0 I^2 a}{h} d \quad (1) \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{mgxh}{4\mu_0 ad}}$$

7.- Calcular el máximo valor δz_{\max}

En la figura 5 se indica un esquema de la desviación de la balanza un cierto ángulo

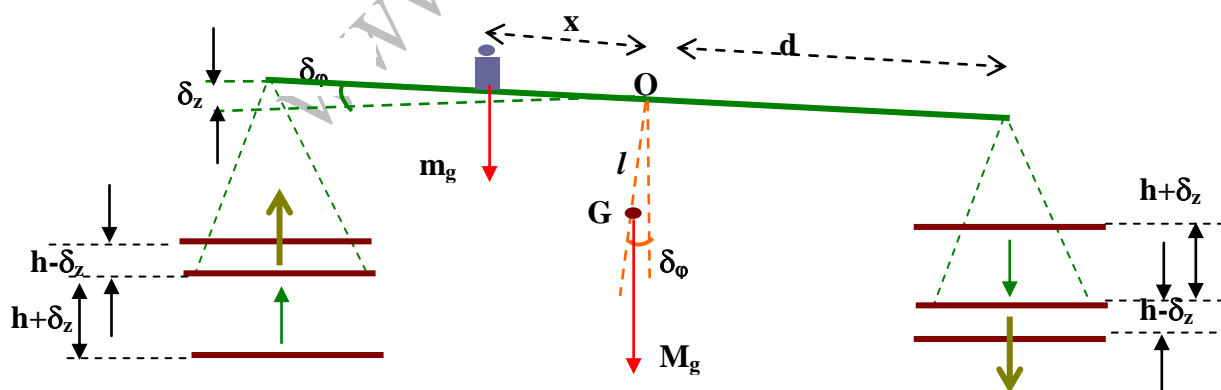


Fig. 5

En el lado izquierdo las fuerzas sobre C_2 son: $\frac{\mu_0 I^2 a}{h - \delta z} + \frac{\mu_0 I^2 a}{h + \delta z}$

En el lado derecho las fuerzas sobre C_5 son: $\frac{\mu_0 I^2 a}{h + \delta z} + \frac{\mu_0 I^2 a}{h - \delta z}$

El momento de las fuerzas sobre C_2 , es perpendicular al plano de la figura 5 y dirigido hacia adentro y su módulo es:

$$\left(\frac{\mu_o I^2 a}{h - \delta z} + \frac{\mu_o I^2 a}{h + \delta z} \right) d \cos \delta \varphi$$

El momento de las fuerzas sobre C_5 , es perpendicular al plano de la figura 5 y dirigido hacia adentro y su módulo es

$$\left(\frac{\mu_o I^2 a}{h - \delta z} + \frac{\mu_o I^2 a}{h + \delta z} \right) d \cos \delta \varphi$$

El momento total es la suma de ambos momentos

$$\begin{aligned} 2\mu_o I^2 a \left(\frac{1}{h - \delta z} + \frac{1}{h + \delta z} \right) d \cos \delta \varphi &\Rightarrow 2\mu_o I^2 a \left(\frac{2h}{h^2 - \delta z^2} \right) d \cos \delta \varphi \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4\mu_o I^2 a}{h} \left(\frac{1}{1 - \frac{\delta z^2}{h^2}} \right) d \cos \delta \varphi \end{aligned}$$

Si utilizamos la aproximación del enunciado

$$\frac{4\mu_o I^2 a}{h} \left(1 + \frac{\delta z^2}{h^2} \right) d \cos \delta \varphi \quad (2)$$

Por otra parte tenemos los momentos creados por la masa M del brazo y por la pesa m que valen

$$Mgl \sin \delta \varphi + mgx \cos \delta \varphi \quad (3)$$

Si el momento (3) es mayor que el momento (2) la balanza intenta retornar a su posición de equilibrio, la posición límite ocurre cuando sean iguales

$$Mgl \sin \delta \varphi + mgx \cos \delta \varphi = \frac{4\mu_o I^2 a}{h} \left(1 + \frac{\delta z^2}{h^2} \right) d \cos \delta \varphi$$

Utilizando la ecuación (1) $mgx = 4 \frac{\mu_o I^2 a}{h} d$

$$Mgl \sin \delta \varphi_{\max} + mgx \cos \delta \varphi_{\max} = mgx \left(1 + \frac{\delta z_{\max}^2}{h^2} \right) \cos \delta \varphi_{\max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mgl \sin \delta \varphi_{\max} = mgx \frac{\delta z_{\max}^2}{h^2} \cos \delta \varphi_{\max} \Rightarrow \text{tag} \delta \varphi_{\max} = \text{tag} \frac{\delta z_{\max}}{d} \approx \frac{\delta z_{\max}}{d} = \frac{mgx \frac{\delta z_{\max}^2}{h^2}}{Mgl} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta z_{\max} = \frac{Mlh^2}{mx d}$$

III. NEUTRONES EN UN CAMPO GRAVITACIONAL

2.-En el mundo familiar clásico, el rebote elástico de una bola en la superficie de la Tierra es un ejemplo ideal de movimiento perpetuo. La bola se encuentra atrapada: no puede ir por debajo de la superficie o por encima del punto de retorno, permanece en este estado cayendo y subiendo una y otra vez. Solamente la resistencia del aire o choques inelásticos pueden detener el proceso y esto será ignorado en lo que sigue.

Un grupo de físicos del Instituto Laue-Langevin in Grenoble (V.V. Nesvizhevsky y colaboradores “ Quantum states of neutrons in the Earth gravitational field” Nature 415 (2002) 297 . Phys.Rev. D 67,102002(2003)) demostraron experimentalmente el comportamiento de los neutrones en el campo gravitatorio terrestre. En el experimento, a los neutrones que se desplazan por la izquierda se les permite caer hacia un cristal que actúa como espejo de neutrones , donde rebotaban elásticamente hasta la altura inicial una y otra vez.

El dispositivo experimental está esquematizado en la figura F-1. Consiste en una rendija W , el espejo de neutrones M (a la altura $z = 0$), el absorbedor de neutrones A (a la altura $z=H$ y con una longitud L) y el detector de neutrones D .

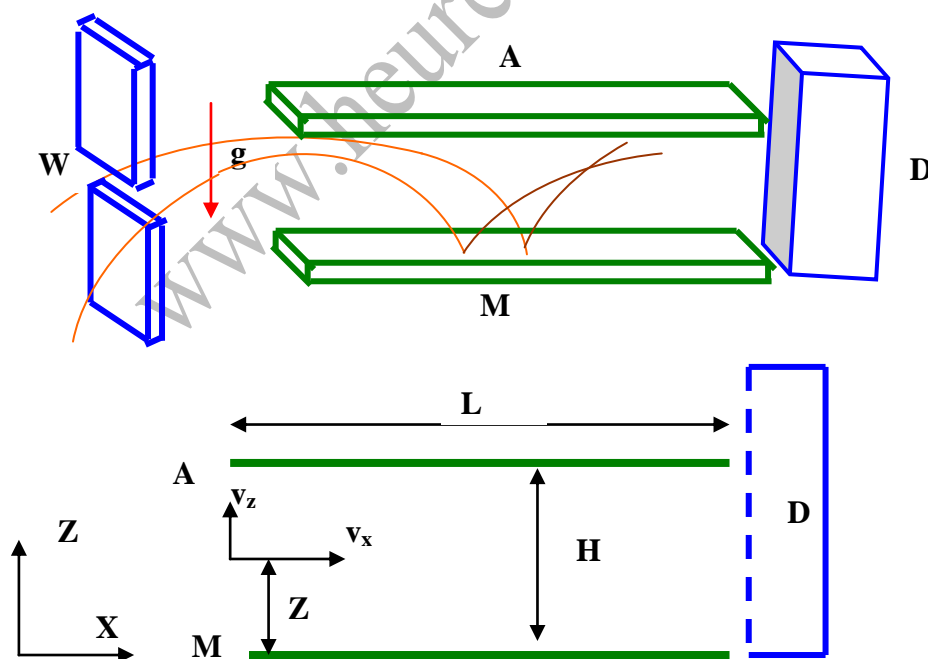


Fig. F-

El haz de neutrones vuela con velocidad horizontal constante v_x desde W hasta D, a través de la cavidad situada entre A y M. Todos los neutrones que alcanzan la superficie A son absorbidos y desaparecen del experimento. Los que alcanzan la superficie M se reflejan elásticamente. El detector D cuenta la tasa $N(H)$, el número de neutrones que alcanzan D por unidad de tiempo. Los neutrones penetran en la cavidad con un amplio rango de velocidades verticales positivas y negativas, v_z . Una vez dentro de la cavidad se desplazan entre el espejo inferior y el absorbedor superior.

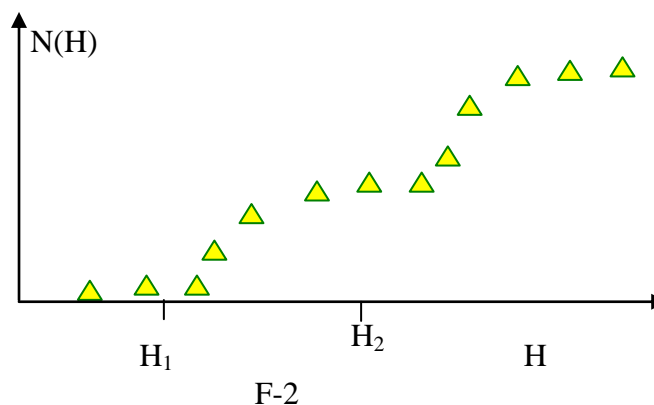
1.- Determinar clásicamente el rango de velocidades verticales (v_z) de los neutrones, que penetran a una altura z , y pueden alcanzar el detector D. Admitir que la longitud L es mucho mayor que cualquier otra longitud del problema.

2.- Calcular clásicamente la longitud mínima L_c de la cavidad para asegurar que todos los neutrones fuera del rango de las velocidades anteriores, a pesar de los valores de z , son absorbidos por A. Utilice $v_x = 10$ m/s y $H = 50$ μm .

La tasa de llegada $N(H)$ la mide D y se espera que crezca linealmente con H .

3.- Calcular clásicamente la tasa $N_c(H)$ suponiendo que todos los neutrones llegan a la cavidad con velocidad vertical v_z a una altura z , siendo los valores de v_z y z igualmente probables. Dar la respuesta en términos de ρ , número constante de neutrones por unidad de tiempo, por unidad de velocidad vertical y por unidad de altura que entran en la cavidad con velocidad vertical v_z y altura z .

El experimento de Grenoble está en desacuerdo con las predicciones clásica, ya que el valor de $N(H)$ incrementa de forma clara cuando H adquiere algunas alturas críticas H_1, H_2, \dots (fig.F-2)



En otras palabras el experimento muestra que el movimiento vertical de los neutrones rebotando en el espejo esta cuantizado. Según el lenguaje que Bohr y Sommerfeld utilizaron para obtener los niveles de energía en el átomo de hidrógeno, se puede escribirse "La acción S de estos neutrones a lo largo de la dirección vertical es un múltiplo entero de la constante de Planck", S está dado por:

$$S = \int p_z(z) dz = nh \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde $p(z)$ es la componente vertical del momento clásico y la integral se extiende a un rebote completo. Solamente los neutrones con estos valores de S están permitidos en la cavidad.

4.- Calcule las alturas de vuelta H_n y los niveles de energía. En (asociados al movimiento vertical) utilizando la condición cuántica Bohr-Sommerfeld. Dé el resultado numérico para H_1 en μm y para E_1 en eV.

1.- Determinar clásicamente el rango de velocidades verticales (v_z) de los neutrones, que penetran a una altura z ,

La energía cinética de cualquier neutrón está dada por la expresión:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

La componente primera de la energía cinética se conserva pues v_x es constante, la segunda componente se puede transformar en energía potencial. Los neutrones para los que la suma de su energía cinética $\left(\frac{1}{2} m v_z^2\right)$ y potencial (mgz) sea igual o mayor que mgH serán absorbidos por A y no llegarán a D.

Matemáticamente la condición necesaria para que los neutrones no sean absorbidos por A es:

$$\frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz \leq MgH \quad \Rightarrow \quad v_z^2 \leq 2g(H-z)$$

La última condición equivale a escribir:

$$-\sqrt{2g(H-z)} \leq v_z \leq \sqrt{2g(H-z)}$$

El rango de velocidades de los neutrones que llegan a D está comprendido en el intervalo anterior

2.- Calcular clásicamente la longitud mínima L_c

Los neutrones que estén fuera del intervalo anterior deben ser absorbidos por A. Ahora puede preguntarse ¿cuáles son los más difíciles para llegar a A?

Supongamos que $z = H$, entonces los neutrones para los que su v_z sea mayor o igual que cero deben ser absorbidos. Si $v_z = 0$, ese neutrón describirá una rama de parábola chocará contra el espejo M rebotará volverá a describir otra rama de parábola y llegará al absorbedor (esta es la condición límite). Si $v_z > 0$ hará lo mismo pero el alcance horizontal de este neutrón será menor que el que tenga $v_z = 0$.

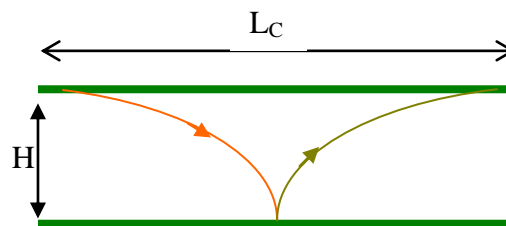


Fig. 1

En definitiva el neutrón que salga de $z = H$ y $v_z = 0$ será el que necesite un mayor valor de L para que sea absorbido. La figura 1 ayuda a entender este hecho. El contacto del neutrón con el espejo se produce cuando el alcance horizontal sea igual a $L_c/2$. las ecuaciones del movimiento parabólico son:

$$z = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad \frac{L_c}{2} = v_x t$$

Cuando $z = 0$, $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ y

$$\frac{L_c}{2} = v_x \sqrt{\frac{2H}{g}} = 10 \sqrt{\frac{2 * 50 * 10^{-6}}{9,81}} = 0,0319 \text{ m} \Rightarrow L_c = 0,064 \text{ m}$$

3.-Calcular clásicamente la tasa $N_c(H)$ suponiendo que todos los neutrones llegan a la cavidad con velocidad vertical v_z a una altura z ,

Supongamos que a una altura z existe una rendija dz por donde pasan los neutrones. Aquellos para los que su velocidad esté comprendida en el intervalo

$$-\sqrt{2g(H-z)} \leq v_z \leq \sqrt{2g(H-z)}$$

llegarán al detector D y éste dará una tasa de llegada por unidad de tiempo para esa altura cuyo valor es:

$$\rho \left[\sqrt{2g(H-z)} - (-\sqrt{2g(H-z)}) \right] dz = 2\rho \sqrt{2g(H-z)} dz$$

Si queremos contar todos los que llegan al detector D hemos de sumar todas las contribuciones de los distintos dz en el intervalo entre cero y H; en definitiva integrar la anterior expresión

$$N(H) = \int_0^H 2\rho \sqrt{2g(H-z)} dz$$

Para integrar la anterior expresión hacemos el cambio de variable $2g(H-z) = b^2$ y de ella deducimos que $-2g dz = 2b db$

La tasa de neutrones detectados en D es:

$$N(H) = -2\rho \int_0^H b * \frac{b \, db}{g} = -\frac{2\rho}{g} * \left[\frac{b^3}{3} \right]_0^H = -\frac{2\rho}{g} \left[\frac{(2g[H-z])^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^H = \frac{2\rho}{3g} * (2gH)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2\rho}{3} \frac{2^{\frac{3}{2}} * g^{\frac{3}{2}}}{g} H^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$$

4.- Calcule las alturas de vuelta H_n y los niveles de energía E_n , (asociados al movimiento vertical) utilizando la condición cuántica Bohr-Sommerfeld. Dé el resultado numérico para H_1 en μm y para E_1 en eV

De acuerdo con lo anterior, para un neutrón que caiga desde una altura H y vuelva a ascender hasta llegar justamente al detector antes de tocar en el absorbedor A, su impulso (acción) vertical ha de valer $I_z = 2 \int_0^H m v_z \, dz$ en la cual se ha de poner el valor límite de la velocidad $v_z = \sqrt{2g(H-z)}$, tendremos: $I_z = 2m \int_0^H \sqrt{2g(H-z)} \, dz$

Integral que por el mismo procedimiento anterior, nos da, $I_z = \frac{4}{3} m \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}$

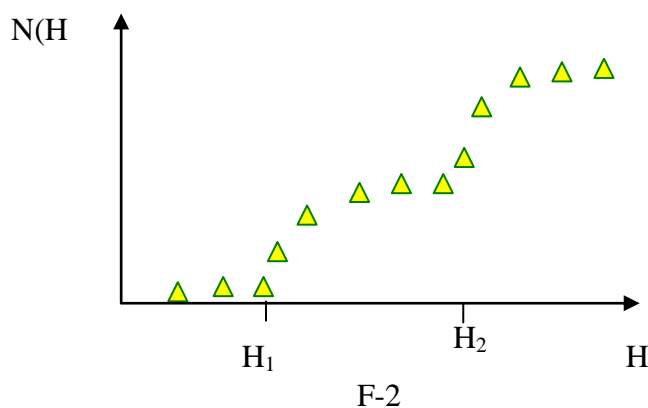
Utilizando la condición cuántica Bohr-Sommerfeld para cuantificar esta magnitud,

$$I_z = \frac{4}{3} m \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} = n \cdot h$$

De donde la altura cuantificada H_n
$$H_n = \left[\frac{3}{4} \frac{h}{m \sqrt{2g}} \right]^{2/3} \cdot n^{2/3}$$

Y los niveles de energía correspondientes serán: $E_n = m \cdot g \cdot H_n$

$$E_n = \left[\frac{3}{4} \frac{\sqrt{m \cdot g \cdot h}}{\sqrt{2}} \right]^{2/3} \cdot n^{2/3}$$



Aplicaciones numéricas:

Datos, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s; $c = 3,00 \cdot 10^8$ ms⁻¹; $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C; $m_N = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg; $g = 9,81$ m s⁻²;

Para el primer nivel, $n = 1$

$$H_1 = 1,65 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 16,5 \text{ nm} \quad E_1 = m \cdot g \cdot H_1 = 2,71 \cdot 10^{-31} \text{ J} = 1,69 \cdot 10^{-12} \text{ eV}$$

5.- Estimar el tiempo mínimo de vuelo t_q y la longitud mínima L_q de la cavidad, necesaria para observar el primer rango de neutrones que pueden llegar a D. Usar $v_x = 10$ m.s⁻¹.

Según el principio de incertidumbre, los incrementos de tiempo y de energía satisfacen la relación $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$

Durante el tiempo Δt los neutrones se desplazan hacia D una distancia

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t \geq v_x \frac{\hbar}{\Delta E}$$

El mínimo de energía que tiene el neutrón en este nivel es E_1 , así que en la inecuación se pone $\Delta E \approx E_1$ podemos hacer una estimación del tiempo mínimo de vuelo t_q y de la longitud mínima L_q de la cavidad,

$$t_q \approx \frac{\hbar}{E_1} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad L_q \approx v_x \frac{\hbar}{E_1} = 4 \cdot 10^3 \text{ m}$$