

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

XXXI OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. GRAN BRETAÑA 2000

1.- Parte A

*Un saltador de puentes está atado al extremo de una larga cuerda elástica. El saltador salta, a partir del reposo, desde lo alto de un puente y cae dirigiéndose al río que se encuentra debajo. Él no golpea al agua. La masa del saltador es  $m$  y la longitud sin estirar de la cuerda  $L$ . La cuerda posee una constante elástica  $k$  ( fuerza para producir un alargamiento de un metro). La intensidad del campo gravitatorio es  $g$ . Se admite que*

*El saltador es una masa puntual  $m$  atado al extremo de la cuerda*

*La masa de la cuerda es despreciable frente a  $m$*

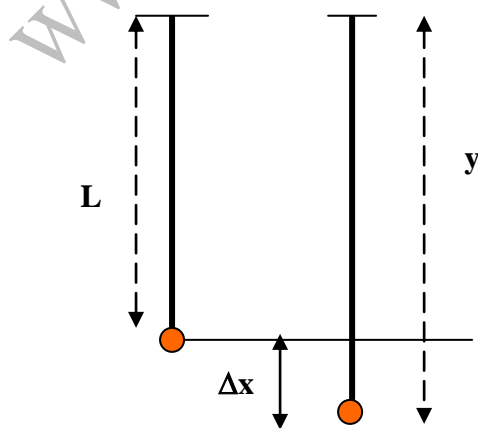
*La cuerda obedece a la ley de Hooke*

*La resistencia del aire no se considera en el salto*

Calcule

- La distancia recorrida por el saltador en su caída antes de que alcance el reposo instantáneo por vez primera*
- La máxima velocidad alcanzada por el saltador durante su caída*
- El tiempo de duración de la caída hasta el instante que alcance el reposo instantáneo por vez primera.*

1A.a).- Designamos con  $y$  a la distancia recorrida por el saltador desde el reposo en el puente hasta que su velocidad instantánea es cero por vez primera

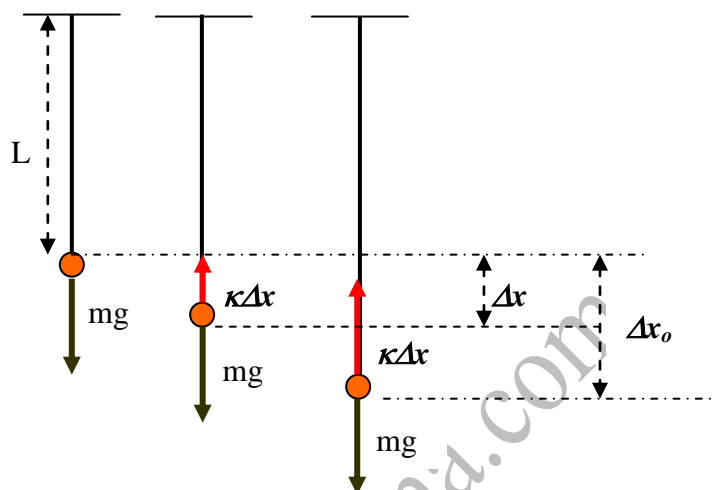


La cuerda se ha estirado  $\Delta x$  cuando el saltador tiene una velocidad instantánea nula. El saltador ha perdido una energía potencial  $mgy$  que ha quedado almacenada en forma de energía elástica en la cuerda.

$$mgy = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}k(y-L)^2 \Rightarrow ky^2 - y(2kL + 2mg) + kL^2 = 0$$

$$y = \frac{(2kL + 2mg) \pm \sqrt{4(kL + mg)^2 - 4k^2L^2}}{2k} = \frac{(kL + mg) \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kLmg}}{k}$$

1A.b)



En el primer dibujo sobre el saltador actúa su propio peso. La caída desde el puente ha sido libre y por consiguiente su velocidad es  $\sqrt{2gL}$ . A partir de ese momento, aparte de su peso, actúa una fuerza vertical y hacia arriba debido a que la cuerda comienza a estirarse. Esta fuerza vale  $k\Delta x$  y es menor que el peso. Por consiguiente el saltador aumenta más su velocidad, pues sigue acelerando hacia abajo. Llega un momento en que el peso y la fuerza ejercida por la cuerda se igualan y a partir de ahí, la fuerza elástica es mayor que el peso y el saltador comienza a frenar. En consecuencia la velocidad máxima la alcanza justamente en el momento en que se igualan las fuerzas.

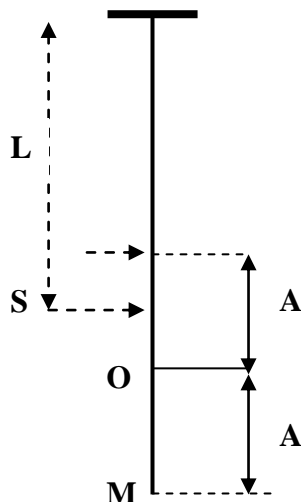
$$k\Delta x_0 = mg$$

La energía potencial perdida por el saltador aparece como energía cinética en el saltador y en elástica en la cuerda

$$mg(L + \Delta x_0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 \Rightarrow 2mg(L + \Delta x_0) = mv_{\max}^2 + k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$2gL + 2g\frac{mg}{k} - \frac{mg^2}{k} = v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$$

1A.c) El saltador una vez que alcanza la posición de velocidad instantánea cero comienza a realizar un movimiento vibratorio armónico cuya posición central O es aquella para la que el peso y la fuerza elástica son iguales, esto es, la posición de aceleración nula y velocidad máxima. Sea A la amplitud de este movimiento



En la posición S el saltador tiene una velocidad  $\sqrt{2gL}$  y en la posición O una velocidad  $\sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}$ . El tiempo que nos piden en la cuestión es

$T_t =$  tiempo de caída libre + tiempo que tarda el saltador en ir desde S a M

Pero el tiempo de S a M es igual al tiempo de R a M menos el tiempo de R a S

El tiempo de caída libre es un movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial nula y vale  $\sqrt{\frac{2L}{g}}$

El tiempo de R a M es la mitad del tiempo de una vibración completa del movimiento vibratorio armónico de amplitud A y vale  $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

El tiempo de R a S,  $t_{RS}$ , es el tiempo que transcurre desde que la velocidad es nula en R hasta que la velocidad en S es  $\sqrt{2gL}$ .

Si comenzamos a contar el tiempo cero en la posición R, la ecuación del movimiento vibratorio armónico es

$$x = A \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad v = -A \omega \sin \omega t$$

Aplicando la última ecuación

$$\sqrt{2gL} = -A \omega \sin \omega t_{RS} \quad (1)$$

Esta ecuación no es suficiente para calcular  $t_{RS}$ . Hacemos uso de la velocidad en O al que corresponde un tiempo de  $T/4$ , siendo T el periodo del movimiento vibratorio armónico

$$\sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k^2}} = -A \omega \sin \frac{2\pi}{T} * \frac{T}{4} = -A \omega \sin \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Dividiendo (1) por (2) y teniendo en cuenta que  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  y  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + \frac{mg}{k}}} = \text{sen } \omega t_{RS} = \text{sen } \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} * t_{RS} = \text{sen } \sqrt{\frac{k}{m}} * t_{RS}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} * t_{RS} = \text{arco seno} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + \frac{mg}{k}}} \Rightarrow t_{RS} = \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ arco seno} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + \frac{mg}{k}}}$$

$$T_t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ arco seno} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + \frac{mg}{k}}}$$

El tiempo de caída hasta el primer instante de velocidad nula es:

$$T_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ arco seno} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + \frac{mg}{k}}}$$

### 1.- Parte B

*Una máquina térmica opera entre dos fuentes de calor de temperaturas  $T_A$  y  $T_B$  (siendo  $T_A > T_B$ ). Cada fuente posee una masa  $m$  y una capacidad calorífica constante  $c$ . Las fuentes permanecen a presión constante y no sufren cambios de estado durante el proceso.*

*1. Obtener una expresión para la temperatura final  $T_o$  alcanzada por las dos fuentes A y B, si la máquina extrae del sistema la máxima cantidad posible de trabajo mecánico que es posible teóricamente.*

*2. Calcular el máximo trabajo obtenido*

*La máquina opera entre dos tanques de agua cuyo volumen es  $2,50 \text{ m}^3$ , estando un tanque a  $350 \text{ K}$  y el otro a  $300 \text{ K}$*

*3. Calcular la máxima cantidad de energía mecánica que se puede obtener.*

*Calor específico del agua =  $4,19 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$*

*Densidad del agua =  $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$*

**1B.1).- Obtener una expresión para la temperatura final  $T_o$** 

Una máquina térmica toma calor de la fuente caliente una parte va a la fuente fría y la diferencia se convierte en trabajo. El trabajo máximo se consigue con un ciclo de Carnot. Se cumple

$$\frac{Q_A}{T_A} = \frac{Q_B}{T_B}$$

Se supone que las dos fuentes permanecen a temperatura constante.

En el caso que nos ocupa esto no es así ya que al extraer calor de la fuente caliente se enfría y la fuente fría se calienta hasta que las temperaturas se igualan. Por eso consideremos un instante en donde la temperatura de la fuente caliente es  $T_{iA}$  y la de la fuente fría  $T_{iB}$  y se extrae de la fuente caliente  $-dQ_A$  de calor y se pasa a la fría  $+dQ_B$ , se

$$-\frac{dQ_A}{T_{iA}} = \frac{dQ_B}{T_{iB}} \Rightarrow -\frac{mcdT_{iA}}{T_{iA}} = \frac{mcdT_{iB}}{T_{iB}} \Rightarrow -\int_{T_A}^{T_o} \frac{dT_{iA}}{T_{iA}} = \int_{T_B}^{T_o} \frac{dT_{iB}}{T_{iB}} \Rightarrow$$

cumple que

$$\Rightarrow \ln \frac{T_A}{T_o} = \ln \frac{T_o}{T_B} \Rightarrow T_o = \sqrt{T_A T_B}$$

**1B.2**

$$W = Q_A - Q_B = -\int_{T_A}^{T_o} mcdT - \int_{T_B}^{T_o} mcdT = -mc(T_o - T_A) - mc(T_o - T_B) = mc(T_A + T_B - 2T_o)$$

**1B.3**

$$W = 2,50 * 1,00 \cdot 10^3 * 4,19 \cdot 10^3 (350 + 300 - 2\sqrt{350 * 300}) = 20,2 \cdot 10^6 \text{ J}$$

**1.- Parte C**

*Se admite que cuando la Tierra se formó los isótopos  $^{238}\text{U}$  y  $^{235}\text{U}$  estaban presentes pero no los productos de su desintegración. La desintegración de ambos isótopos se utiliza para determinar la edad de la Tierra, T.*

*El isótopo  $^{238}\text{U}$  se desintegra con una vida media (periodo de semidesintegración) de  $4,50 \cdot 10^9$  años. Los productos de tal desintegración poseen vidas medias cortas comparadas con el isótopo del uranio y no se tienen en cuenta. La serie radiactiva termina en el isótopo estable  $^{206}\text{Pb}$ .*

*a) Calcular la expresión para el número de átomos de  $^{206}\text{Pb}$ , designado como  $^{206}n$ , formados para un tiempo t, en función del número de átomo.*

actuales de  $^{238}\text{U}$ , designados como  $^{206}\text{N}$ , y de la vida medida del isótopo del uranio.

b) De manera análoga el isótopo  $^{235}\text{U}$  se desintegra con una vida media de 0,710.109 años hasta el isótopo estable  $^{207}\text{Pb}$ . Encontrar la relación entre  $^{207}\text{n}$ ,  $^{235}\text{N}$  y la vida media de este isótopo del uranio

c) Un mineral de uranio mezclado con un mineral de plomo se analiza mediante un espectrómetro de masas. Las concentraciones relativas de los tres isótopos  $^{204}\text{Pb}$ ,  $^{206}\text{Pb}$ , y  $^{207}\text{Pb}$ , medidas por la razón del número de átomos es 1,00 : 29,6 : 22,6 respectivamente. El isótopo  $^{204}\text{Pb}$  se utiliza como referencia y no es de origen radiactivo. El análisis de una muestra de plomo puro da una relación 1,00 : 17,9 : 15,5. La razón  $^{238}\text{N} : ^{235}\text{N}$  es 137:1, calcule una ecuación para T.

d) Suponga que T es mucho mayor que la vida media de ambos isótopos del uranio, obtenga un valor para T

e) Este valor no es significativamente mayor que la vida media del isótopo de uranio 238, pero puede utilizarse para obtener un valor mucho más exacto para T. Estime el valor de la edad de la Tierra dentro de un margen de un 2%.

1C.a) Designamos con  $N_0$  los átomos de uranio 238 existentes en el momento de formación de la Tierra y con N el número actual

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

El número de átomos de plomo 206 es igual a la diferencia de átomos de uranio al principio y actualmente

$$^{206}\text{n} = N_0 - N = \frac{N}{e^{-\lambda t}} - N = N(e^{\lambda t} - 1) \Rightarrow ^{206}\text{n} = ^{238}\text{N}(e^{\lambda t} - 1)$$

Si tenemos en cuenta que la vida media es el tiempo que transcurre para que se desintegren la mitad de los átomos de una especie radiactiva y t lo expresamos en gigaños

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda v_m} \Rightarrow \ln 2 = \lambda v_m \Rightarrow \lambda = \frac{0,693}{v_m}$$

$$^{206}\text{n} = ^{238}\text{N} \left( e^{\frac{0,693}{4,5} t} - 1 \right) = ^{238}\text{N} (e^{0,154t} - 1)$$

1C.b)

$${}^{207}\text{n} = {}^{235}\text{N} \left( e^{\frac{0,693}{0,710} t} - 1 \right) = {}^{235}\text{N} (e^{0,9761t} - 1)$$

1C.c)

El análisis nos muestra que existe en el mineral de uranio con respecto al plomo puro una cantidad de isótopos de plomo 206 y 207 que provienen de la desintegración de los isótopos de uranio 238 y 235. Este exceso es (29,6-17,9):(22,6-15,5) = 11,7 : 7,1.

$$\frac{{}^{206}\text{n}}{{}^{207}\text{n}} = \frac{{}^{238}\text{N} e^{0,154t} - 1}{{}^{235}\text{N} e^{0,9761t} - 1} \Rightarrow \frac{11,7}{7,1} = \frac{137}{1} \frac{e^{0,154t} - 1}{e^{0,9761t} - 1} \Rightarrow 0,01203 = \frac{e^{0,154t} - 1}{e^{0,9761t} - 1}$$

Si se considera que la edad de la Tierra, T es mucho mayor que la vida media de los isótopos, podemos hacer la aproximación

$$0,01203 = e^{(0,154-0,9761)T} \Rightarrow -4,42 = -0,8221 T \Rightarrow T = 5,38 \cdot 10^9 \text{ años}$$

El valor de T obtenido es 7,6 veces mayor que la vida media del uranio 235 y 1,2 veces la del uranio 238.

1C.d) Debemos resolver la ecuación  $0,01203 = \frac{e^{0,154T} - 1}{e^{0,9761T} - 1}$  por aproximaciones sucesivas, partiendo del valor anterior

$$\text{para } T = 5 \quad 0,01203 > 0,00887$$

$$\text{para } T = 4 \quad 0,01203 < 0,01751$$

el valor está comprendido entre 4 y 5 gigaaños

$$\text{para } T = 4,5 \quad 0,0123 < 0,01252$$

$$\text{para } T = 4,6 \quad 0,0123 > 0,0117$$

el valor está comprendido entre 4,5 y 4,6 gigaaños.

Algún cálculo más nos permite mayor aproximación

$$\text{para } T = 4,55 \quad 0,0123 > 0,01210$$

$$\text{para } T = 4,56 \quad 0,0123 > 0,01202$$

$$\text{para } T = 4,54 \quad 0,0123 > 0,0122$$



### 1.- Parte D

Una carga eléctrica  $Q$  está en el vacío distribuida uniformemente sobre una esfera de radio  $R$ .

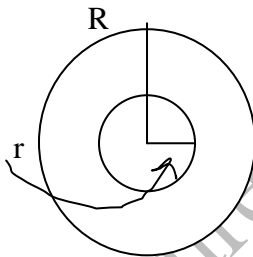
a) Obtenga las expresiones para la intensidad del campo eléctrico para las distancias  $r \leq R$  y  $r > R$

b) Obtenga la expresión de la energía asociada a esta distribución de carga

#### 1D.a)

Aplicamos el teorema de Gauss para la esfera de radio  $r < R$ , siendo la densidad

volumétrica de carga  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$



$$\Phi = \frac{q_r}{\epsilon_0} = \int ES = E * 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{\rho * \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E * 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} * \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E * 4\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Cuando  $r = R$ ,  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

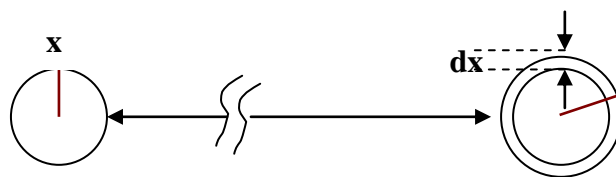
Cuando  $r > R$ , el teorema de Gauss nos dice

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = E * 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

#### 1D.b)

Para calcular la energía suponemos que la distribución esférica de carga se ha creado añadiendo capas de espesor  $dx$ , traídas desde el infinito donde el potencial es cero.

En un determinado instante tenemos una esfera de carga uniforme de radio  $x$  y desde el infinito traemos una capa esférica de espesor  $dx$



Carga de la capa esférica de espesor  $dx$

$$dq = \text{Volumen} * \rho = 4\pi x^2 dx * \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3Q \frac{x^2 dx}{R^3}$$

El trabajo para llevar la carga  $dq$  desde el infinito hasta añadirla a la esfera de carga de radio  $x$  vale

$$dW = dq (V_{\infty} - V_x)$$

El voltaje en el infinito se toma como cero. Para calcular el voltaje creado por la distribución de radio  $x$ , utilizamos la relación entre campo y potencial

$$E = \frac{q_x}{4\pi \epsilon_0 x^2} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \int -dV = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} * \frac{q_x}{x} + \text{Cte}$$

Cuando  $x$  es infinito  $\text{Cte} = 0$

$$q_x = \text{Volumen} * \rho = \frac{4}{3}\pi x^3 * \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Qx^3}{R^3}$$

$$dW = -3Q \frac{x^2 dx}{R^3} * \frac{1}{4\pi \epsilon_0} * \frac{Qx^3}{R^3} * \frac{1}{x} \Rightarrow W = -\frac{3Q^2}{4\pi \epsilon_0 R^6} \int_0^R x^4 dx \Rightarrow W = -\frac{3Q^2}{4\pi \epsilon_0 R^6} * \frac{R^5}{5}$$

$$W = -\frac{3Q^2}{20 \pi \epsilon_0 R}$$

El signo negativo significa trabajo dado desde fuera al sistema y que se almacena en forma de energía eléctrica.

### 1.- Parte E

*Un anillo de cobre de forma circular delgado puede girar alrededor de un diámetro dentro del campo magnético terrestre. La intensidad del magnético terrestre es  $44,5 \mu\text{T}$  formando un ángulo de  $64^\circ$  por debajo de la horizontal. La densidad del cobre es  $d = 8,90 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  y su resistividad  $\rho = 1,70 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ . Calcular el tiempo que transcurre para que*

*la velocidad angular del anillo se reduzca a la mitad, teniendo en cuenta que este tiempo es mucho mayor que el que tarda el anillo en dar una vuelta completa sobre sí mismo.*

*Se supone que no existe rozamiento de ningún tipo y que no se tienen en cuenta el fenómeno de autoinducción, aun cuando sus efectos pudieran ser no despreciables*

El anillo al girar en el campo magnético terrestre sufre una variación del flujo magnético y de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz aparece una fuerza electromotriz, la cual crea una corriente en el anillo y ésta desarrolla una energía calorífica. Esta energía procede de la mecánica de rotación del anillo. En definitiva el anillo va disminuyendo su velocidad angular y por tanto su energía cinética de rotación que es la que aparece en forma de calor.

El problema lo vamos a resolver aproximadamente dado que en el enunciado se advierte que el tiempo que transcurre hasta que la velocidad se reduce a la mitad es largo comparado con el tiempo de una rotación.

S representa la sección circular del anillo, a el radio, de modo que  $S = \pi a^2$ . La longitud del anillo es  $2\pi r$  y la sección del mismo es A, la densidad d, por tanto, la masa del anillo es:

$$m = 2\pi a A d$$

$\rho$  representa la resistividad del cobre, por consiguiente, la resistencia eléctrica del anillo es

$$R = \rho \frac{2\pi a}{A}$$

Designamos con  $B = 44,5 \cdot 10^{-6} \cos 64$ , de modo que inicialmente suponemos que  $\mathbf{B}$  es perpendicular al plano del anillo.  $\mathbf{S}$  es el vector superficie circular del anillo. El ángulo inicial entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{S}$  es cero. Transcurrido un tiempo t, menor que el tiempo de una vuelta El flujo magnético vale

$$\Phi = BS \cos \omega t$$

Se ha supuesto que en ese tiempo t, la velocidad angular no ha variado, la fuerza electromotriz inducida en el circuito es

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t$$

y la intensidad de corriente

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$$

Esta intensidad de corriente es senoidal y por tanto el valor eficaz en una vuelta

$$i_{ef} = \frac{BS\omega}{\sqrt{2} R}$$

y la energía calorífica

$$E = i_{\text{efz}}^2 R \tau = \frac{B^2 S^2 \omega^2}{2R} \tau$$

La variación de E en un intervalo de tiempo  $d\tau$  vale

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{B^2 S^2 \omega^2}{2R} d\tau = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = I \omega d\omega = \frac{1}{2} m a^2 \omega d\omega \Rightarrow \frac{B^2 (\pi a^2)^2}{R m a^2} d\tau = \frac{d\omega}{\omega}$$

Hay que calcular el tiempo  $\tau$  que transcurre para que la velocidad angular del anillo se reduzca a la mitad, para ello integramos la expresión anterior entre 0 y  $\tau$  y entre  $\omega_0$  y

$$\frac{\omega_0}{2}$$

$$\frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} \tau = \ln \frac{\omega_0}{\frac{\omega_0}{2}} = \ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{2\pi a A * \rho \frac{2\pi\pi}{A} * \ln 2}{B^2 \pi^2 a^2} \Rightarrow \tau = \frac{4d \rho \ln 2}{B^2}$$

Sustituyendo valores en la ecuación de T, resulta:

$$\tau = \frac{4 * 8,90 \cdot 10^3 * 1,70 \cdot 10^{-8} * \ln 2}{(44,5 \cdot 10^{-6} * \cos 64)^2} = 1,10 \cdot 10^6 \text{ s} = 12,8 \text{ dias}$$

2.- Un tubo de rayos catódicos consistente en un cañón de electrones y una pantalla, está colocado dentro de un campo magnético uniforme  $B$  paralelo al eje del haz del cañón, como indica la figura 2.1

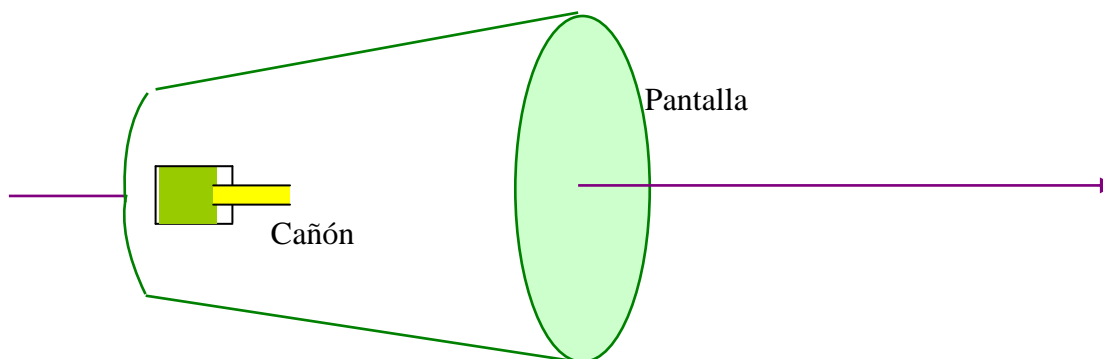


Fig. 2-1

El haz de electrones emerge por el eje, a partir del ánodo del cañón de electrones, con una divergencia de  $5^\circ$ , tal como indica la figura 2.2. En general en la pantalla se obtiene una mancha difusa, pero para ciertos valores del campo magnético se obtiene una mancha definida

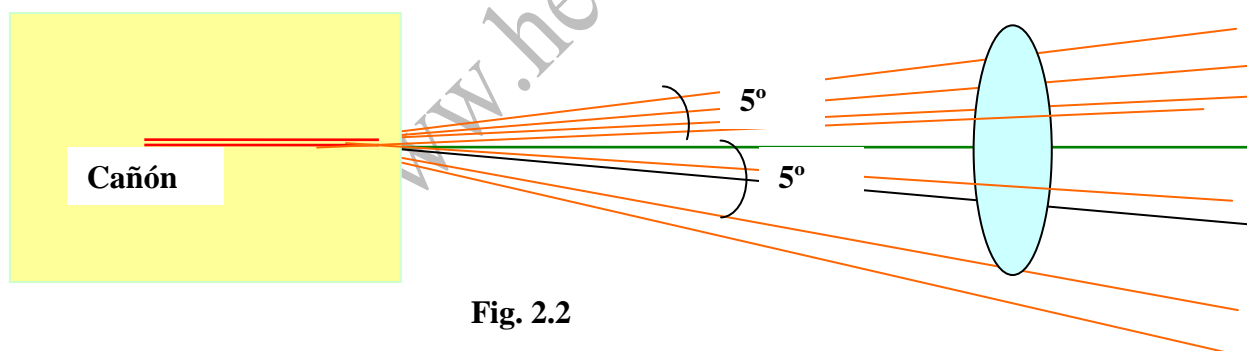


Fig. 2.2

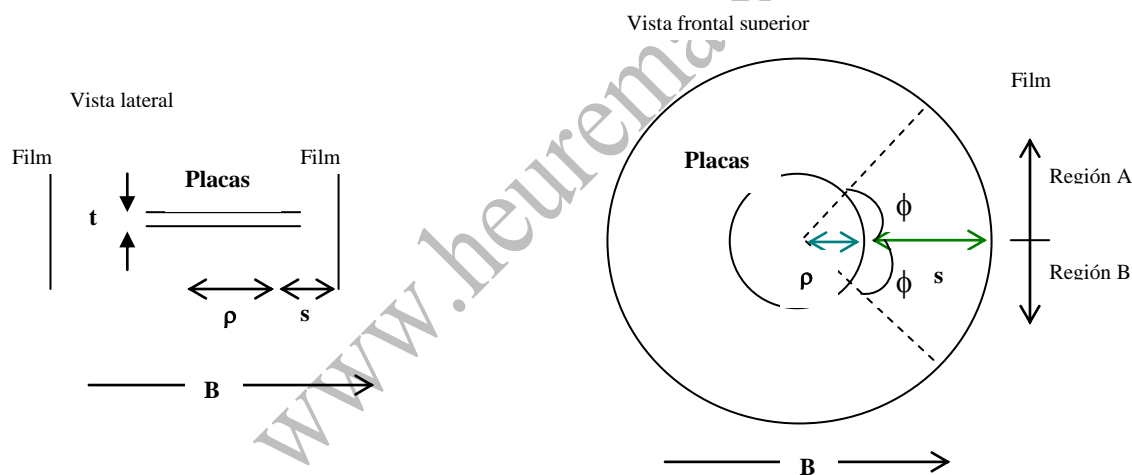
a) Consideremos el movimiento de un electrón inicialmente moviéndose en un ángulo  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 5^\circ$ ) respecto del eje y teniendo presentes las componentes paralela y perpendicular al eje, obtenga una expresión para la relación carga/masa del electrón en función de las siguientes magnitudes

\*El más pequeño campo magnético para el cual se obtiene una mancha bien definida

\*La diferencia de potencial aceleradora  $V$  del cañón de electrones (tenga en cuenta que ( $V < 2 \text{ kV}$ ))

*\*D, la distancia entre el ánodo y la pantalla*

b) *Consideren ahora otro método para evaluar la relación carga masa del electrón. El dispositivo se muestra en la figura 2.3 con una vista lateral y superior, también se indica la dirección del campo magnético B. En el interior de este campo magnético se han situado dos placas circulares de latón de radio  $\rho$ , separadas por una muy pequeña distancia  $t$ . Entre ambas placas se mantiene una diferencia de potencial  $V$ . Las placas son paralelas entre sí y coaxiales y su eje es perpendicular al campo magnético B. Existe una película fotográfica que cubre la superficie interior de un cilindro de radio  $\rho+s$  el cual es coaxial con las placas circulares. La película se encuentra a una distancia  $s$  del borde de las placas. Todo el dispositivo está en el vacío. Tenga presente que  $t$  es mucho más pequeño que  $s$  y  $\rho$ .*



**Fig.**

*Una fuente puntual que emite partículas  $\beta$  de forma uniforme en todas las direcciones con un cierto rango de velocidades, está colocada en el centro y a una distancia igual de ellos. La misma película se expone en tres condiciones diferentes*

*\* Primero con  $B = 0$  y  $V = 0$*

*\* Segundo con  $B = B_0$  y  $V = V_0$*

*\* Tercero con  $B = -B_0$  y  $V = -V_0$*

*donde  $B_0$  y  $V_0$  son cantidades positivas.*

*Cuando  $V > 0$  el plato superior está cargado positivamente y el campo magnético tiene la dirección indicada en la figura 2.3.*

En dicha figura existen dos regiones para la película que se designan con las letras A y B. Después de la exposición y revelado de la película se muestra un bosquejo de esa película perteneciente a una de las regiones.

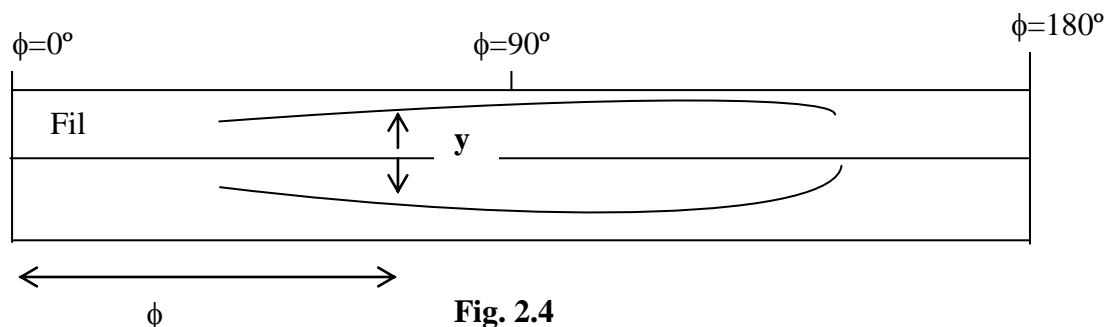


Fig. 2.4

Razonar a cuál de las dos pertenece.

C) Se hacen medidas, con ayuda de un microscopio, en la película revelada (fig 2.4) de la separación de las trazas más exteriores ( $y$ ) en función del ángulo  $\phi$ . Los resultados se recogen en la tabla 1. El ángulo  $\phi$  se representa en la figura 2.3 y es el ángulo entre la dirección del campo magnético y la línea que une el centro de las placas con el punto elegido de la película.

Ángulo, $\phi^\circ$	90	60	50	40	30	23
Separación, $y/\text{mm}$	17,4	12,7	9,7	6,4	3,3	Fin de la traza

Los valores numéricos de los parámetros del sistema son  
 $B_0 = 6,91 \text{ mT}$  ;  $V_0 = 580 \text{ V}$  ;  $t = 0,80 \text{ mm}$  ,  $s = 41,0 \text{ mm}$

Y los siguientes datos pueden utilizarse

Velocidad de la luz en el vacío ,  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  y masa en reposo del electrón ,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Calcular en eV la energía cinética máxima de la partícula  $\beta$  observada.

d) Utilizando la información del apartado c) obtener un valor de la relación carga/masa del electrón, la cual debe calcularse a partir de una gráfica apropiada

a).- En la figura 2.5 se observa que un electrón de velocidad  $u$  forma un ángulo  $\beta$  con el campo. Dicha velocidad se descompone en dos velocidades mutuamente perpendiculares  $u_1$  y  $u_2$ .

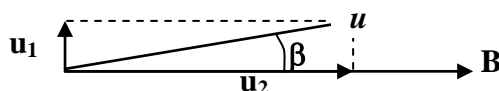


Fig. 2.5

La componente  $u_2$  hace avanzar al electrón hacia la pantalla, mientras que la componente  $u_1$  determina que el electrón describa una circunferencia. En definitiva el electrón describe una espiral. Si en el tiempo que el electrón avanza la distancia  $D$  el electrón describe una sola circunferencia entonces en la pantalla aparece una mancha nítida.

El valor del radio de la circunferencia que describe al electrón viene dado por

$$F = eu \sin\beta \quad B = \frac{mu^2 \sin^2\beta}{R} \Rightarrow R = \frac{mu \sin\beta}{eB} \quad (1)$$

Dado que el electrón es acelerado por una diferencia de potencial  $V$ , se cumple

$$\frac{1}{2} mu^2 = eV \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{e}{m}} * \sqrt{2V} \quad (2)$$

El tiempo que emplea el electrón en dar una vuelta de radio  $R$  es

$$t = \frac{2\pi R}{u \sin\beta} = \frac{D}{u \cos\beta} \Rightarrow R = \frac{D \operatorname{tag}\beta}{2\pi} \quad (3)$$

de las ecuaciones (1) y (3), sacamos la relación  $e/m$ .

$$\frac{D \operatorname{tag}\beta}{2\pi} = \frac{mu \sin\beta}{eB} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{2\pi u \sin\beta}{BD \operatorname{tag}\beta} = \frac{2\pi u \cos\beta}{BD}$$

Sustituyendo  $u$  de (2)

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{e}{m}} * \sqrt{2V} * \cos\beta}{BD} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V * \cos^2\beta}{B^2 D^2}$$

Teniendo en cuenta que el ángulo  $\beta$  es como máximo  $5^\circ$ , resulta que  $\cos^2\beta$  es prácticamente la unidad y por consiguiente

$$\frac{e}{m} = 8V \left( \frac{\pi}{BD} \right)^2$$

b).- Cuando no existen ni campo magnético ni eléctrico, las partículas viajan en línea recta. Puesto que  $t$  es muy pequeño resulta que a la película solamente llega un estrecho haz de partículas, aquéllas que su velocidad está comprendida en un cierto ángulo  $\varepsilon$

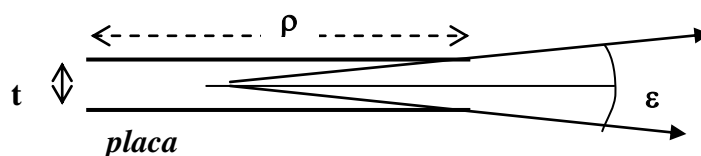


Fig. 2.6

De la figura 2.6

$$\operatorname{tag} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{\frac{\rho}{2}} = \frac{t}{\rho}$$



Como  $t$  es mucho más pequeño que  $\rho$ , el haz que llega a la película es muy fino.

Cuando actúa el campo magnético y eléctrico el dispositivo queda dividido en dos zonas llamadas A y B. El campo eléctrico tiende a llevar a las partículas hacia la placa positiva. El campo magnético puede favorecer esta situación o oponerse a ella.

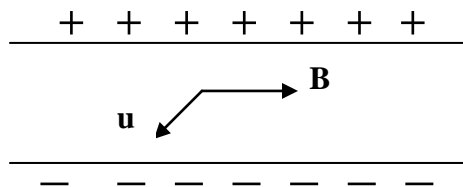


Fig. 2.7 (a)

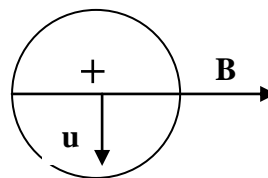


Fig. 2.7 (b)

En la figura 2.7 (a) se observa una vista lateral de las placas y otra vista desde arriba de la placa positiva..(2.7 b)

La velocidad de una partícula es  $\mathbf{u}$  y es perpendicular al campo magnético. En 2.7 a la velocidad está dirigida hacia el lector. La fuerza magnética vale en módulo

$$F = euB$$

la fuerza es perpendicular al plano  $\mathbf{uB}$  y dirigida hacia abajo por ser la carga  $e$  negativa. En este caso la fuerza magnética actúa en sentido contrario de la fuerza eléctrica. El campo eléctrico tendería a llevar a la partícula hacia la placa positiva y el campo magnético se opone a ello. Si ambas fuerzas fuesen iguales la partícula no sufriría desviación y podría llegar a la película.

Si  $\mathbf{u}$  tuviese el sentido contrario al indicado en la fig.2.7 entonces la fuerza magnética estaría dirigida hacia arriba, esto es, hacia la placa positiva, con lo que la partícula tendería a chocar con la placa y no llegar a la película.

En consecuencia la película está en la región B (fig. 2.3).

c).- Si observamos (fig. 2.8) desde la placa superior cargada positivamente a un electrón que forma un ángulo  $\phi$  con el campo, sufre una fuerza que vale

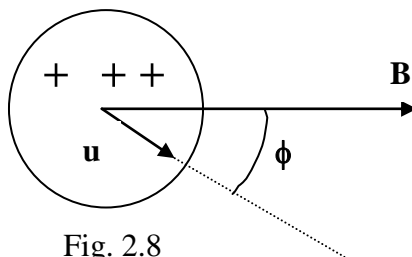


Fig. 2.8

El valor de la fuerza magnética depende de la velocidad del electrón y del ángulo que dicha velocidad forma con el campo magnético. Cuando  $u$  sea máxima el límite para que el electrón llegue a la pantalla es  $23^\circ$  de acuerdo con la tabla del enunciado.

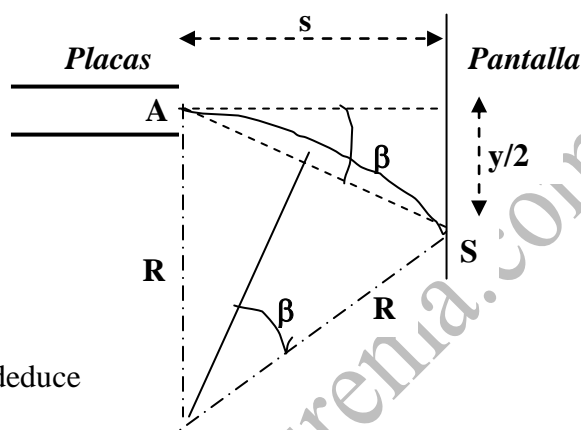
Cuando la fuerza eléctrica y magnética sean iguales el electrón abandona las placas con velocidad horizontal, cuyo valor lo obtenemos de esta igualdad

$$euB \operatorname{sen}\phi = eE = e \frac{V}{t} \Rightarrow u = \frac{V}{Bt \operatorname{sen}\phi} = \frac{580}{6,91 \cdot 10^{-3} * 0,80 \cdot 10^{-3} * \operatorname{sen}23^\circ} = 2,69 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

teniendo en cuenta que la velocidad es muy alta ( 0,9 c) la energía cinética la calculamos según la mecánica relativista

$$E_c = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ J} * \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 6,6 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

d).- Cuando el electrón abandona las placas queda sometido a la acción del campo magnético que le obligará a describir una trayectoria circular de radio R (figura 2.9)



De la figura 2,9 se deduce

Fig. 2.9

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\frac{t}{2}}{AS} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = \frac{AS^2}{t} = \frac{s^2 + \frac{y^2}{4}}{t}$$

La fuerza centrípeta del electrón es la fuerza magnética y teniendo en cuenta la relación del apartado c)

$$euB \operatorname{sen}\phi = \frac{mu^2}{R} \Rightarrow eB \operatorname{sen}\phi = \frac{m \frac{V}{Bt \operatorname{sen}\phi}}{s^2 + \frac{y^2}{4}} * y \Rightarrow \frac{eB^2 t \operatorname{sen}^2 \phi}{V} = \frac{m y}{s^2 + \frac{y^2}{4}}$$

de acuerdo con la teoría de la relatividad

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{B^2 t^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}} = \frac{m_0 B t c \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{B^2 t^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \phi - V^2}}$$

$$\frac{eB^2 t \operatorname{sen}^2 \phi}{V} = \frac{m_0 B t c \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{B^2 t^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \phi - V^2}} * \frac{4y}{4s^2 + y^2} \Rightarrow \frac{e}{m_0} \frac{B \operatorname{sen}\phi \sqrt{B^2 t^2 c^2 \operatorname{sen}^2 \phi - V^2}}{cV} = \frac{4y}{4s^2 + y^2}$$

$$\frac{e}{m_0} \sqrt{\frac{B^4 t^2 \sin^4 \phi}{V^2} - \frac{B^2 \sin \phi}{c^2}} = \frac{4y}{4s^2 + y^2} \quad (4)$$

Con los datos que tenemos

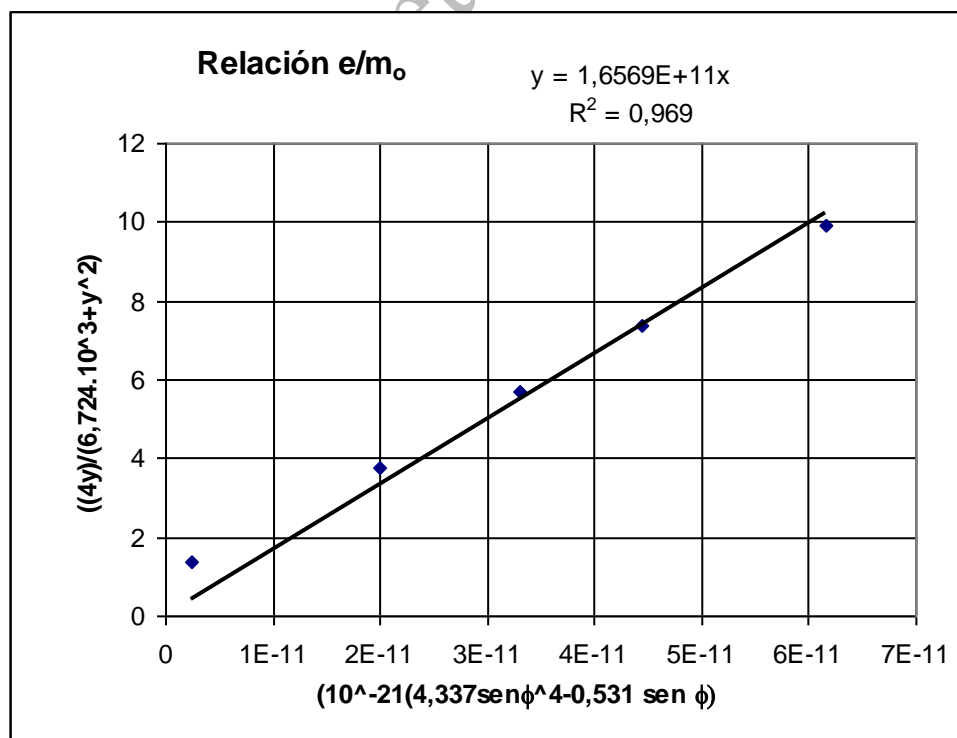
$$\frac{B^4 t^2}{V^2} = \frac{(6,91 \cdot 10^{-3})^4 * (0,80 \cdot 10^{-3})^2}{580^2} = 4,337 \cdot 10^{-21} \quad ; \quad \frac{B^2}{c^2} = \frac{(6,91 \cdot 10^{-3})^2}{(3 \cdot 10^8)^2} = 0,531 \cdot 10^{-21}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4)

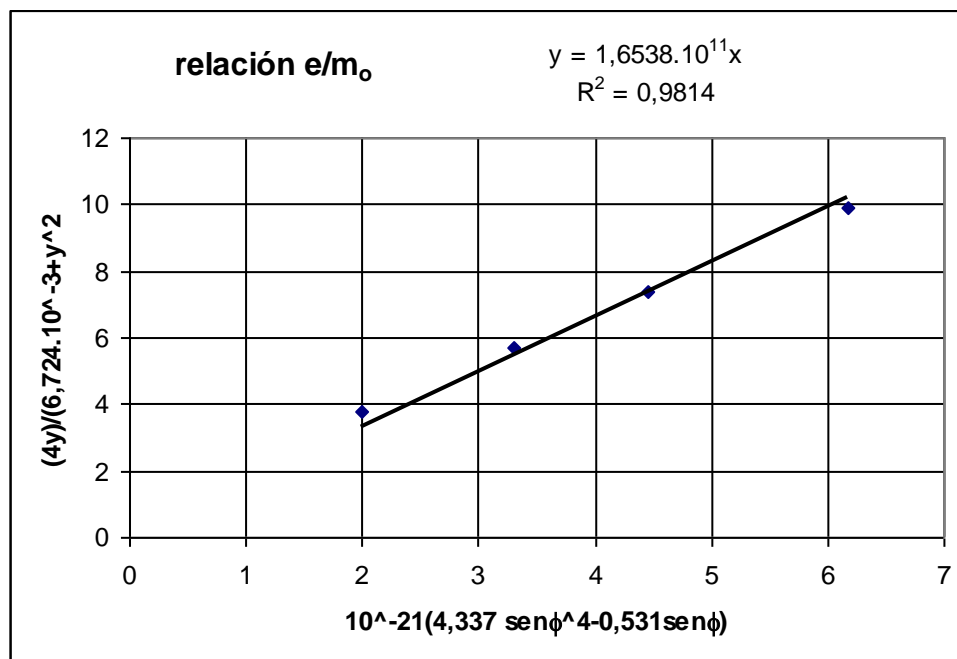
$$\frac{e}{m_0} \sqrt{4,337 \cdot 10^{-21} \sin^4 \phi - 0,531 \cdot 10^{-21} \sin \phi} = \frac{4y}{4s^2 + y^2} = \frac{4y}{6,724 \cdot 10^{-3} + y^2}$$

Si representamos en el eje de abscisas  $\sqrt{10^{-21}(4,337 \sin^4 \phi - 0,531 \sin \phi)}$  frente a

$\frac{4y}{6,724 \cdot 10^{-3} + y^2}$  en el eje de ordenadas, obtendremos una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y cuya pendiente es  $e/m_0$



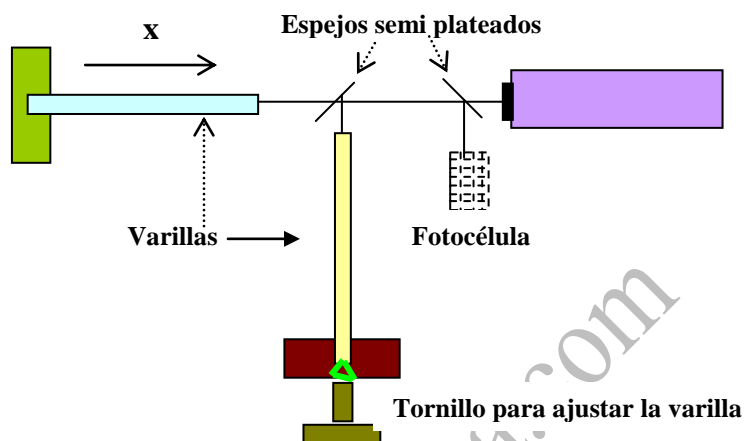
de la gráfica se observa un valor discrepante, si se elimina este valor resulta



### 3.-Parte A

*Esta parte se refiere a las dificultades que existen para detectar ondas gravitacionales generadas por sucesos astronómicos. Parece cierto que la explosión de una supernova distante puede producir fluctuaciones en la intensidad del campo gravitatorio terrestre del orden de  $10^{-19} \text{ Nkg}^{-1}$ .*

*Un modelo de detector de ondas gravitacionales consiste (ver figura 3.1)*



*en dos barras metálicas de 1m de longitud cada una que se mantienen de forma rígida en ángulo recto entre sí. Uno de los extremos de cada barra ha sido pulido y perfectamente aplanado y el otro se mantiene de forma rígida. Las barras reciben un impulso longitudinal breve mediante un dispositivo piezoeléctrico. A consecuencia de ello los extremos libres de las barras oscilan con un desplazamiento longitudinal dado por la ecuación*

$$\Delta x_1 = a e^{-\mu t} \cos(\omega t + \varphi)$$

*a,  $\mu$  y  $\omega$  son constantes*

*a) Si la amplitud del movimiento se reduce un 20% al cabo de 50 segundos, calcule el valor de  $\mu$*

*b) La velocidad de la onda longitudinal es  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Se debe calcular el*

*valor mínimo de  $\omega$ . Las barras son de aluminio cuya densidad es  $2700 \text{ kg/m}^3$  y módulo de Young  $E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ .*

*c) Es imposible construir dos barras que tengan exactamente la misma longitud, de modo que la señal de la fotocélula tiene un batido de  $5 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ . ¿Cuál es la diferencia de longitud de las barras?*

d) Para una barra de longitud  $l$ , obtenga una expresión algebraica que relacione un cambio de longitud  $\Delta l$  con un cambio en la intensidad del campo gravitatorio  $\Delta g$ . La expresión vendrá dada en función de  $l$  y otras constantes del material de la barra. La respuesta del detector a este cambio tiene lugar en la dirección de una de las ruedas.

d) La luz producida por un láser es monocromática y de longitud de onda 656 nm. Si el mínimo desplazamiento en las franjas de interferencia que se puede medir es  $10^{-4}$  de la longitud de onda del láser, calcular el mínimo valor de  $l$  para que el dispositivo sea capaz de detectar una variación en  $g$  del orden de  $10^{-19} \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}$

### Parte B

a) Un fotón emitido desde la superficie del Sol (masa  $M$ , radio  $R$ ) es desplazado hacia el rojo. Suponiendo que la energía del fotón es equivalente a una masa en reposo, aplique la teoría gravitacional de Newton para mostrar que la efectiva (o medida) frecuencia del fotón en el infinito es reducida (corrimiento gravitacional al rojo) por el factor

$$1 - \frac{GM}{Rc^2}$$

b) Una reducción de la frecuencia del fotón equivale a un incremento en su periodo, o utilizando el fotón como un reloj estándar, una dilatación del tiempo. Además se puede demostrar que una dilatación del tiempo está siempre acompañada por una contracción en la unidad de longitud por el mismo factor.

Ahora estudiaremos el efecto que esto tiene sobre la propagación de la luz en las proximidades del Sol. Vamos a definir como índice de refracción efectivo  $n_r$  en un punto  $r$  cercano a la superficie solar, al cociente

$$n_r = \frac{c}{c_r}$$

dónde  $c$  es la velocidad de la luz medida en un sistema de coordenadas muy lejos del Sol y  $c_r$  es la velocidad de la luz medida en un sistema de coordenadas a una distancia  $r$  del centro del Sol.

Demostrar que  $n_r$  se puede aproximar a

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{r c^2}$$

cuando  $\frac{GM}{r c^2}$  es pequeño, siendo  $\alpha$  una constante cuyo valor debe calcular.

c) Utilizando esta expresión de  $n_r$ , calcule en radianes la deflexión que sufre un rayo de luz respecto de su trayectoria recta cuando pasa por el borde del Sol.

**Datos:** Constante de Gravitación Universal  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$   
 Masa del Sol,  $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ; Radio del Sol,  $R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$   
 Velocidad de la luz,  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Se puede necesitar la siguiente integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^2}$

#### Parte A

a).- De la expresión se deduce que la amplitud del movimiento disminuye exponencialmente  $A = ae^{-\mu t}$

Cuando  $t=0$ ,  $A = a$  y cuando  $t = 50$  segundos  $A$  es igual a  $0,8 a$

$$0,8a = ae^{-\mu 50} \Rightarrow \ln 0,8 = -\mu 50 \Rightarrow \mu = -\frac{\ln 0,8}{50} = 4,46 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

b).- Para una barra empotrada, el extremo fijo es un nodo y el libre un vientre, esto es, la longitud de la barra es un cuarto de la longitud de la onda

$$\lambda = 4l = 4 \text{ m} \Rightarrow v = \lambda f = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\lambda} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{7,1 \cdot 10^{10}}{2700}}}{4} = 8,1 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Si el extremo fijo es un nodo y el extremo libre un vientre en medio de la barra se formaría un nodo y la longitud de la barra equivaldría a  $l = \frac{3}{4}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \text{ m}$  y  $\omega$  valdría  $2,4 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ . Luego  $\omega = 8,1 \cdot 10^3$  es el valor mínimo.

c).- La frecuencia en la barra empotrada está dada por la expresión  $f = \frac{2n-1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  siendo  $n$  un número entero a partir de  $n=1$ . Aplicamos la fórmula anterior para dos barras de longitudes  $l_1$  y  $l_2$

$$f_1 = \frac{2n-1}{l_1} \sqrt{\frac{E}{\rho}}; f_2 = \frac{2n-1}{l_2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{l_2}{l_1} \Rightarrow \frac{f_1 - f_2}{f_1} = \frac{l_2 - l_1}{l_1}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{\Delta f * l}{f} = \frac{5 \cdot 10^{-3} * 1}{8,1 \cdot 10^3} = 3,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$2\pi$

d).- El módulo de Young esta definido mediante la expresión  $E = \frac{F/A}{\Delta l/l}$ . Consideramos un elemento de longitud de barra  $dx$  que dista del extremo la distancia  $x$ . El aumento de  $g$  hace aumentar el peso de barra que se encuentra por encima de  $dx$  y vale  $m\Delta g$ , lo cual provoca un aumento en su longitud  $dl$

$$E = \frac{F dx}{A dl} \Rightarrow dl = \frac{m\Delta g dx}{AE} = \frac{\rho Ax dx}{AE} \Rightarrow \Delta l = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l x dx \Rightarrow \Delta l = \frac{\rho \Delta g l^2}{2E}$$

e).- De la expresión anterior se deduce:

$$\frac{l^2}{\Delta l} = \frac{2E}{\rho \Delta g} = \frac{2 * 7,1 \cdot 10^{10}}{2700 * 10^{-19}} = 5,26 \cdot 10^{26} \text{ m}$$

Si se utiliza un láser de longitud de onda 656 nm y escogemos el menor valor de  $\omega$

$$\lambda = 4l \Rightarrow \Delta \lambda = 4\Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{656 \cdot 10^{-9} * 10^{-4}}{4}$$

$$l = \sqrt{\frac{5,26 \cdot 10^{26} * 656 \cdot 10^{-13}}{4}} = 9,3 \cdot 10^7 \text{ m}$$

## Parte B

a).- Si consideramos que el fotón tiene una masa deducida de la relación

$$E = mc^2 = hv \Rightarrow m = \frac{hv}{c^2}$$

La energía potencial gravitatoria de una masa  $m$  es  $-\frac{GMm}{r}$ , siendo  $r$  la distancia de la masa  $m$  al centro del cuerpo de masa  $M$ . La conservación de la energía nos permite escribir

$$hv - \frac{GMm}{r} = hv - \frac{GMhv}{rc^2} = \text{Constante}$$

Si aplicamos esta ecuación en la superficie del Sol y en el infinito, donde la energía potencial es nula

$$hv \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right) = hv_{\infty} \Rightarrow v_{\infty} = v \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)$$