

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. ITALIA. 1999

1) Un recipiente cilíndrico, con un eje vertical, contiene un gas molecular en equilibrio termodinámico. La base superior del cilindro se puede desplazar libremente y está hecha de vidrio. Esta cubierta supone que no existen pérdidas de gas y que la fricción entre ella y las paredes permite oscilar libremente y que además no existen pérdidas de energía comparable a las otras involucradas en el proceso. Inicialmente la temperatura del gas es igual a la de los alrededores. El gas puede considerarse como perfecto. Las paredes del cilindro incluidas sus bases tienen baja conductividad térmica y baja capacidad calorífica y eso conlleva que prácticamente no haya intercambio de calor entre gas y ambiente.

A través de la base de vidrio se envía la luz emitida por un láser de potencia constante, la cual es absorbida completamente por el gas contenido en el recipiente. Por dicha absorción las moléculas del gas pasan a estados excitados de energía, de los cuales y de forma rápida emiten energía en el infrarrojo retornando en etapas sucesivas al estado fundamental. Esta radiación infrarroja puede absorberse por otras moléculas y es reflejada por las paredes del cilindro incluida las bases. Como resultado final del proceso, la energía absorbida del láser en un tiempo muy corto revierte a energía de movimiento de las moléculas y permanece así durante largo tiempo.

Se observa que la base superior del cilindro se mueve hacia arriba, y después de un cierto tiempo de irradiación, ésta se interrumpe y se mide el desplazamiento sufrido por la base.

- 1) Calcular la temperatura y presión del gas después de la irradiación*
- 2) Calcular el trabajo mecánico realizado por el gas después de la irradiación*
- 3) Calcular la energía radiante absorbida durante la irradiación*
- 4) Calcular la potencia emitida por el láser que es absorbida por el gas y el correspondiente número de fotones por unidad de tiempo*
- 5) Calcular el rendimiento del proceso de conversión de la energía óptica en energía potencial de la base de vidrio del recipiente*

Si posteriormente el cilindro se gira 90° colocándolo en una posición horizontal y todavía es despreciable el intercambio de calor entre el gas y el recipiente

6) Establecer si existe algún cambio en la presión y temperatura del gas como consecuencia de la citada rotación y si es así calcular los nuevos valores.

Datos

Presión ambiente, $p_o = 101,3 \text{ kPa}$; Temperatura ambiente, $t_o = 20,0^\circ\text{C}$

Diámetro interior del cilindro, $2r = 100 \text{ mm}$

Masa de la base superior de vidrio, $m = 800 \text{ g}$

Moles de gas en el recipiente, $n = 0,100 \text{ mol}$

Calor específico molar a volumen constante del gas, $C_v = 20,8 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$;

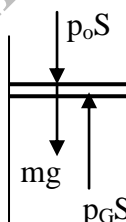
Longitud de onda del láser, $\lambda = 514 \text{ nm}$, Tiempo de irradiación, $\Delta t = 10,0 \text{ s}$

Desplazamiento de la base superior después de la irradiación

$$\Delta s = 30,0 \text{ mm}$$

1).- Calcular la temperatura y presión del gas después de la irradiación

Si el gas está inicialmente en equilibrio termodinámico su temperatura es igual a la del ambiente. La base superior está en reposo debido a las fuerzas que actúan sobre ella. S es la sección de la cubierta superior móvil



$p_o S$ es la fuerza que ejerce la presión exterior

mg es el peso del émbolo

$p_G S$ es la fuerza vertical y hacia arriba que ejerce el gas

$$p_o S + mg = p_G S \Rightarrow p_G = p_o + \frac{mg}{S} = 101,3 \cdot 10^3 + \frac{0,800 \cdot 9,8}{\pi(50 \cdot 10^{-3})^2} = 102,3 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Después de que el gas reciba la radiación del láser su volumen es V_1 y su temperatura T_1 , su presión seguirá siendo p_G .

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos antes y después de recibir el gas la radiación (Δs es la elevación de la base superior)

$$p_G V_0 = nRT_0; p_G (V_0 + \pi r^2 \Delta s) = nRT_1 \Rightarrow p_G \left(\frac{nRT_0}{p_G} + \pi r^2 \Delta s \right) = nRT_1 \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{nRT_0 + p_G \pi r^2 \Delta s}{nR} = T_0 + \frac{p_G \pi r^2 \Delta s}{nR} = 293 + \frac{102,3 \cdot 10^3 * 3,1416 * (50 \cdot 10^{-3})^2 * 30 \cdot 10^{-3}}{0,100 * 8,31}$$

$$T_1 = 322 \text{ K} = 49 \text{ }^\circ\text{C}$$

2).- Calcular el trabajo mecánico

El trabajo realizado por el gas lo efectúa a presión constante, por tanto vale:

$$W = p_G * \Delta V = p_G * \pi r^2 \Delta s = 102,3 \cdot 10^3 * 3,1416 * (50 \cdot 10^{-3})^2 * 30 \cdot 10^{-3} = 24,1 \text{ J}$$

3).- Calcular la energía radiante absorbida durante la irradiación

La energía radiante es la que ha absorbido el gas, el cual ha sufrido una transformación a presión constante que causa una variación de entalpía del gas

$$\Delta H = \Delta U + p_G \Delta V = nC_v \Delta T + W = 0,100 * 20,8 * (322 - 293) + 24,1 = 84,4 \text{ J}$$

4).- Calcular la potencia emitida por el láser

Teniendo en cuenta que el gas ha suministrado 84,4 J de energía en un tiempo de 10,0 segundos, su potencia es:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{84,4}{10,0} = 8,44 \text{ W}$$

La energía que porta un fotón de la luz del láser es

$$E = hv = h \frac{c}{\lambda}$$

Si N representa el número de fotones por unidad de tiempo

$$Nh \frac{c}{\lambda} = 8,44 \Rightarrow N = \frac{8,44 * 514 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} * 3 \cdot 10^8} = 2,2 \cdot 10^{19} \frac{\text{fotones}}{\text{s}}$$

5).- Calcular el rendimiento del proceso

La energía potencial que adquiere la cubierta superior es $mg\Delta s$, y la energía que recibe el gas $P\Delta t$

$$\eta = \frac{mg\Delta s}{P\Delta t} = \frac{0,800 * 9,8 * 30 \cdot 10^{-3}}{8,44 * 10,0} = 2,8 \cdot 10^{-3} = 0,28 \%$$

6).- Cuando el cilindro se gira 90°

Cuando el cilindro se gira 90° el gas ya no soporta el peso de la cubierta superior y como está en equilibrio, su presión es igual a la exterior p_0 . El gas ha sufrido una transformación adiabática, ya que no ha habido intercambio de calor con el exterior.

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow P_1 * \left(\frac{nRT_1}{P_1} \right)^\gamma = P_2 * \left(\frac{nRT_2}{P_2} \right)^\gamma \Rightarrow P_1^{1-\gamma} * T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} * T_2^\gamma \Rightarrow$$

$$P_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} * T_1 = P_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} * T_2 \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

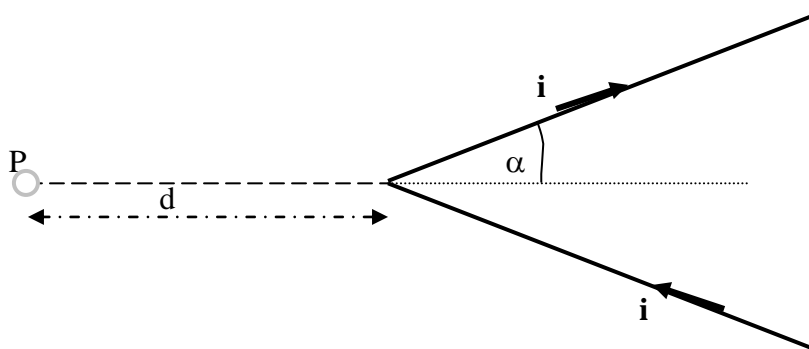
γ es el coeficiente adiabático

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{20,8 + 8,3}{20,8} = 1,4$$

$$P_1 = 102,3 \text{ kPa} \quad ; T_1 = 322 \text{ K}; \quad P_2 = 101,3 \text{ K}$$

$$T_2 = 322 * \left(\frac{102,3}{101,3} \right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 321 \text{ K} = 48^\circ \text{C}$$

2) Por un hilo delgado muy largo circula una corriente constante i . Este hilo tiene forma de V con un semiángulo entre las dos ramas de valor α (medido en radianes).



De acuerdo con los cálculos de Ampère, el módulo del campo magnético B en el punto P , que está en el plano del conductor, a una distancia d , es proporcional a $\tan(\alpha/2)$.

El trabajo de Ampère fue más tarde englobado en la teoría electromagnética de Maxwell y es universalmente aceptado.

Utilizando nuestros conocimientos actuales sobre el electromagnetismo

- 1.- Encontrar la dirección del campo B en el punto P
- 2.- Encontrar el factor de proporcionalidad k , tal que $B(P) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- 3.- Calcular el valor del campo B en un punto P_1 que dista d del vértice de la V pero que se encuentra dentro de ésta
- 4.- Con el fin de medir el campo magnético se coloca en P una pequeña aguja magnética, de momento de inercia I y momento dipolar magnético μ . Dicha aguja puede oscilar alrededor de un punto fijo en un plano que contiene la dirección de B . Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones que ejecuta esta aguja en función de B .

Biot-Savart establece que el campo magnético en el punto P está dado por la expresión

$$B(P) = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d}$$

siendo μ_0 la permeabilidad magnética del vacío.

Para aclarar cuál de las dos expresiones del campo magnético (la de Ampère y la de Biot-Savart) es la correcta, se mide el periodo de

oscilación de la aguja magnética en el punto P. La dificultad es que para ciertos valores del ángulo α la diferencia es muy pequeña y eso hace muy difícil la medida.

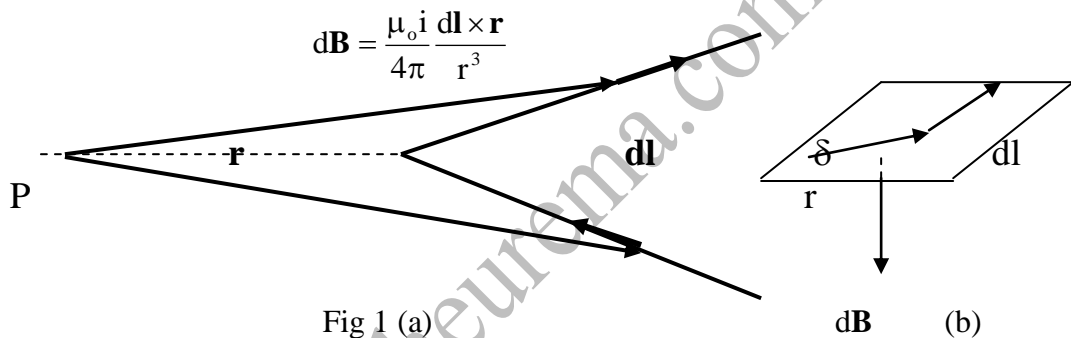
5) Para establecer claramente la diferencia entre las dos teorías, los periodos dados por la ley de Ampère (T_A) y los dados por la ley de Biot-Savart (T_{BS}) necesitan que se diferencien como mínimo es un 10%, esto significa que

$$T_A > 1,10 T_{BS}$$

Con este hecho buscar en qué rango del valor de α es posible distinguir entre las dos teorías.

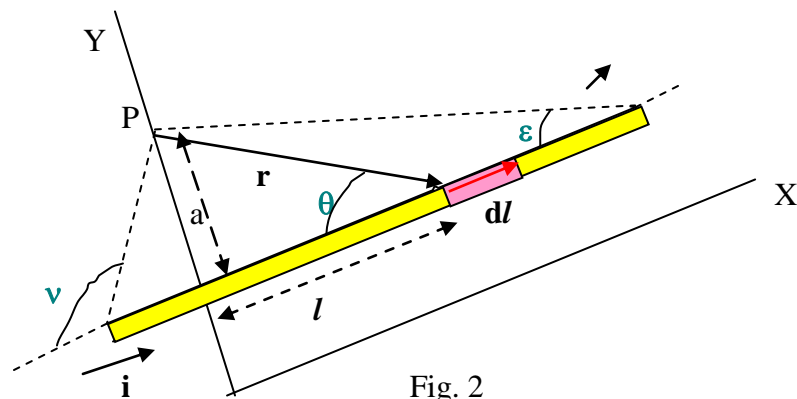
1).- Encontrar la dirección del campo B en el punto P

Un método para calcular la dirección y sentido del campo es utilizar la ley de Biot-Savart



En la figura 1(a) suponemos que el conductor en V y el punto P se encuentran en el plano del papel. El vector $d\mathbf{B}_1$, debido a la rama superior de V, es perpendicular al plano del papel y dirigido hacia dentro. El vector $d\mathbf{B}_2$ debido a la rama inferior del conductor V, tiene la misma dirección y sentido que $d\mathbf{B}_1$. La figura 1(b) es una reproducción en perspectiva de la fig (1), referente a los vectores de la rama superior, Los vectores \mathbf{r} y $d\mathbf{l}$ se encuentran en el plano δ y el vector $d\mathbf{B}$ es perpendicular al plano δ .

2).- Encontrar el factor de proporcionalidad k, tal que $B(P) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



En la figura 2, tenemos un conductor recto de dimensiones finitas y calculamos el campo magnético que crea la corriente i que circula por él en el punto P. El elemento dl crea un campo en P cuyo módulo es

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \sin\theta}{r^2}$$

El campo en P será la suma de todos los elementos dl que componen el conductor. Esta suma es la integral de la anterior expresión

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl \sin\theta}{r^2} \quad (1)$$

ponemos las variables l y r en función de la variable θ .

$$l = \frac{a}{\tan\theta} \Rightarrow dl = -\frac{a}{\sin^2\theta} d\theta \quad ; \quad r = \frac{a}{\sin\theta}$$

a es la mínima distancia del punto P al conductor.

Sustituyendo en (1)

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{\nu}^{\varepsilon} \sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} (\cos \varepsilon - \cos \nu)$$

Aplicamos este resultado a la rama superior del conductor en V

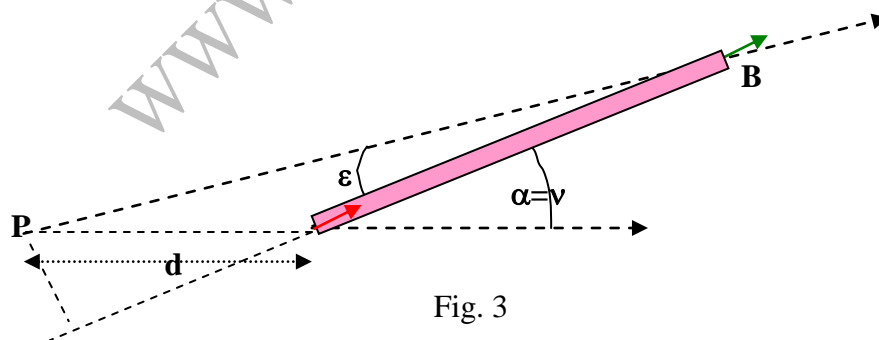


Fig. 3

La mínima distancia del punto P al conductor de la figura 3 es $d \operatorname{sen} \nu = d \operatorname{sen} \alpha$

El ángulo ε es cero ya que el conductor es infinitamente largo por el lado B

$$B_{IP} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \operatorname{sen} \alpha} (1 - \cos \alpha)$$

En la figura 4, la mínima distancia de P a la rama inferior de V es $d \operatorname{sen} \alpha$, el ángulo ν es 180° ya que el conductor es infinitamente largo por el lado B y el ángulo ε es suplementario del α

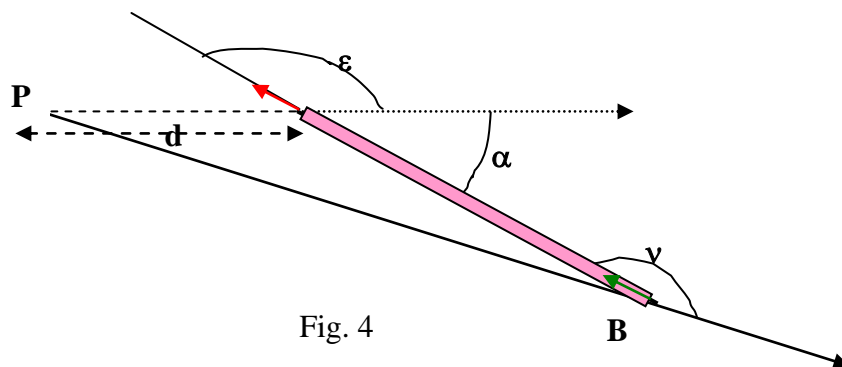


Fig. 4

$$B_{2P} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin \alpha} (\cos \varepsilon - \cos \nu) = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin \alpha} (-\cos \alpha + 1)$$

El campo en P es la suma de los campos debidos a cada una de las ramas del circuito en V

$$B_P = B_{1P} + B_{2P} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

A partir de las formulas trigonométricas

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1 - \cos \delta}{2} ; \quad \sin 2\phi \Rightarrow 2 \sin \phi \cos \phi$$

aplicadas a la expresión anterior

$$B_P = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

3) Empleamos el mismo método anterior para calcular el campo en el punto P_1 que está en el interior de la V

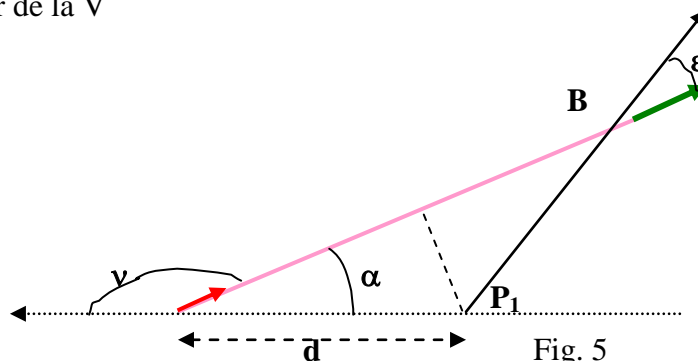


Fig. 5

En este caso ν y α son suplementarios y ε es cero, porque el conductor es infinitamente largo por el lado B. La mínima distancia del punto P_1 al conductor es $d \sin \alpha$.

$$B_{1P_1} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin \alpha} (\cos \varepsilon - \cos v) = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin \alpha} (1 + \cos \alpha)$$

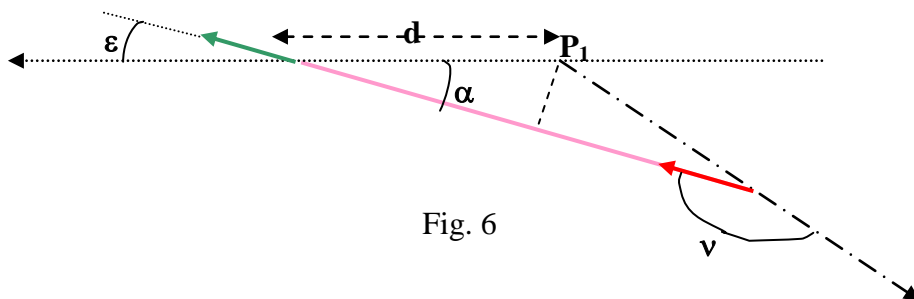


Fig. 6

Para la otra rama (fig.6). En este caso el ángulo v vale 180° pues el hilo es infinitamente largo por el lado C. La distancia mínima de P_1 al conductor es $d \sin \alpha$.

$$B_{2P_1} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin \alpha} (\cos \varepsilon - \cos v) = \frac{\mu_0 i}{4\pi d \sin \alpha} (\cos \alpha + 1)$$

El campo en P_1 es la suma de los campos debidos a cada una de las ramas del circuito en V

$$B_{P_1} = B_{1P_1} + B_{2P_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d \sin \alpha} (1 + \cos \alpha)$$

A partir de las formulas trigonométricas

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1 + \cos \delta}{2}; \quad \sin 2\phi \Rightarrow 2 \sin \phi \cos \phi$$

aplicadas a la expresión anterior

$$B_{P_1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d \sin \alpha} (1 + \cos \alpha) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot \operatorname{ag} \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

A este mismo resultado se puede llegar si suponemos que la V se convierte en dos hilos que se cruzan y cuya longitud es infinita. Por cada uno de ellos circula una corriente i Para contrarrestar lo añadido se coloca una V (trazo discontinuo de la figura 7) con el sentido de la corriente contrario (se indica por flechas de trazos) que se indica en la figura 7

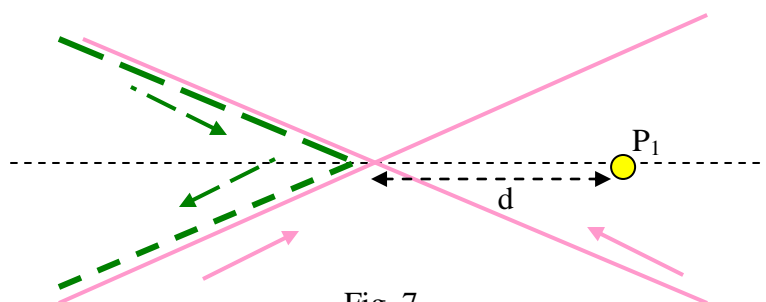


Fig. 7

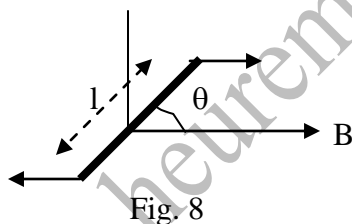
El campo en P_1 es la suma de los campos de los dos hilos cruzados menos el que crea los conductores en forma de V.

$$B_{P_1} = 2 * \frac{\mu_0 i}{2\pi d \operatorname{sen}\alpha} - \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \operatorname{tag}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}}{2} \right) = \frac{\mu_0 i}{\pi d} \left(\frac{2 - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tag}\frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen}\alpha} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left(\frac{2 - 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} * \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot \operatorname{ag}\frac{\alpha}{2}$$

4) .-Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones

La aguja sufre un momento igual $M = \mu B$



El módulo del momento es $M = \mu B = p l \operatorname{sen}\theta \cdot B$, siendo p la aparente carga magnética de los polos y l la distancia entre ellos. Si las oscilaciones son de pequeña amplitud

$$M = pl \theta B = \mu B \theta = k \theta$$

Al ser el momento directamente proporcional al desplazamiento angular el movimiento es armónico de rotación y su periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}$$

5) .- Buscar en qué rango del valor de α es posible distinguir entre las dos teorías.

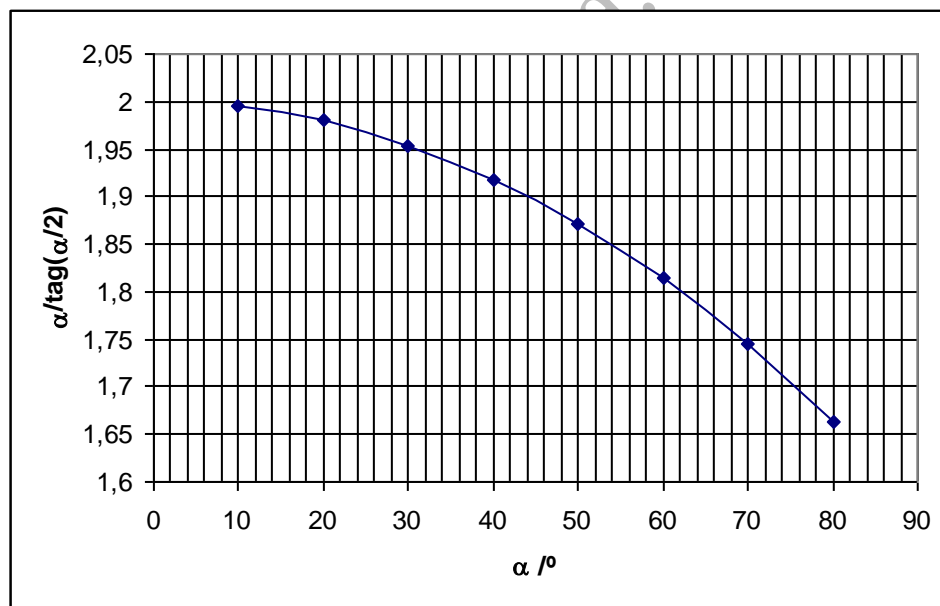
Aplicamos la fórmula del periodo a las dos hipótesis

$$T_{BS} = 2\pi \sqrt{\frac{I\pi^2 d}{\mu \mu_o i \alpha}}; T_A = 2\pi \sqrt{\frac{I2\pi d}{\mu \mu_o i \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{T_{BS}}{T_A} = \sqrt{\frac{\pi \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}{2 \alpha}}$$

Para que se cumpla la relación

$$T_A > 1,10 T_{BS} \Rightarrow \frac{2 \alpha}{\pi \operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}} > 1,10^2 \Rightarrow \frac{\alpha}{\operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}} > \frac{1,10^2 * \pi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}} > 1,90$$

Hacemos una representación gráfica de α (eje X) frente a $\frac{\alpha}{\operatorname{tag} \frac{\alpha}{2}}$ (eje Y)



La gráfica nos indica que el valor límite superior es 44°.

3) En este problema se analiza el movimiento de una sonda espacial que pasa cerca del planeta Júpiter.

El planeta Júpiter describe una órbita elíptica alrededor del Sol que aproximadamente puede considerarse como una circunferencia de radio medio R .

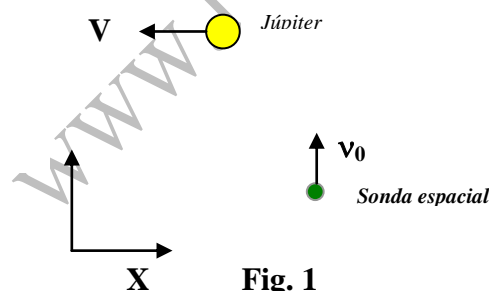
1.- Encontrar la velocidad V del planeta alrededor del Sol

2.- Cuando la sonda está en el segmento que une el Sol con Júpiter calcular la distancia que existe desde Júpiter al lugar donde la atracción gravitatoria del Sol es igual a la de Júpiter

Una sonda espacial de $m = 825$ kg vuela hacia Júpiter. Para simplificar admitimos que la trayectoria de la sonda se encuentra en el plano de la órbita de Júpiter e ignoramos el caso en que la sonda es arrojada fuera del plano de la órbita.

Solamente consideramos lo que sucede en la región en la que la atracción de Júpiter predomina sobre el resto de las atracciones gravitatorias.

En el sistema de referencia ligado al centro del Sol la sonda espacial tiene una velocidad inicial $v_0 = 1,00 \cdot 10^4$ m/s en la dirección positiva del eje Y , mientras que la velocidad de Júpiter está dirigida hacia el eje X negativo, tal como indica la figura 1.



Se entiende por velocidad inicial de la sonda cuando se encuentra en el espacio interplanetario, todavía lejos de Júpiter pero en una región donde la atracción del Sol es despreciable frente a la del planeta.

Se admite que la aproximación de la sonda a Júpiter ocurre en un tiempo relativamente corto para suponer que no existe cambio en la dirección de la órbita de Júpiter alrededor del Sol. Suponemos también que la sonda pasa por detrás de Júpiter, esto significa que su coordenada x es mayor para la sonda que para Júpiter cuando la coordenada y es la misma.

3.-Calcular la dirección del movimiento de la sonda (ángulo φ con la dirección del eje X) y su velocidad v' en el sistema de referencia de Júpiter, cuando la sonda todavía se encuentra lejos de Júpiter.

4) Calcular el valor de la energía mecánica E de la sonda en el sistema de referencia de Júpiter, considerando que la energía potencial es nula muy lejos de Júpiter y así la velocidad de la sonda es prácticamente constante. La trayectoria de la sonda en el sistema de referencia de Júpiter es una hipérbola cuya ecuación en coordenadas polares es

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos\theta \right) \quad (1)$$

b es el parámetro de impacto distancia entre una de las asíntotas y el planeta, E es la energía mecánica total de la sonda en el sistema de referencia de Júpiter, G es la constante de gravitación universal, M la masa de Júpiter, m la masa de la sonda y r y θ son las coordenadas polares

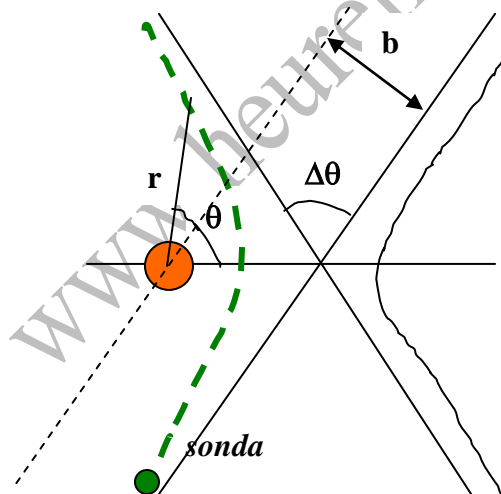


Fig. 2

5.-Utilice la ecuación (1) para calcular la desviación angular $\Delta\theta$ en el sistema de referencia de Júpiter en función de la velocidad inicial v' y del parámetro de impacto b

6.- Suponga que la sonda no puede acercarse a Júpiter a una distancia menor que tres radios de Júpiter, encuentre el parámetro de impacto mínimo y la máxima desviación posible.

7. Encuentre la velocidad final v'' de la sonda en el sistema de referencia del Sol en función de la velocidad V de Júpiter, de la velocidad inicial v_0 y del ángulo de desviación $\Delta\theta$

8.- Utilice el resultado anterior para calcular el valor numérico de v'' cuando la desviación angular es la máxima posible

Datos

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

$$\text{Masa de Júpiter, } M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

$$\text{Radio de Júpiter, } R_J = 69,8 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\text{Masa del Sol, } M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{Distancia del Sol a Júpiter, } d = 7,78 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

1).- Encontrar la velocidad V del planeta alrededor del Sol

La fuerza centrípeta que necesita Júpiter para girar alrededor del Sol es la fuerza de gravitación universal entre ambos

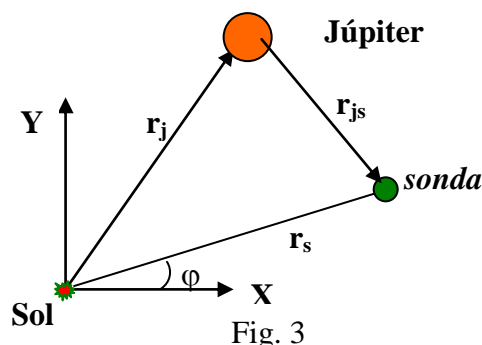
$$\frac{M_J V^2}{d} = G \frac{M_S M_J}{d^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_S}{d}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} * 1,99 \cdot 10^{30}}{7,78 \cdot 10^{11}}} = 1,31 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2).- Calcular la distancia que existe desde Júpiter al lugar donde la atracción gravitatoria del Sol es igual a la de Júpiter

Designamos con d_J a la distancia que existe desde Júpiter al lugar donde se equilibran las fuerzas gravitatorias del Sol y del planeta

$$G \frac{M_S}{(d - d_J)^2} = G \frac{M_J}{d_J^2} \Rightarrow \frac{d - d_J}{d_J} = \sqrt{\frac{M_S}{M_J}} \Rightarrow d_J = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M_S}{M_J}}} = \frac{7,78 \cdot 10^{11}}{1 + \sqrt{\frac{1,99 \cdot 10^{30}}{1,90 \cdot 10^{27}}}} = 2,33 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

3).- Calcular la dirección del movimiento de la sonda



Desde el sistema ligado a centro del Sol, r_j es el vector de posición de Júpiter, r_s el de la sonda y r_{js} es el vector de posición de la sonda desde el sistema ligado a Júpiter

$$\mathbf{r}_J + \mathbf{r}_{JS} = \mathbf{r}_S \quad ; \quad \mathbf{v}_{JS} = \mathbf{v}_S + \mathbf{V}$$

Llamamos

$$v_{JS} = v' \quad ; \quad v_S = v_o$$

$$v' = \sqrt{v_o^2 + V^2} = \sqrt{(1 \cdot 10^4)^2 + (1,31 \cdot 10^4)^2} = 1,65 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

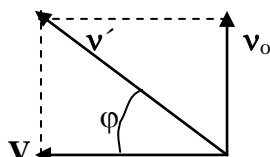


Fig. 4

$$\text{tag} \varphi = \frac{v_o}{V} = \frac{1,00 \cdot 10^4}{1,31 \cdot 10^4} \Rightarrow \varphi = 37,4^\circ$$

Desde el sistema de referencia ligado a Júpiter la velocidad de la sonda, todavía lejos del planeta, forma un ángulo de $37,4^\circ$ respecto del eje de abscisas ligado al planeta.

De la figura 4 se deduce que $\cos \varphi = \frac{V}{v'}$ y $\text{sen} \varphi = \frac{v_o}{v'}$

4).- Calcular el valor de la energía mecánica

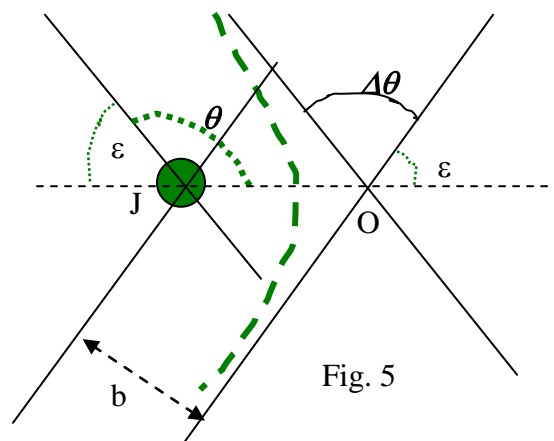
La energía mecánica de la sonda se compone de dos términos la cinética y la potencial, la suma se mantiene constante. Si la sonda se encuentra muy lejos de Júpiter la energía potencial es prácticamente nula y la energía mecánica coincide con la cinética.

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} * 825 * (1,65 \cdot 10^4)^2 = 1,12 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

5).- Calcular la desviación angular

Cuando la sonda se aleje de Júpiter a una gran distancia r tiende hacia infinito y la expresión (1) se convierte en

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4 b^2}{G^2 M^2}}} \quad (2)$$



La ecuación (2) nos proporciona el valor del ángulo θ y de la fig. 5 se deduce que θ y ε son suplementarios, en definitiva

$$\Delta\theta = 180 - 2\varepsilon = 180 - 2(180 - \theta) = 2\theta - 180$$

6).-Parámetro de impacto

La distancia mínima de la sonda a Júpiter es JO en la fig. 5.

Para esa distancia, que designamos con r_{\min} , y para una distancia de la sonda cuando esta muy lejos de Júpiter (cuando la energía potencial es prácticamente cero), aplicamos los principios de conservación del momento lineal y de la energía

$$mv b = mv'_{\min} r_{\min} ; \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2_{\min} - G \frac{Mm}{r_{\min}}$$

Combinando ambas ecuaciones

$$b = \frac{r_{\min} * v'_{\min}}{v} = \frac{r_{\min} \sqrt{v'^2 + \frac{2GM}{r_{\min}}}}{v} = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2GM r_{\min}}{v^2}}$$

teniendo en cuenta que $r_{\min} = 3 * R_J$

$$b = \sqrt{9R_J^2 + \frac{6GMR_J}{v^2}} = \sqrt{9 * (69,8 \cdot 10^6)^2 + \frac{6 * 6,67 \cdot 10^{-11} * 1,90 \cdot 10^{27} * 69,8 \cdot 10^6}{(1,65 \cdot 10^4)^2}} = 4,9 \cdot 10^8 \text{ m}$$

A partir de la ecuación (2), calculamos θ .

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4 b^2}{G^2 M^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(1,64 \cdot 10^4)^4 * (4,9 \cdot 10^8)^2}{(6,67 \cdot 10^{-11})^2 * (1,90 \cdot 10^{27})^2}}} = -0,69 \Rightarrow \theta = 133,6^\circ$$

$$\Delta\theta = 2\theta - 180 = 2 * 133,6 - 180 = 87,2^\circ$$

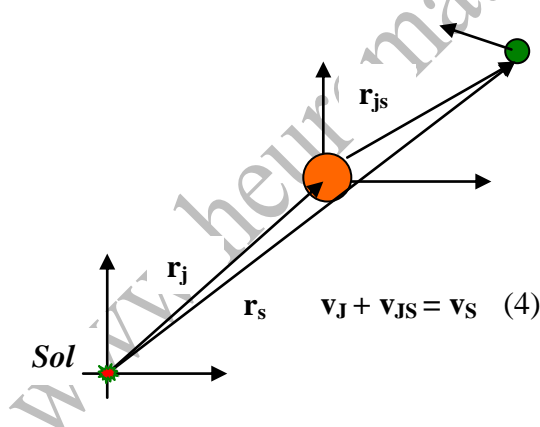
7).- Velocidad final

Cuando la sonda está todavía muy lejos de Júpiter, su velocidad vista desde el sistema ligado al planeta, forma un ángulo $\varphi = 37,4^\circ$ (apartado 3).

Cuando la sonda se aleja del planeta Júpiter, el ángulo que forma la velocidad, designada con v , con el eje X ligado al planeta es $\varphi + \Delta\theta$ y las componentes de dicha velocidad sobre los ejes coordenados ligados al planeta valen

$$v'_x = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \quad ; \quad v'_y = v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \quad (3)$$

Teniendo presente lo deducido en el apartado 3)



Desde el sistema ligado al Sol, Júpiter tiene una velocidad $-V\mathbf{i}$ y la sonda una velocidad v'' . Desde el sistema ligado a Júpiter la sonda tiene una velocidad v' , cuyas componentes son (3).

Las componentes de la ecuación vectorial (4) son:

$$-V\mathbf{i} + v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \mathbf{i} = v''_x \quad ; \quad 0 \mathbf{j} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \mathbf{j} = v''_y$$

$$v'' = \sqrt{(-V + v' \cos(\varphi + \Delta\theta))^2 + (v' \sin(\varphi + \Delta\theta))^2} = \sqrt{V^2 + v'^2 - 2Vv' \cos(\varphi + \Delta\theta)}$$

Teniendo en cuenta que $v'^2 = v_0^2 + V^2$ (apartado 3)

$$v'' = \sqrt{V^2 + v'^2 - 2Vv' \cos(\varphi + \Delta\theta)} = \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2Vv' \cos\varphi \cdot \cos\Delta\theta + 2Vv' \sin\varphi \cdot \sin\Delta\theta}$$

En el apartado (3) se vio que $\cos\varphi = \frac{V}{v'}$ y $\sin\varphi = \frac{v_0}{v'}$

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2 - 2V^2 \cos\Delta\theta + 2Vv_0 \sin\Delta\theta} = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos\Delta\theta) + 2Vv_0 \sin\Delta\theta} \quad (5)$$

8).- Valor numérico de v''

Basta sustituir los valores numéricos en (5)

$$v'' = \sqrt{(1 \cdot 10^4)^2 + 2(1,31 \cdot 10^4)^2(1 - \cos 87,2) + 2 * 1,31 \cdot 10^4 * 1 \cdot 10^4 * \sin 87,2} = 2,62 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$