

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

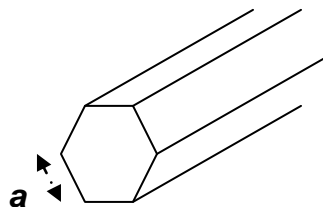
**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

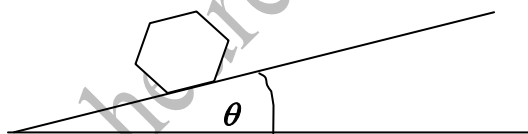
## XXIX OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. ISLANDIA. 1998

1.- Un prisma hexagonal, largo y rígido (parecido a un lapicero) tiene una masa  $M$  que está uniformemente distribuida. El lado del hexágono es  $a$ .



El momento de inercia del prisma hexagonal respecto del eje que pasa por el centro de las bases es  $I = \frac{5}{12}Ma^2$ . El momento de inercia respecto de un eje paralelo al anterior que pasa por la arista del prisma es  $I = \frac{17}{12}Ma^2$

a) El prisma se encuentra inicialmente en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  pequeño con la horizontal



Se supone que las caras laterales del prisma son ligeramente cóncavas de modo que el prisma solamente hace contacto con el plano por sus aristas. Esta concavidad no afecta al momento de inercia. El prisma se desplaza y comienza a rodar abajo del plano de forma desigual. Se admite que el rozamiento evita el posible deslizamiento y que el prisma no pierde el contacto con el plano. La velocidad angular justamente antes de que una arista golpee al plano es  $\omega_i$  y  $\omega_f$  justamente después del impacto. Es posible escribir que

$$\omega_f = s \omega_i$$

siendo  $s$  un coeficiente numérico. Encontrar el valor de  $s$ .

b) La energía cinética del prisma justamente antes del impacto de la arista es  $K_i$  e inmediatamente después  $K_f$  y entre ellas podemos escribir que

$$K_f = r K_i$$

Determinar el valor del coeficiente  $r$ .

c) Cuando ocurra el próximo impacto  $K_i$  debe tener un valor mínimo que cumpla la condición

$$(K_i)_{\min} = \delta Mga$$

siendo  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Calcular el coeficiente  $\delta$  en función del ángulo  $\theta$  y el coeficiente  $r$ .

d) Si se cumple la condición hallada en c), la energía cinética  $K_i$  tenderá a un valor fijo  $(K_i)\theta$

$$(K_i)\theta = \kappa Mga$$

Determinar el valor de  $\kappa$  en función de  $\theta$  y  $r$ .

e) Calcular el valor mínimo del ángulo  $\theta$  (con un margen de  $0,1^\circ$ ) para el cual una vez iniciada la desigual rodadura por el plano, ésta continúe de forma indefinida.

a) Cuando el hexágono rueda por el plano el centro de masas describe un arco de circunferencia de radio  $a$ . La velocidad del centro de masas es tangente a la trayectoria en cada punto, tal como indica la figura 1, siendo  $v_i$  la velocidad del centro de masas justamente antes de que la arista golpee al plano y  $v_f$  la velocidad inmediatamente después.

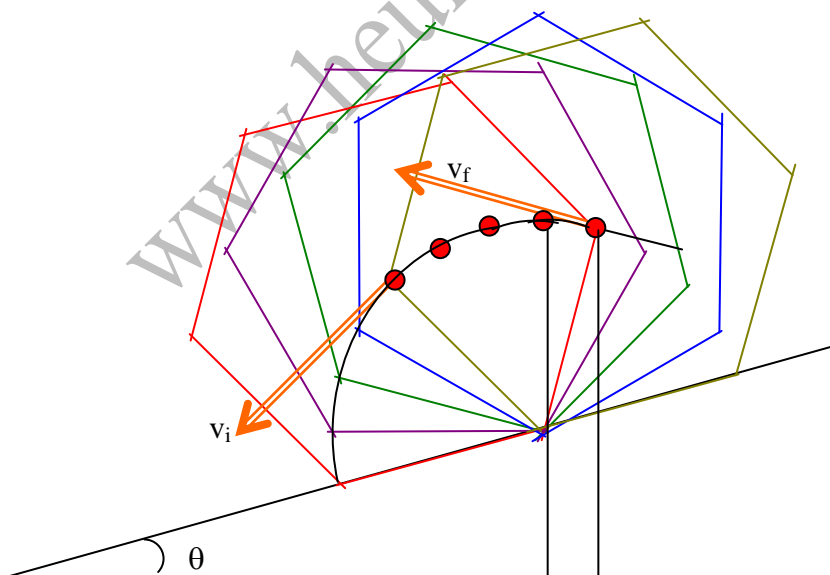


Fig.1

La figura 2 es una simplificación de la figura 1 en donde se han llevado las velocidades al centro de masas y se han tomado unos ejes coordenados cartesianos. Las velocidades forman ángulos de  $30^\circ$  con el eje X de referencia.

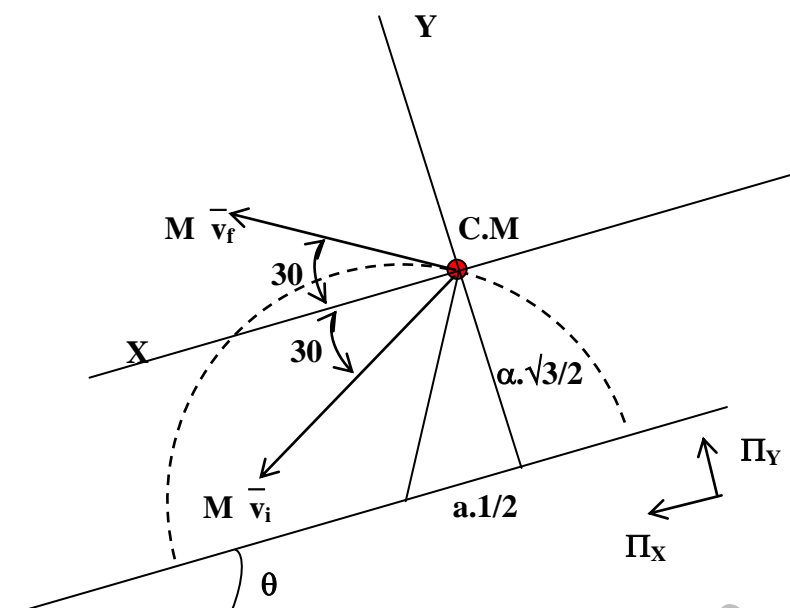


Fig. 2

La cantidad de movimiento del prisma es  $Mv_i$  justamente antes de que golpee la arista y  $Mv_f$  inmediatamente después, se deduce que este cambio de momento que ocurre en un tiempo extraordinariamente pequeño se debe a una percusión cuyas componentes designamos con  $\Pi_x$  y  $\Pi_y$  respectivamente. Si designamos por  $\omega_i$  y  $\omega_f$  las velocidades angulares antes y después del golpe de la arista, podemos escribir

$$v_{iX} = v_i \cos 30 = \omega_i a \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad v_{iY} = -v_i \sin 30 = -\omega_i a \frac{1}{2}$$

$$v_{fX} = v_f \cos 30 = \omega_f a \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad v_{fY} = v_f \sin 30 = \omega_f a \frac{1}{2}$$

Aplicamos el teorema del momento lineal

$$\Pi_X = M\omega_f a \frac{\sqrt{3}}{2} - M\omega_i a \frac{\sqrt{3}}{2} = Ma \frac{\sqrt{3}}{2} (\omega_f - \omega_i) \quad ;$$

$$\Pi_Y = M\omega_f a \frac{1}{2} + M\omega_i a \frac{1}{2} = Ma \frac{1}{2} (\omega_f + \omega_i)$$

Aplicamos el teorema del momento angular

$$-\Pi_X a \frac{\sqrt{3}}{2} - \Pi_Y a \frac{1}{2} = I(\omega_f - \omega_i)$$

Combinado esta última ecuación con las dos anteriores resulta:

$$-Ma^2 \frac{3}{4}(\omega_f - \omega_i) - Ma^2 \frac{1}{4}(\omega_f + \omega_i) = \frac{5}{12}Ma^2(\omega_f - \omega_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f \left( -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{12} \right) = \omega_i \left( -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12} \right) \Rightarrow \omega_f = \frac{11}{17}\omega_i$$

**b) Determinar el valor del coeficiente r**

$$K_i = \frac{1}{2}Mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 \quad ; \quad K_f = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Sustituyendo la relación del apartado a)

$$r = \frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{1}{2}M\omega_f^2 a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}Ma^2\omega_f^2}{\frac{1}{2}M\omega_i^2 a^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12}Ma^2\omega_i^2} = \frac{\omega_f^2 \left( 1 + \frac{5}{12} \right)}{\omega_i^2 \left( 1 + \frac{5}{12} \right)} = \left( \frac{11}{17} \right)^2 = \frac{121}{289} = 0,42$$

**c) Calcular el coeficiente  $\delta$  en función del ángulo  $\theta$  y el coeficiente r.**

Después del impacto el centro de masas se eleva una altura que llamamos h.

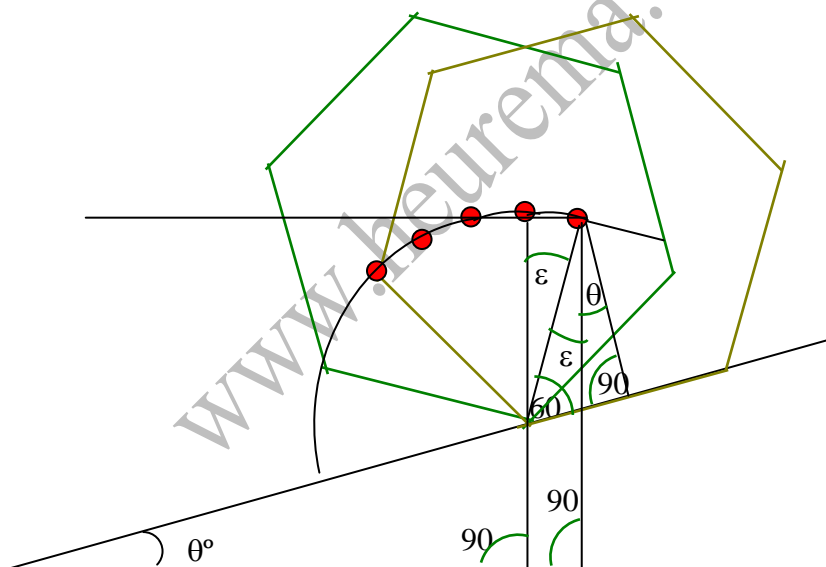


Fig. 3

Observando la figura 3 se deduce que  $\varepsilon + \theta = 30^\circ \Rightarrow \varepsilon = 30 - \theta$ . La altura que se eleva el centro de masas es  $h = a - a \cos \varepsilon = a[1 - \cos(30 - \theta)]$ , esta elevación supone una ganancia de energía potencial que como mínimo ha de ser igual a la energía cinética después del golpeo de la arista

$$Mga[1 - \cos(30 - \theta)] = K_f = rK_i$$

Para que  $K_i$  sea mínimo

$$(K_i)_{\min} = Mga \frac{[1 - \cos(30 - \theta)]}{r}$$

ha de ser

$$\delta = \frac{1 - \cos(30 - \theta)}{r}$$

**d) Determinar el valor de  $\kappa$  en función de  $\theta$  y  $r$ .**

Cada vez que el hexágono pasa de apoyar una arista a apoyar la siguiente pierde una energía potencial  $Mga \sin \theta$ , la cual se suma a la energía cinética  $K_f$ .

Partimos en el tiempo  $t=0$  y cuando el prisma comienza a elevar su centro de masas, esto es, después del impacto y designamos a esa energía cinética como  $K_{f0}$ . Cuando se produzca el impacto de la arista la energía es  $K_{i1} = K_{f0} + Mga \sin \theta$  y cuando vuelva a elevarse el centro de masas la energía es  $K_{f1} = rK_{i1}$ . prosiguiendo el razonamiento escribimos

$$\begin{array}{ll} n=0 & K_{f0} \\ n=1 & K_{i0} = K_{f0} + Mga \sin \theta \quad K_{f1} = rK_{i0} = rK_{f0} + rMga \sin \theta \\ n=2 & K_{i1} = K_{f1} + Mga \sin \theta = \\ & = rK_{f0} + Mga \sin \theta (r+1) \quad K_{f2} = rK_{i1} = r^2K_{f0} + Mga \sin \theta (r^2+r) \\ n=3 & \\ & K_{i2} = K_{f2} + Mga \sin \theta = \\ & = r^2K_{f0} + Mga \sin \theta (r^2+r+1) \quad K_{f3} = rK_{i2} = r^3K_{f0} + Mga \sin \theta (r^3+r^2+r) \end{array}$$

Cuando  $n = n$ , la expresión resultante es:

$$K_{fn} = r^n K_{f0} + Mga \sin \theta (r^n + r^{n-1} + \dots + r^2 + r)$$

Cuando  $n$  tiende a infinito el primer término de la suma tiende a cero y para el segundo tenemos

$$Mga r \sin \theta (1 + r + \dots + r^{n-1})$$

Lo que figura en el paréntesis es una progresión geométrica de razón  $r$  y cuyo primer término es 1. La suma de una progresión geométrica de razón  $r$  vale:

$$S = \frac{a_1 (1 - r^{n-1})}{1 - r} = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$$

Como  $r$  es menor que la unidad  $r^{n-1}$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito

$$S = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

Y la energía cinética después de  $n$  impactos será:

$$K_{fn} = Mga \operatorname{sen} \theta \frac{r}{1-r}$$

El siguiente valor de  $K_i$   $K_i = K_{fn} + Mga \operatorname{sen} \theta$  es

$$(K_i)_0 = Mga \operatorname{sen} \theta \frac{r}{1-r} + Mga \operatorname{sen} \theta = Mga \frac{\operatorname{sen} \theta}{1-r}$$

El coeficiente que nos piden es:

$$k = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1-r}$$

### e) Calcular el valor mínimo del ángulo $\theta$

Para que la rodadura continúe el valor límite de  $K_f$  ha de ser como mínimo igual a la energía potencial

$$Mga \operatorname{sen} \theta \frac{r}{1-r} = Mga [1 - \cos(30 - \theta)] \Rightarrow \operatorname{sen} \theta \frac{r}{1-r} = 1 - \cos(30 - \theta)$$

Podemos resolver la ecuación trigonométrica por tanteo, Sustituimos el valor de  $r=0,42$  encontrado en el apartado b).

$$0,720 \operatorname{sen} \theta = 1 - \cos(30 - \theta)$$

Ángulo $\theta$	$0,720 \operatorname{sen} \theta$	$1 - \cos(30 - \theta)$
5	0,0628	0,0937
6	0,0753	0,0865
7	0,0878	0,0795
6,5	0,0815	0,0830
6,6	0,0828	0,0822
6,55	0,0821	0,0826
6,57	0,0824	0,0825

$$\theta = 6,57^\circ$$

2.- Una cubierta de hielo es una capa gruesa de hielo (de algunos kilómetros de espesor) apoyada sobre el suelo y extendiéndose horizontalmente sobre decenas o incluso cientos de kilómetros. En este problema se considera la fusión del hielo y el comportamiento del agua bajo la cubierta del hielo. Se admite que en tales condiciones el hielo

causa variaciones de presión como un fluido viscoso, pero que se deforma de manera frágil?, principalmente por movimientos verticales.

Se facilita la siguiente información

Densidad del agua	$\rho_A = 1,000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Densidad del hielo	$\rho_H = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Calor específico del hielo	$c_H = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$
Calor latente de fusión del hielo	$L_H = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Densidad de la roca y magma	$\rho_M = 2,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Calor específico de la roca y magma	$c_M = 700 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$
Calor latente de fusión de la roca y magma	$L_M = 4,2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Flujo calorífico desde el interior de la tierra Hacia el exterior	$J_Q = 0,06 \text{ W/m}^2$
Punto de fusión del hielo	$T_H = 0^\circ \text{C}$

a) Considere una cubierta de hielo que recibe el flujo calorífico del interior de la tierra, utilizando los datos anteriores determine el espesor  $d$  de la capa de hielo fundido cada año.

b) Considere ahora la superficie superior de una cubierta de hielo. La tierra que está bajo la cubierta de hielo tiene una pendiente  $\alpha$ . La superficie superior de la cubierta de tiene una pendiente  $\beta$ . (Véase la figura 1)

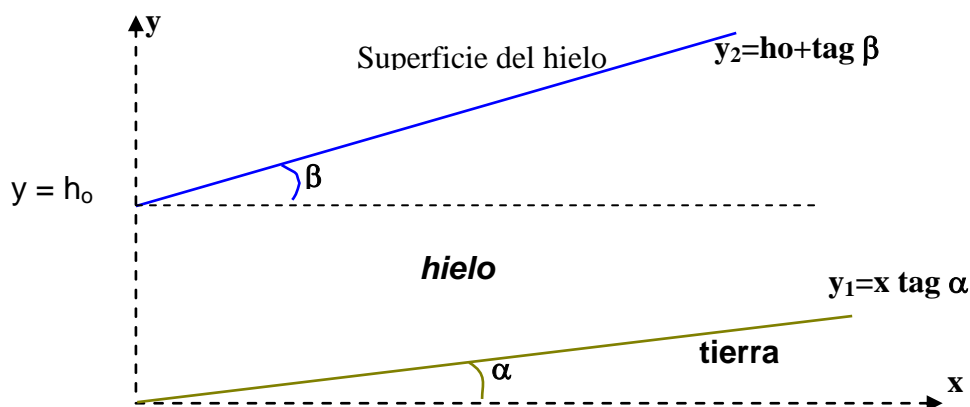


Fig.1



El espesor del hielo cuando  $x = 0$  es  $h_0$ . La parte inferior y superior de la cubierta de hielo está descrita por las siguientes ecuaciones

$$y_1 = x \operatorname{tag} \alpha \quad ; \quad y_2 = h_0 + x \operatorname{tag} \beta$$

Obtenga una expresión para la presión  $p$  en el fondo de la cubierta de hielo en función de la coordenada  $x$ .

Formule la condición matemática entre  $\beta$  y  $\alpha$  de modo que una capa de agua situada entre la cubierta de hielo y el suelo no fluya en ninguna dirección. Muestre que tal condición es de la forma

$$\operatorname{tag} \beta = s \operatorname{tag} \alpha$$

y determine el coeficiente  $s$ .

La línea  $y_1 = 0,8 x$  en la siguiente figura 2 nos indica la superficie de la tierra bajo la cubierta de hielo.

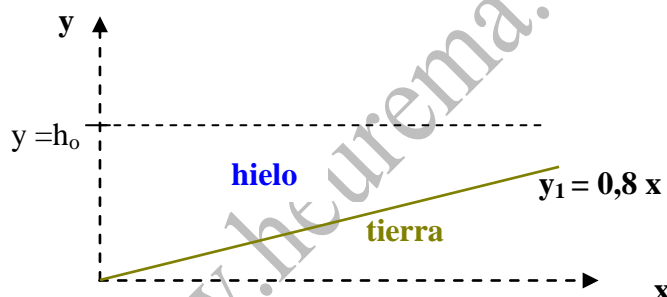


Fig. 2

El espesor vertical cuando  $x = 0$  es  $h_0 = 2$  km. Suponga que el agua en el fondo se encuentra en equilibrio. Dibuje la línea  $y_1$  y añada la línea  $y_2$  que representa la superficie superior del hielo.

d) Una capa de hielo se asienta sobre un suelo horizontal y tiene originalmente un espesor  $D = 2$  km, en ella se ha formado de forma repentina un cono de agua procedente de la fusión del hielo (fig 3)

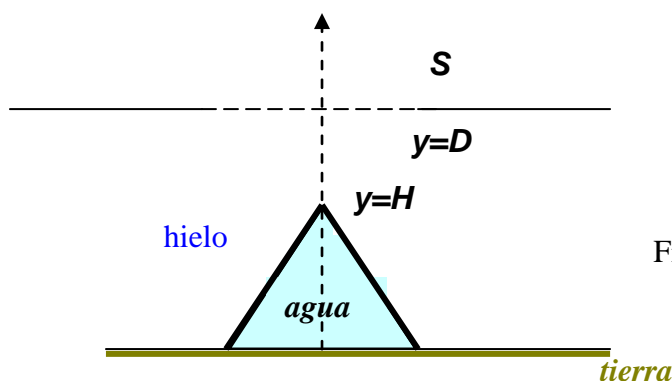


Fig.3

*La altura del cono es  $H = 1$  km y el radio  $r = 1$  km. Mostrar analíticamente y en un gráfico la forma de la superficie de la capa de hielo después de que el cono de agua se ha formado y se ha alcanzado el equilibrio hidrostático.*

*e) Una expedición internacional anual de científicos explora la temperatura de la cubierta de hielo de la Antártida. La superficie es normalmente un amplio plano pero esta vez se encuentra un profundo cráter de forma de cono con una profundidad de 100 metros y un radio de 500 metros. El espesor del hielo en esta área es 2000 metros.*

*Después de una discusión los científicos concluyen que es muy probable que haya habido una pequeña erupción volcánica debajo de la capa de hielo. A consecuencia de ella una pequeña cantidad de magma (roca fundida) se ha introducido por la parte inferior del hielo, solidificándose y enfriándose, fundiendo un cierto volumen de hielo. Los científicos intentan estimar el volumen de la intrusión de magma y del agua fundida.*

*Admitir que el hielo solamente se mueve verticalmente. Suponer que el magma está fundido a una temperatura de  $1200^\circ$ . Suponer además que la intrusión tiene forma de cono estando su base exactamente por debajo de la depresión cónica de la superficie. El tiempo de entrada del magma es pequeño comparado con el tiempo de intercambio de calor en el proceso. El flujo de calor se supone que ha sido vertical tal que el volumen fundido del hielo en cualquier momento está rodeado por una superficie cónica centrado por encima del centro de la intrusión del magma*

*Dadas estas hipótesis la fusión del hielo tiene lugar en dos etapas. Al principio el agua no está a la presión de equilibrio en la superficie del magma y por ello fluye fuera. Se supone que esta agua fluye a una temperatura de cero grados. Después se alcanza la presión hidrostática y el agua se acumula por encima de la intrusión en lugar de fluir hacia fuera.*

*Cuando el equilibrio térmico se alcanza determinar*

*1) La altura  $H$  del cono de agua respecto del fondo original de la capa de hielo 2) la altura  $h_1$  de la intrusión 3) La masa total de agua producida y la masa  $m'$  de agua que fluye hacia fuera.*

*a).- Determine el espesor  $d$  de la capa de hielo fundido cada año.*

Supongamos una capa de hielo que tiene un área  $A$  y un espesor  $x$ , siendo  $x$  el espesor de hielo que se funde a lo largo de un año.

$J_Q At$  representa el flujo calorífico que llega al hielo, siendo las dimensiones de esta expresión  $\frac{J}{m^2 \cdot s} \cdot m^2 \cdot s = J$

$L_H \rho_H A x$  representa el calor recibido por la placa de hielo y que funde esa placa

$$J_Q At = L_H \rho_H A x \Rightarrow x = \frac{J_Q t}{L_H \rho_H} = \frac{0,06 \frac{J}{m^2 s} \cdot 365 \frac{\text{día}}{\text{año}} \cdot 86400 \frac{s}{\text{día}}}{3,4 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} \cdot 0,917 \frac{kg}{m^3}} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{m}{\text{año}}$$

**b).-Obtenga una expresión para la presión  $p$  en el fondo de la cubierta de hielo en función de la coordenada  $x$ .**

La presión en un lugar del fondo del hielo de coordenada  $x$ , esta dada por

$$p = \rho_H g h + p_{\text{atm}}$$

siendo  $h$  la altura que tiene el hielo en ese lugar

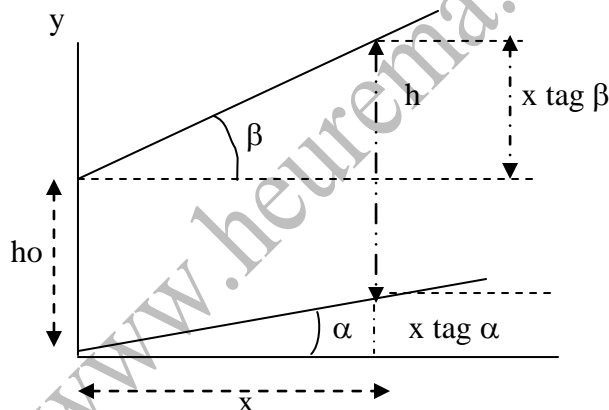


Fig. 4

De la figura 4, se deduce:

$$h + x \tan \alpha = h_0 + x \tan \beta \Rightarrow h = h_0 + x (\tan \beta - \tan \alpha)$$

$$p = \rho g x (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho g h_0 + p_{\text{atm}}$$

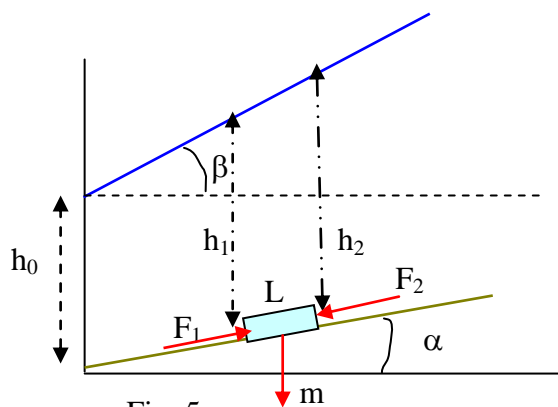


Fig. 5

La parte sombreada de la figura 5 representa un bloque de agua en equilibrio. Para que éste se produzca el peso y las fuerzas de presión deben equilibrarse. La componente sobre el suelo del peso es  $mg \sin \alpha$  y se debe cumplir que

$$F_1 = mg \sin \alpha + F_2$$

Para que esta ecuación se cumpla resulta que la pendiente de la cubierta de hielo tiene que ser negativa, para que  $h_1$  sea mayor que  $h_2$ . Si la longitud del bloque es  $L$  y las otras dos dimensiones  $a$  y  $b$  resulta:

$$\begin{aligned} F_1 &= p_1 * ab = [p_{atm} + \rho_H g h_o + \rho_H g x (\text{tag } \beta - \text{tag } \alpha)] ab \\ F_2 &= p_2 * ab = [p_{atm} + \rho_H g h_o + \rho_H g (x + L) \cos \alpha (\text{tag } \beta - \text{tag } \alpha)] ab \\ F_1 - F_2 &= -\rho_H g L \cos \alpha (\text{tag } \beta - \text{tag } \alpha) ab = mg \sin \alpha = ab L \rho_A g \sin \alpha \Rightarrow \\ &-\rho_H (\text{tag } \beta - \text{tag } \alpha) = \rho_A \text{tag } \alpha \Rightarrow \rho_H \text{tag } \beta = \text{tag } \alpha (\rho_H - \rho_A) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{tag } \beta = -\frac{\rho_A - \rho_H}{\rho_H} \text{tag } \alpha$$

$$\frac{\rho_A - \rho_H}{\rho_H} = \frac{1,000 \cdot 10^{-3} - 0,917 \cdot 10^{-3}}{0,917 \cdot 10^{-3}} = 0,091 \quad ; \quad \text{tag } \beta = -0,091 \text{ tag } \alpha \quad (1)$$

Si la línea de tierra tiene una pendiente de  $\text{tag } \alpha = 0,8$ , la capa superior del hielo tiene una pendiente  $\text{tag } \beta = -0,091 * 0,8 = -0,0728$ , la ecuación de la capa de hielo es  $y = -0,0728 x$

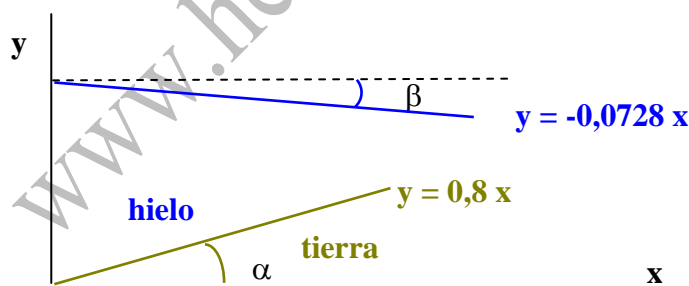
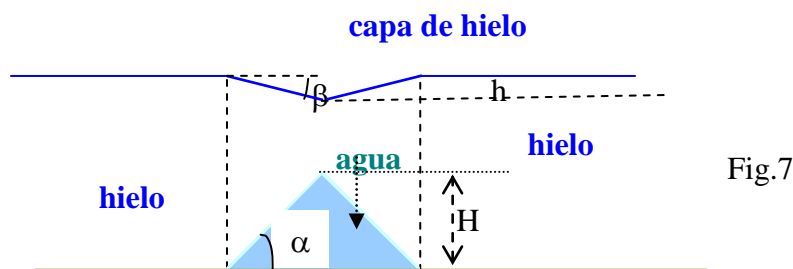


Fig.6

**d).- Mostrar analíticamente y en un gráfico la forma de la superficie de la capa de hielo después de que el cono de agua se ha formado y se ha alcanzado el equilibrio hidrostático.**

Para que el agua esté en equilibrio se ha de cumplir la ecuación (1). Por tanto si consideramos un plano que corta al bloque de agua dando una sección triangular, cuando la pendiente de la generatriz del cono es positiva la del hielo es negativa y viceversa (fig.7)



Si consideramos que el agua forma un cono, en la superficie del hielo se formará una depresión en forma de cono. Si el ángulo con la horizontal del cono de agua es alfa y del cono de la depresión es beta y están relacionados ambos valores por la ecuación (1). Cuando  $\text{tag } \alpha > 0$ ,  $\text{tag } \beta < 0$ , y al contrario en la otra pendiente

Los volúmenes del cono de agua y del cono de la depresión son

$$V_A = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi R^2 * R \text{ tag } \alpha \quad ; \quad V_D = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi R^2 * R \text{ tag } \beta$$

Dividiendo las dos ecuaciones miembro a miembro resulta:

$$\frac{H}{h} = \frac{\text{tag } \alpha}{\text{tag } \beta} \Rightarrow h = H \frac{\text{tag } \beta}{\text{tag } \alpha} = H \frac{\rho_A - \rho_H}{\rho_H} = 0,091 * 1 \text{ km} = 91 \text{ m}$$

Podríamos razonar que la depresión se produce debido a que el hielo se convierte en agua y por tanto aumenta su peso, y para compensar este efecto se produce la depresión que significa una ausencia de masa debido a la desaparición del hielo. La variación de masa debido a que el hielo se funde es igual a la variación de masa de la depresión

$$\frac{1}{3} \pi R^2 H (\rho_A - \rho_H) = \frac{1}{3} \pi R^2 h \rho_H \Rightarrow h = H \frac{\rho_A - \rho_H}{\rho_H}$$

e).- 1) La altura H del cono de agua respecto del fondo original de la capa de hielo  
2) la altura  $h_1$  de la intrusión 3) La masa total de agua producida y la masa  $m'$  de agua que fluye hacia fuera.

El proceso de formación de la depresión en la superficie se explica en las etapas de la figura 8.

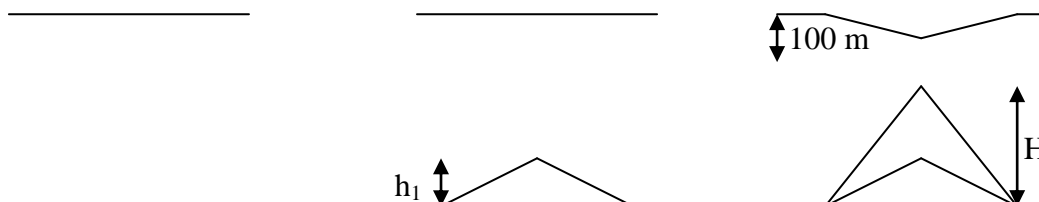


Fig.8

El magma penetra en el hielo y funde un volumen igual al volumen del magma, después el magma sigue cediendo calor al hielo y se forma un cono de agua en

equilibrio con lo que se ha formado una depresión en forma de cono en la superficie del hielo. El equilibrio térmico se alcanzará cuando el magma se condense y enfríe hasta cero grados. Esto supone que se transmite una cantidad de calor dado por la expresión:

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \rho_M (L_M + c_M \Delta t)$$

De esta energía calorífica, la cantidad  $\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \rho_H L_H$  se emplea para fundir el cono de altura  $h_1$  y el resto para formar el cono de agua

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \rho_M (L_M + c_M \Delta t) - \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \rho_H L_H = \frac{1}{3} \pi r^2 (H - h_1) \rho_H L_H$$

$$h_1 \rho_M (L_M + c_M \Delta t) = H \rho_H L_H \Rightarrow H = h_1 \frac{\rho_M (L_M + c_M \Delta t)}{\rho_H L_H} = h_1 \frac{2,9 \cdot 10^3 (4,2 \cdot 10^5 + 700 \cdot 1200)}{0,917 \cdot 10^3 \cdot 3,4 \cdot 10^5}$$

$$H = 11,72 h_1$$

Por otra parte relacionamos, como se ha hecho anteriormente, el volumen de agua en equilibrio con el volumen de la depresión

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (H - h_1) (\rho_A - \rho_H) = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 \rho_H \Rightarrow H - h_1 = \frac{h_1 \rho_H}{\rho_A - \rho_H} = \frac{100 \cdot 0,917 \cdot 10^3}{0,083 \cdot 10^3} = 1105$$

Combinando las ecuaciones

$$1105 + h_1 = 11,72 h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1105}{10,72} = 103 \text{ m}$$

$$H = 1105 + 103 = 1208 \text{ m}$$

La masa de agua fundida es

$$m_{H_2O} = \frac{1}{3} \pi r^2 \rho_A (H - h_1) = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 100^2 \cdot 1 \cdot 10^3 (1208 - 103) = 2,9 \cdot 10^{11} \text{ kg}$$

La masa de agua que fluye

$$m_{H_2O} = \frac{1}{3} \pi r^2 \rho_A h_1 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 100^2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 103 = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ kg}$$

3.-En este problema se analiza e interpretan medidas hechas en 1994 de una emisión de radio ondas procedentes de una fuente dentro de nuestra galaxia.

El receptor se sintonizó en una banda de frecuencias cuya longitud de onda es varios centímetros. La figura 3.1 indica zonas de emisión constantes de forma similar a las líneas de altitud en un mapa geográfico. En dicha figura se interpreta que los dos máximos son la proyección de dos objetos que se mueven alejándose entre sí a partir de un centro común que en la figura se indica mediante cruces. El centro, que se supone permanece fijo en el espacio, es también un fuerte emisor de radiación pero principalmente en otras longitudes de onda. Las medidas se hicieron en los días indicados a la misma hora.

La escala de la figura está dada por un segmento rectilíneo que corresponde a un segundo de arco (as) ( $1\text{as} = 1/3600^\circ$ ).

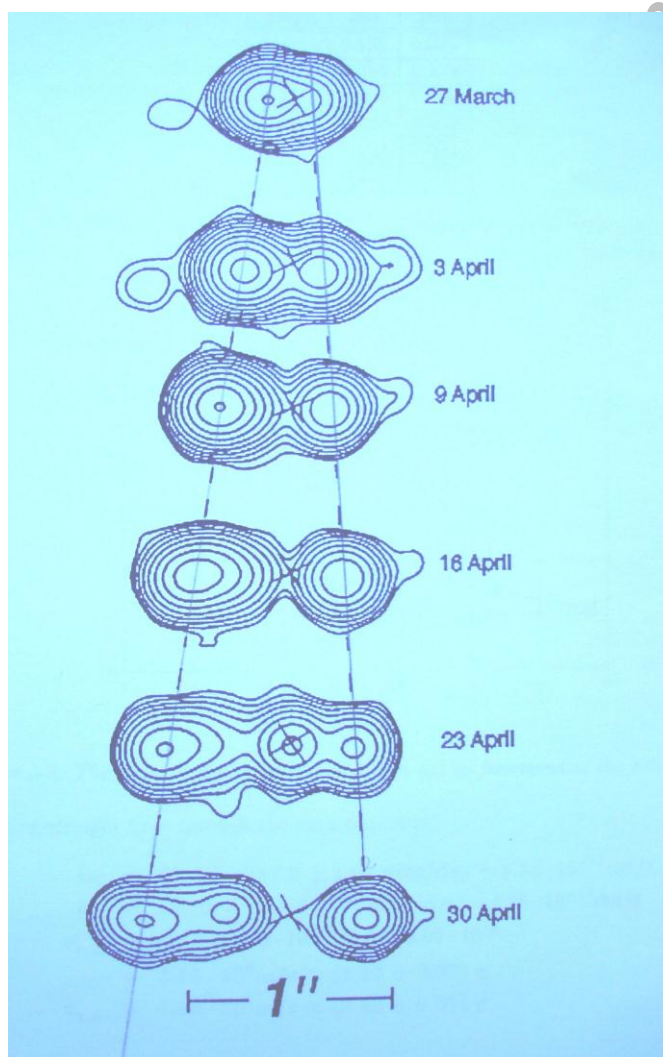


Fig.3.1

La distancia al cuerpo celestial señalado por las cruces en la figura se estima es  $R = 12,5 \text{ kpc}$ . ( $1 \text{ kpc} = 3,09 \cdot 10^{19} \text{ m}$ ). La velocidad de la luz es  $3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . No se piden errores en la solución.

a) Se indica la posición angular de los dos radio emisores, relativas al centro común, por  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$ , siendo el subíndice 1 la emisión situada a mano izquierda y la 2 a la derecha en la citada figura, siendo  $t$  el tiempo de observación. Las velocidades angulares observadas desde la Tierra se indican por  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente. Las velocidades lineales aparentes trasversales por  $v_1^*$  y  $v_2^*$ .

A partir de la figura 3.1 encontrar los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en milisegundos de arco por día (mas/d) y de  $v_1^*$  y  $v_2^*$ . Algún resultado puede resultar sorprendente.

b) Con la finalidad de intentar aclarar el resultado sorprendente de la parte (a) consideremos una fuente de luz que se desplaza con velocidad  $v$  formando un ángulo  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) con la dirección de un observador distante  $O$ , tal como se indica en la figura 3.2

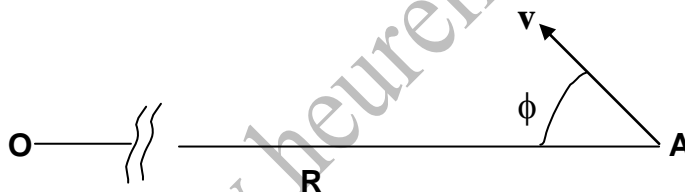


Fig. 3.2

El observador está situado en  $O$  y la posición original de la fuente de luz está en  $A$

La velocidad puede expresarse mediante  $v = \beta c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. La distancia a la fuente, medida por el observador, es  $R$ . La velocidad angular de la fuente, desde el punto de vista del observador, es  $\omega$ , y la velocidad lineal aparente perpendicular a la línea de visión es  $v^*$ .

Expresar  $\omega$  y  $v^*$  en función de  $\beta$ ,  $R$  y  $\phi$ .

c) Suponemos que los dos objetos emisores descritos en la introducción y en la parte a) se mueven en direcciones opuestas con la misma velocidad  $v = \beta c$ . Con el resultado obtenido en la parte b) se pueden calcular  $\beta$  y  $\phi$  a partir de las velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y de la distancia  $R$ . Ahora,  $\phi$



es el ángulo definido en la parte b) para el objeto situado a la izquierda, al que corresponde el subíndice 1 de la parte a)

d) Para el cuerpo 1 determinar la condición que hace que la velocidad aparente perpendicular sea mayor que  $c$ .

Escribir la condición en la forma  $\beta > f(\Phi)$  e indicar la expresión de la función  $f$ ,

Dibujar la región en el plano  $(\beta, \phi)$  en la que  $v^* > c$

e) Para un cuerpo del apartado b) encontrar la velocidad ( $v^*$ ) máxima para un determinado valor de  $\beta$ . Probar que la velocidad aumenta sin límite cuando  $\beta \rightarrow 1$

f) La estimación de  $R$  que se dio en la introducción es poco real. Los científicos han especulado con un mejor método para determinar  $R$ . Se supone que se puede medir el efecto Doppler para las longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de los dos emisores correspondientes a la longitud de onda  $\lambda_0$  en el sistema en reposo.

A partir de la expresión del efecto Doppler relativista

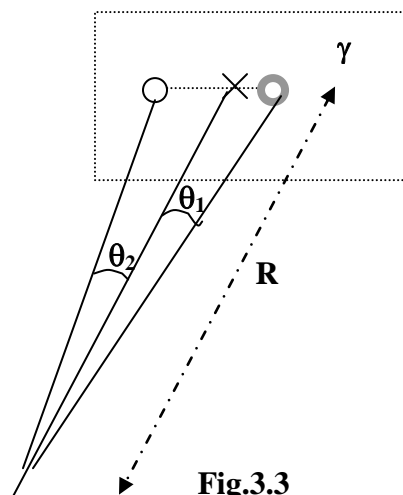
$$\lambda = \frac{\lambda_0(1 - \beta \cos\Phi)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

y suponiendo que ambos objetos tienen la misma velocidad, encontrar la expresión

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}$$

y determinar el coeficiente numérico  $\alpha$ .

a).- Para entender el problema veamos que el observador en la Tierra se encuentra a una gran distancia del objeto fijo señalado con una cruz. Los dos objetos móviles se separan entre sí y el conjunto aparece como situado en un plano  $\gamma$  perpendicular a  $R$



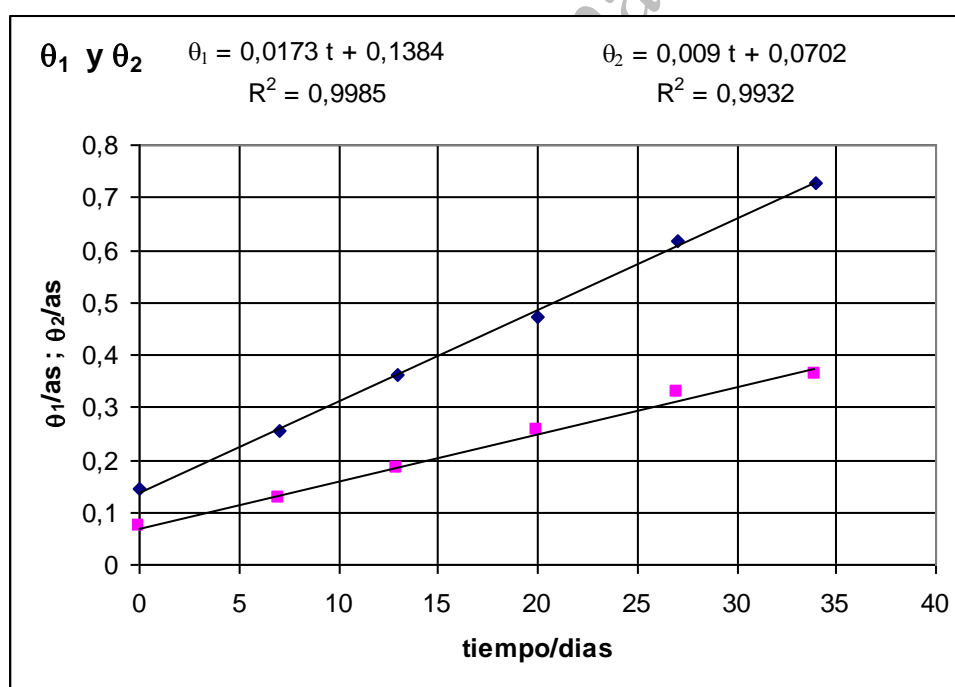
En la figura 3.1 se miden las distancias lineales de los dos cuerpos respecto al fijo y se encuentran los siguientes valores

$\theta_1(t)$	0,4	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0
$\theta_2(t)$	0,2	0,35	0,5	0,7	0,85	1,0

Estos valores deben convertirse en as a partir del factor de escala  $f = \frac{1\text{as}}{2,75\text{ cm}}$

$\theta_1(t)/\text{as}$	0,145	0,255	0,364	0,473	0,618	0,727
$\theta_2(t)/\text{as}$	0,073	0,127	0,182	0,255	0,345	0,364
t/días	0	7	13	20	27	34

El tiempo se comienza a contar a partir del primer día de observación que corresponde al 27 de marzo, y a partir de ese tiempo cero se cuentan los días. Con los valores de la última tabla se confecciona la gráfica posiciones angulares – tiempos



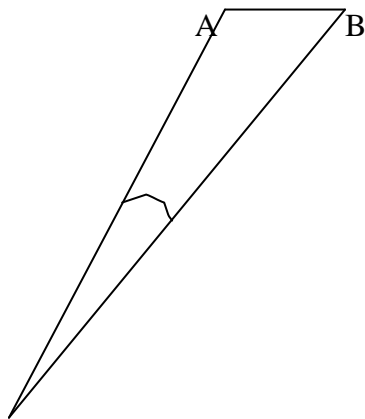
La pendiente de cada una de las rectas representa la velocidad angular que determina el observador de la Tierra. Esto es así porque

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Al pedir los resultados en mas/día

$$\omega_1 = 0,0173 \frac{\text{as}}{\text{día}} = 17,3 \frac{\text{mas}}{\text{día}} \quad ; \quad \omega_2 = 0,009 \frac{\text{as}}{\text{día}} = 9,0 \frac{\text{mas}}{\text{día}}$$

La velocidad trasversal sería  $v^* = AB/t$ . La recta AB se puede sustituir por el arco de radio R



Entonces la velocidad lineal será igual a la angular por el radio. Las velocidades angulares expresadas en rad/ s son respectivamente:

$$\omega_1 = 0,0173 * \frac{3,1416}{\frac{180 * 3600}{86400}} = 9,7 \cdot 10^{-13} \frac{\text{rad}}{\text{s}} ; \omega_2 = 0,009 * \frac{3,1416}{\frac{180 * 3600}{86400}} = 5,0 \cdot 10^{-13} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

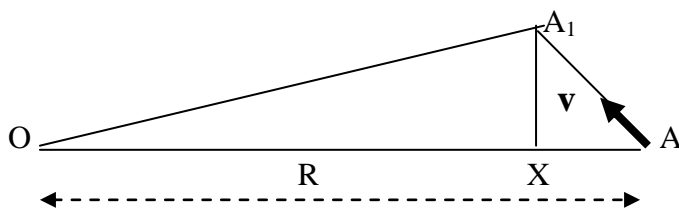
y las velocidades trasversales:

$$v_1^* = \omega_1 R = 9,7 \cdot 10^{-13} * 12,5 * 3,09 \cdot 10^{19} = 3,8 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,3 \text{ c} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2^* = \omega_2 R = 5,0 \cdot 10^{-13} * 12,5 * 3,09 \cdot 10^{19} = 1,9 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0,6 \text{ c} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El resultado sorprendente es encontrar una velocidad superior a la de la luz.

**b).**- Los cálculos anteriores se han hecho en el supuesto de que las velocidades de los emisores son perpendiculares a R (están en el plano  $\gamma$ , fig. 3.3 ) y que la luz no emplea tiempo en llegar al observador.



Desde el punto de vista del móvil que parte de A con una velocidad  $v$  se cumple que  $AA_1 = v \Delta t$ , siendo  $\Delta t$  la diferencia de tiempos entre el instante  $t_A$  y  $t_{A_1}$ . La luz emitida en el instante  $t_A$  llega al observador en O un tiempo después, que es el que emplea en viajar la luz de A a O.

$$t_{AO} = t_A + \frac{OA}{c}$$

Por las mismas razones el tiempo de llegada a O de la luz de  $A_1$

$$t_{A_1O} = t_{A_1} + \frac{OA_1}{c}$$

El intervalo de tiempo para el observador en O es:

$$\Delta t_O = t_{A_1O} - t_{AO} = t_{A_1} - t_A + \frac{OA_1 - OA}{c} = \Delta t - \frac{OA - OA_1}{c}$$

Teniendo presente el gran valor de R, se puede aproximar

$$OA - OA_1 = AX = AA_1 \cos \phi$$

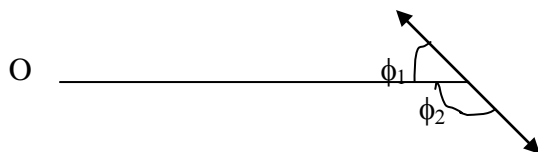
La velocidad transversal para el observador en O

$$v^* = \frac{XA_1}{\Delta t_O} = \frac{AA_1 \sin \phi}{\Delta t - \frac{AA_1 \cos \phi}{c}} = \frac{AA_1 \sin \phi}{\frac{AA_1}{v} - \frac{AA_1 \cos \phi}{c}} = \frac{vc \sin \phi}{c - v \cos \phi} = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}$$

La velocidad angular para el observador en O

$$\omega = \frac{v^*}{R} = \frac{\beta c \sin \phi}{R (1 - \beta \cos \phi)} \quad (1)$$

**c).- Se pueden calcular  $\beta$  y  $\phi$  a partir de las velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  y de la distancia R**



Aplicamos la ecuación (1) al movimiento de 1, para el que  $\phi_1 = \phi$

$$\omega_1 = \frac{\beta c \sin \phi}{R (1 - \beta \cos \phi)} \quad (2)$$

Para el móvil 2 el argumento utilizado en b) es el mismo, ahora el ángulo  $\phi_2$  es suplementario de  $\phi_1 = \phi$ , y el coseno de  $\phi_2$  es igual pero de signo contrario

$$\omega_2 = \frac{\beta c \operatorname{sen} \phi}{R (1 + \beta \cos \phi)} \quad (3)$$

A partir de las ecuaciones (2) y (3)

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1 R}{\beta c} (1 - \beta \cos \phi) &= \frac{\omega_2 R}{\beta c} (1 + \beta \cos \phi) \Rightarrow \omega_1 (1 - \beta \cos \phi) = \omega_2 (1 + \beta \cos \phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 &= \beta \cos \phi (\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \quad (4) \end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones (4) y (2)

$$\omega_1 = \frac{\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} * \frac{c \operatorname{sen} \phi}{\cos \phi}}{R \left( 1 - \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right)} \Rightarrow \omega_1 = \frac{(\omega_1 - \omega_2) c \operatorname{tag} \phi}{2R\omega_2} \Rightarrow \operatorname{tag} \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c (\omega_1 - \omega_2)} \quad (5)$$

los valores numéricos obtenidos en el apartado a) son:

$$\omega_1 = 9,7 \cdot 10^{-13} \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad \omega_2 = 5,0 \cdot 10^{-13} \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad R = 12,5 * 3,09 \cdot 10^{19} = 3,86 \cdot 10^{20} \text{ m}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (5)

$$\operatorname{tag} \phi = \frac{2 * 3,86 \cdot 10^{20} * 9,7 * 5,0 \cdot 10^{-26}}{3 \cdot 10^8 * 4,7 \cdot 10^{-13}} = 2,66 \Rightarrow \phi = 69,4^\circ$$

De la ecuación (4)

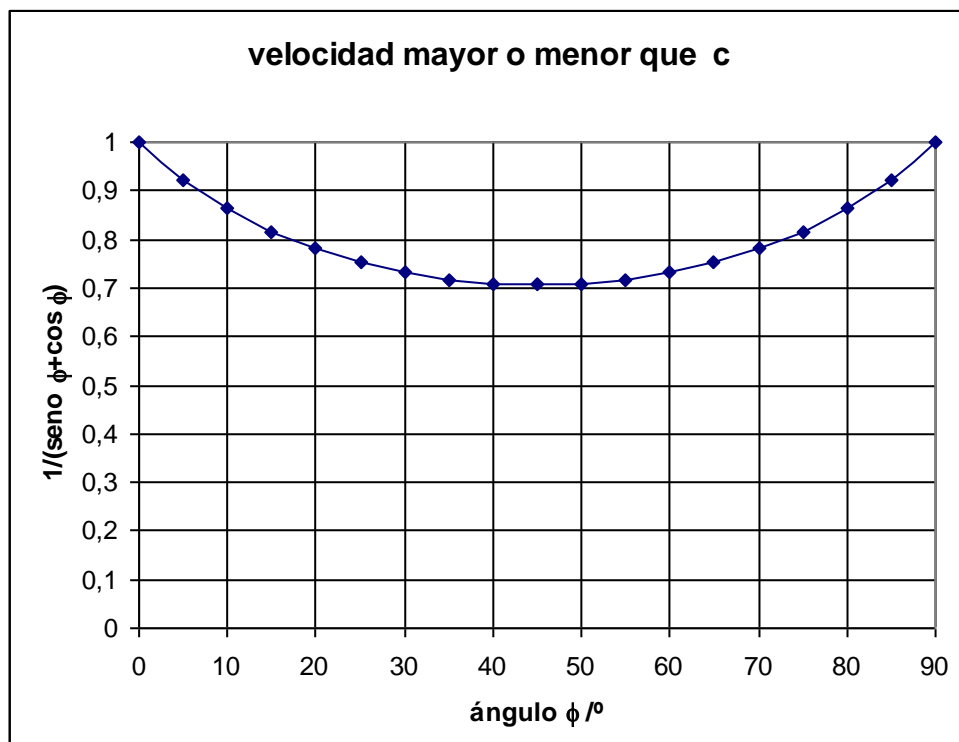
$$\beta = \frac{(9,7 - 5,0) 10^{-13}}{14,7 \cdot 10^{-13} * \cos 69,4} = 0,91$$

**d)**

Teniendo en cuenta el valor de  $v^*$  encontrado en el apartado b)

$$\begin{aligned} v^* = \frac{\beta c \operatorname{sen} \phi}{1 - \beta \cos \phi} \geq c \Rightarrow \frac{\beta \operatorname{sen} \phi}{1 - \beta \cos \phi} \geq 1 \Rightarrow \beta \operatorname{sen} \phi \geq 1 - \beta \cos \phi \Rightarrow \beta (\operatorname{sen} \phi + \cos \phi) \geq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta \geq \frac{1}{\operatorname{sen} \phi + \cos \phi} \end{aligned}$$

Representamos la gráfica  $\beta$  frente a  $\frac{1}{\text{sen}\phi + \text{cos}\phi}$



La velocidad  $v^*$  es mayor que la velocidad de la luz cuando  $\beta \geq \frac{1}{\text{sen}\phi + \text{cos}\phi}$ . La interpretación de la gráfica anterior la podemos hacer de dos maneras:

1) Para un valor determinado del ángulo  $\phi$  podemos saber los valores de  $\beta$  para los que  $v^*$  es mayor o menor que  $c$ , por ejemplo para un ángulo  $\phi = 70^\circ$  observamos que cuando el valor de  $\beta$  es menor que 0,78,  $v^* < c$ , y para valores mayores de 0,78 entonces  $v^* > c$ . Si  $\beta = 0,78$  estamos justamente en un punto de la curva. En consecuencia esta curva separa dos regiones la que está por debajo indica valores de  $v^* < c$  y la que está por encima valores de  $v^* > c$

2) Para un valor dado de  $\beta$ , podemos saber para qué ángulos la velocidad de  $v^*$  es mayor o menor que la de la luz. Supongamos que  $\beta = 0,8$ , la curva indica que para los ángulos comprendidos entre 17 y 73 grados la velocidad es mayor que  $c$  y para el resto de los ángulos menor.

Se observa en la gráfica que cuando  $\beta$  está por debajo de 0,7 la velocidad medida es siempre menor que  $c$  cualquiera que sea el ángulo

e) Para hallar el máximo derivamos la expresión de la velocidad respecto de  $\phi$  e igualamos a cero.

$$\frac{dv^*}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\beta c \operatorname{sen}\phi}{1 - \beta \cos\phi} \right) = \frac{(1 - \beta \cos\phi)^* (\beta c \cos\phi) - (\beta c \operatorname{sen}\phi)^* \beta \operatorname{sen}\phi}{(1 - \beta \cos\phi)^2} = 0$$

Sustituida esta condición en la expresión de la velocidad resulta:

$$(v^*)_{\text{máxima}} = \frac{\beta c \operatorname{sen}\phi}{1 - \beta^2} = \frac{\beta c \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Si  $\beta$  tiende a 1 la velocidad máxima tiende a infinito.

**f).-**

Aplicamos la expresión del efecto Doppler

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_o (1 - \beta \cos\phi)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_o (1 + \beta \cos\phi)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{\lambda_1 \sqrt{1 - \beta^2}}{\lambda_o} = 1 - \beta \cos\phi \quad ; \quad \frac{\lambda_2 \sqrt{1 - \beta^2}}{\lambda_o} = 1 + \beta \cos\phi \quad \text{sumando ambas ecuaciones}$$

$$\frac{\sqrt{1 - \beta^2} (\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_o} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_o^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_o^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}$$

El coeficiente numérico  $\alpha$  es igual a 4.