PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXVIII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. CANADA.1997

1.- a) Una masa pequeña cuelga del extremo de un muelle ideal de masa despreciable y oscila arriba y abajo con una frecuencia f. Si el muelle se corta por la mitad y se cuelga la misma masa de su extremo ¿cuál será la nueva frecuencia de oscilación?

El módulo de Young de un material se define como el cociente entre la fuerza por unidad de área y el alargamiento por unidad de longitud

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{x}{l}} = \frac{Fl}{Ax} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{EA}{l}x = kx$$

Cuando el muelle se corta por la mitad el módulo de Young no varía, tampoco cambia el área

$$F = \frac{EA}{\frac{l}{2}}x' = 2kx'$$

La frecuencia de ambos muelles

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f' = \sqrt{2}\ f$$

b) El radio del átomo de hidrógeno en su estado fundamental es a_o= 0,0529 nm (llamado radio de Bohr) ¿Cuál sería el radio a´ de un "hidrógeno muónico" esto es, un átomo de hidrógeno en el que se reemplaza el electrón por un muón de la misma carga que el electrón y cuya masa es 207 veces la del electrón?

Para el átomo de hidrógeno se cumple que la fuerza centrípeta que necesita el electrón para girar alrededor del protón es precisamente la fuerza de atracción eléctrica entre ambas partículas. El mismo razonamiento sirve para el hidrógeno muónico.

$$m_e\frac{v_e^2}{a_o} = k\frac{q^2}{a_o^2} ; m_\mu\frac{v_\mu^2}{a} = k\frac{q^2}{a^{\prime\prime 2}} \quad \Rightarrow \quad m_e v_e^2 a_o = m_\mu v_\mu^2 a' \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a_o} = \frac{1}{207}\frac{v_e^2}{v_\mu^2}$$

Aplicamos a ambos átomos la condición cuántica de Bohr

$$m_e v_e * 2\pi a_o = nh \ ; \quad m_\mu v_\mu * 2\pi a' = nh \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a_o} = \frac{1}{207}\frac{v_e}{v_\mu}$$

Combinando ambas ecuaciones

$$\frac{a´}{a_o} = \frac{1}{207} * 207^2 \frac{a´^2}{a_o^2} \quad \Rightarrow \quad a´ = \frac{a_o}{207} = \frac{0{,}0529}{207} = 2{,}56.10^{-4} \ \text{nm}$$

c) La temperatura media de la Tierra es T = 287 K ¿Cuál sería la nueva temperatura media si la distancia media entre el Sol y la Tierra se redujese en 1%?

P representa la potencia emitida por el Sol que cuando llega a la Tierra se distribuye en una esfera de radio d, siendo d la distancia Sol-Tierra. Esa energía que llega por unidad de tiempo es absorbida por la Tierra. Esta energía es la contenida sobre una superficie que corresponde al círculo máximo de la Tierra, esto es, a πR_T^2.
Por otra parte la Tierra radia al exterior energía con lo que llega a establecerse un equilibrio entre la energía entrante y la emitida

$$k\frac{P}{4\pi d^2} * \pi R_T^2 = k´\sigma T^4$$

Cuando la distancia disminuya en un 1%, la expresión anterior se escribe

$$k\frac{P}{4\pi d´^2} * \pi R_T^2 = k´\sigma T´^4$$

de ambas se deduce

$$\frac{d´^2}{d^2} = \frac{T^4}{T´^4} \Rightarrow T´ = T\sqrt{\frac{d}{d´}} = T\sqrt{\frac{d}{d - 0{,}01d}} = 287\sqrt{\frac{1}{0{,}99}} = 288{,}5 \ \text{K}$$

d) En un día determinado el aire esta seco y su densidad es d =1,2500 kg/m^3. Si otro día la humedad del aire es tal que contiene en masa un 2% de vapor de agua , siendo la presión y la temperatura iguales a las del día seco, ¿calcular la densidad de este aire húmedo?
Masa molar del agua 18 g/mol ; masa molar promedio del aire seco 28,8g/mol

Un volumen V de aire seco se encuentra a la presión P y a la temperatura T. De acuerdo con la ley de los gases perfectos

$$PV = \frac{g_{AS}}{28{,}8}RT \quad ; \quad P = \frac{\delta_{AS}RT}{28{,}8} \quad (1)$$

En la ecuación anterior la densidad del aire seco δ_{AS} hay que expresarla en g/L cuyo valor numérico es el mismo que si se expresa en kg/m^3.

Si consideramos el mismo volumen de aire húmedo que de seco su presión y temperatura son las mismas que la del aire seco. Aplicamos la ley de Dalton de las presiones parciales

$$p_{agua}V = \frac{x}{18}RT \quad ; \quad p_{aire}V = \frac{y}{28{,}8}RT$$

x es la masa de agua e y la de aire, $x = 0{,}02\ y$, y $p_{agua}+p_{aire} = P$

$$\frac{p_{agua}}{p_{aire}} = \frac{\frac{x}{18}}{\frac{y}{28{,}8}} = \frac{28{,}8 * 0{,}02 * y}{18y} \quad \Rightarrow \quad p_{agua} = 0{,}032\ p_{aire} \quad ; \quad P = 1{,}032 p_{aire} \ (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$1{,}032 p_{aire} = 1{,}032 * \frac{yRT}{V * 28{,}8} = \frac{\delta_{AS}RT}{28{,}8} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{V} = \frac{\delta_{AS}}{1{,}032}$$

$$\frac{x+y}{V} = \delta_{AH} = \frac{0{,}02y + y}{V} = \frac{1{,}02y}{V} = 1{,}02 * \frac{\delta_{AS}}{1{,}032} = 1{,}235 \ \frac{g}{L}$$

e) Un helicóptero se mantiene flotando en el aire cuando la potencia de su motor es P. Si se construye otro helicóptero a escala ½ del anterior para todas las dimensiones lineales,¿Cuál será la potencia de su motor para que se mantenga flotando en el aire?

El helicóptero se mantiene en el aire debido a que el motor por medio de sus aspas toma aire a una velocidad nula y lo lanza hacia abajo con una velocidad v. La masa de aire lanzada sufre una variación en su cantidad de movimiento y eso crea una fuerza de reacción sobre el helicóptero que debe ser igual a su peso

Si R representa el radio de las aspas del primer helicóptero en un tiempo Δt ha recogido una masa de aire Δm. Esa masa de aire está contenida en un cilindro de base πR^2 y altura v Δt

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 v \Delta t \ \rho * v}{\Delta t} = \pi R^2 \rho v^2 = \text{Peso} \ (1)$$

En el tiempo Δt la masa de aire Δm ha aumentado su energía cinética desde cero hasta ½ $\Delta m\ v^2$, la potencia valdrá

$$P = \frac{\frac{1}{2}\Delta m v^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2 v\Delta t\ \rho v^2}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 \rho v^3}{2} \quad (2)$$

De la ecuación (1) se deduce que la velocidad es proporcional a

$$v \approx \sqrt{\frac{Peso}{R^2}} \approx \sqrt{\frac{L^3}{L^2}} \approx \sqrt{L} = L^{\frac{1}{2}}$$

De la ecuación (2) se deduce que la potencia es proporcional a

$$P \approx R^2 v^3 \approx L^2 * L^{\frac{3}{2}} \approx L^{\frac{7}{2}}$$

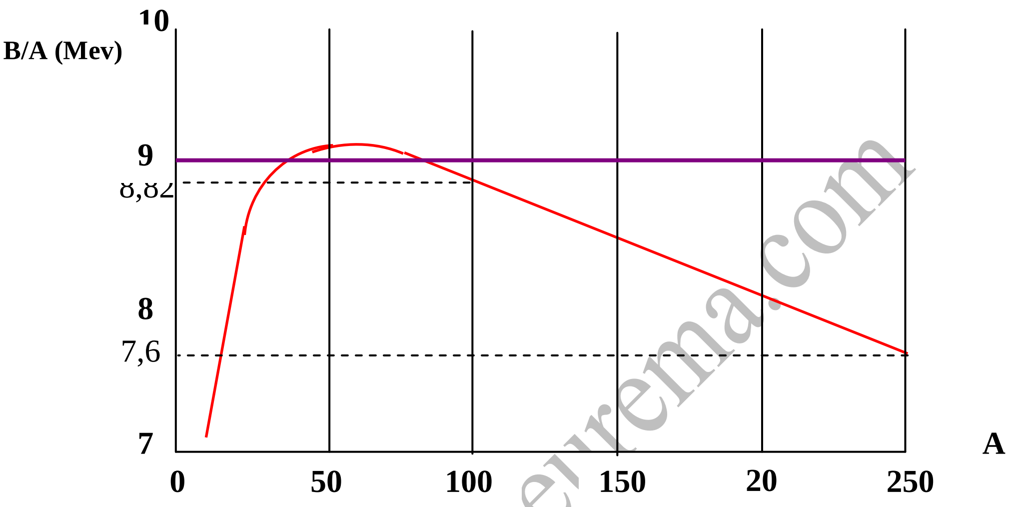
$$\frac{P'}{P} = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}{L^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}} = 0{,}088 \qquad \Rightarrow \qquad P' = 0{,}088\ P$$

2) La masa M de un núcleo atómico con Z protones y N neutrones (número másico A = N+Z) es la suma de las masas de los constituyentes, protones y neutrones, menos la energía de enlace B/c^2

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

La gráfica inferior indica los valores de B/A frente a A. En general un valor alto de B/A indica un núcleo estable.

Energía de enlace por nucleón



a) Por encima de un cierto valor de A, los núcleos pueden emitir partículas α (A = 4) . Utilice una aproximación lineal en la curva de la gráfica para A >100 para estimar el valor de A

Suponga:

1) ***Que los núcleos inicial y final están en esa curva***

2) ***La energía de enlace de la partícula α es B_{He}= 25 MeV***

b) La energía de enlace de un núcleo atómico con Z protones y N neutrones (A = Z+N) puede expresarse mediante la siguiente fórmula empírica

$$B = a_1 A - a_2 A^{\frac{2}{3}} - a_3 Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} - \delta$$

Los valores de δ están dados por:

$+a_5 A^{-\frac{3}{4}}$ ***para un núcleo con N impar y Z impar***

0 ***para un núcleo con N par y Z impar ó N impar y Z par***

$-a_5 A^{-\frac{3}{4}}$ ***para un núcleo con N par y Z par***

Los valores de los coeficientes son:
a_1 = 15,8 MeV ; a $_2$= 16,8 MeV : a_3 = 0,72 MeV ; a $_4$= 23,5 MeV ; a_5 = 33,5 MeV

c) Obtenga una expresión para Z que corresponda al núcleo de mayor energía de enlace en función de A. Suponga de δ en este cálculo es cero.

d) Para qué valor de Z con A = 200 se obtiene el máximo valor de B/A. Haga el calculo incluyendo el término δ.

e) Considere los siguientes tres núcleos $^{128}_{53}I$ $^{128}_{54}Xe$ $^{128}_{54}Cs$, todos ellos con el mismo número másico. Determine cuáles pueden verificar los siguientes procesos: 1) emisión β^- 2) emisión β^+(positrón) 3) emisión $\beta^-\beta^-$ (dos electrones simultáneamente) 4) captura electrónica (captura de un electrón de la corteza)

1) La emisión de una partícula alfa corresponde a la siguiente reacción nuclear

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y$$

El valor de Q debe ser mayor que cero

$$Q = \left(M_X - M_{He} - M_Y\right)\, c^2$$

$$M_X c^2 = Zm_p c^2 + \left(A - Z\right)\, c^2 - B_X$$
$$M_{He} c^2 = 2m_p c^2 + 2\;\, c^2 - B_X$$
$$M_Y c^2 = \left(Z - 2\right)m_p c^2 + \left(A - 4 - Z + 2\right)\, c^2 - B_X$$

$$Q = -B_X + B_{He} + B_Y > 0$$

La aproximación lineal la hacemos tomando las coordenadas de dos puntos de la parte lineal y establecemos la ecuación de una recta entre dos puntos y la aplicamos a(100;8,82) y (250;7,6).Recordemos que y representa la energía de enlace por nucleón B/A y x el número de masa A

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 100}{y - 8{,}82} = \frac{250 - 100}{7{,}6 - 8{,}82} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = -0{,}0081A + 9{,}63$$

Tenemos para la energía de enlace $B_x = -0{,}0081A_x^2 + 9{,}63A_x$ y para $B_y = -0{,}0081(A_x - 4)^2 + 9{,}63(A_x - 4)$, sabemos que $B_{He} = 25{,}0\,MeV$. Aplicamos a

$$Q = -B_X + B_{He} + B_Y > 0$$

$$0{,}0081A_X^2 - 9{,}63A_X + 25{,}0 - 0{,}0081(A_X - 4)^2 + 9{,}63(A_X - 4) > 0 \quad \Rightarrow \quad A_X > 209$$

Para que Q sea positivo, el número de masa del nucleón ha de ser mayor de 209.

b) y c).- Obtenga una expresión para Z que corresponda al núcleo de mayor energía de enlace en función de A

Para calcular el valor máximo de Z derivamos la expresión dada en el enunciado

$$B = 15{,}8A - 16{,}8A^{\frac{2}{3}} - 0{,}72Z^2A^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{A}(A - 2Z)^2$$

$$\frac{dB}{dZ} = -1{,}44ZA^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{A}2\ (A - 2Z)*(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{94A}{188 + 1{,}44A^{\frac{2}{3}}}$$

d) *)* Para qué valor de Z con A = 200 se obtiene el máximo valor de B/A. Haga el calculo incluyendo el término δ.

Para aproximarnos al valor de Z utilizamos la expresión anterior y en ella sustituimos A =200 y el resultado es Z = 79,2, teniendo en cuenta que Z es un número entero, podemos ensayar en la ecuación los enteros más próximos Z = 79 y Z = 80.

Cuando Z = 79 , N = 200-79 = 121, se trata de un núcleo impar-impar

$$B = a_1A - a_2A^{\frac{2}{3}} - a_3Z^2A^{-\frac{1}{3}} - a_4\frac{(N - Z)^2}{A} - a_5A^{-\frac{3}{4}}$$

Sustituyendo valores resulta B/A =8,0483

Cuando Z = 80, N = 120, se trata de un núcleo par-par

$$B = a_1A - a_2A^{\frac{2}{3}} - a_3Z^2A^{-\frac{1}{3}} - a_4\frac{(N - Z)^2}{A} + a_5A^{-\frac{3}{4}}$$

y el valor B/A = 8,0499

e).- Considere los siguientes tres núcleos $^{128}_{53}I$ $^{128}_{54}Xe$ $^{128}_{54}Cs$

e1).- Desintegración β⁻

La emisión de un electrón por parte del núcleo implica la siguiente reacción nuclear

$$ {}^{A}_{Z}X \;\rightarrow\; e^{-} + {}^{A}_{Z+1}Y $$

El valor de Q es

$$ Q = c^2\left(M_X - M_e - M_Y\right) $$

$$ M_X c^2 = Z m_p c^2 + (A - Z)\ c^2 - B_X $$
$$ M_e c^2 = 0{,}51\ \text{MeV} $$
$$ M_Y c^2 = (Z+1) m_p c^2 + (A - Z - 1)\ c^2 - B_Y $$

$$ Q = m_n c^2 - m_p c^2 - M_e c^2 + B_Y - B_X = 939{,}57 - 938{,}27 - 0{,}51 + B_Y - B_X = 0{,}79 + B_Y - B_X $$

Los dos primeros términos de B son comunes para todos los núcleos ya que A es el mismo. A esos dos términos los designamos con P

El ${}^{128}_{53}I = X$, es un núcleo impar-impar, el ${}^{128}_{54}Xe = Y$ es un núcleo par-par

$$ B_X = P - 0{,}72 * 53^2 * 128^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{128}(128 - 2*53)^2 - 33{,}5 * 128^{-\frac{3}{4}} = P - 491{,}05 $$
$$ B_Y = P - 0{,}72 * 54^2 * 128^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{128}(128 - 2*54)^2 + 33{,}5 * 128^{-\frac{3}{4}} = P - 489{,}16 $$

$$ Q = 0{,}79 + P - 489{,}16 - P + 491{,}05 = 1{,}1 > 0 $$

Si es posible la desintegración ya que Q>0

El yodo ${}^{128}_{53}I$ puede emitir una partícula beta negativa

El siguiente proceso es

$$ {}^{A}_{Z+1}Y \;\rightarrow\; e^{-} + {}^{A}_{Z+2}V $$

Con os núcleos del ejemplo sería. ${}^{128}_{54}Xe \Rightarrow e^{-} + {}^{128}_{55}Cs$

$V\left({}^{128}_{55}Cs\right)$ es un núcleo impar-impar

$$ B_V = P - 0{,}72 * 55^2 * 128^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{128}(128 - 2*55)^2 - 0{,}88 = P - 492{,}53 $$

$$ Q = 0{,}79 + P - 492{,}53 - P + 489{,}16 = -2{,}58 < 0 $$

Este proceso no es posible ya que Q<0

La siguiente desintegración es:

$$ {}^{A}_{Z+2}V \rightarrow e^{-} + {}^{A}_{Z+3}W $$

El proceso de cálculo es el mismo que antes y el resultado Q = -0,83 <0 , luego no es posible la desintegración.

e2).- Desintegración β^{+}

La emisión de un electrón por parte del núcleo implica la siguiente reacción nuclear

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow e^{+} + {}^{A}_{Z-1}M $$

El valor de Q es

$$ Q = c^2\left(M_X - M_{e+} - M_M\right) $$

$$ M_X c^2 = Zm_p c^2 + \left(A-Z\right)\ c^2 - B_X $$
$$ M_e c^2 = 0{,}51\ \text{MeV} $$
$$ M_M c^2 = \left(Z-1\right)m_p c^2 + \left(A-Z+1\right)\ c^2 - B_M $$

$$ Q = m_p c^2 - m_n c^2 - 0{,}51 + B_M - B_X = -1{,}81 + B_M - B_X $$

$$ B_M = P - 0{,}72 * 52^2 * 128^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{128}\left(128 - 2*52\right)^2 + 0{,}88 = P - 491{,}18 $$

Q = -1,81 + P- 491,18 – P + 491.05 = -1,94 <0

La siguiente emisión

$$ {}^{A}_{Z+1}Y \rightarrow e^{+} + {}^{A}_{Z}X $$

Bx = P-491,05 ; B_Y = P-489,16

Q = -3,7 < 0, no es posible

En la siguiente emisión

$$ {}^{A}_{Z+2}V \rightarrow e^{+} + {}^{A}_{Z+1}Y $$

B_Y = P-489,16 ; B_V = P-492,53

Q = 1,56 > 0

e.3).- Desintegración β^{-}β^{-}

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow 2\ e^- + {}^{A}_{Z+2}V$$

$$Q = c^2\left(M_X - M_{2e-} - M_V\right)$$

$$M_X c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)\ c^2 - B_X$$
$$2M_e c^2 = 1{,}02\ \ MeV$$
$$M_V c^2 = (Z+2)m_p c^2 + (A - Z - 2)\ c^2 - B_V$$

$$Q = -2\ m_p c^2 + 2\ m_n c^2 - 1{,}02 + B_V - B_X = 1{,}58 + B_V - B_X$$

B_V = P –492,53 MeV ; B_X = P-491,05 MeV

Q = 1,58 + P-492,53 – P + 491,05 = 0,1 > 0, sí es posible

$${}^{A}_{Z+1}Y \rightarrow 2\ e^- + {}^{A}_{Z+3}N$$

Tratándose de los núcleos ${}^{128}_{54}Xe \Rightarrow 2e^- + {}^{128}_{56}Ba$

$$B_N = P - 0{,}72 * 56^2 * 128^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{128}(128 - 2*56)^2 + 0{,}88 = P - 494{,}15$$

B_Y = P –489,16 MeV ; B_N = P-494,15 MeV

Q = 1,58 + P- 494,15 - P + 489,16 = -3,41 < 0, no es posible

$${}^{A}_{Z+2}V \rightarrow 2\ e^- + {}^{A}_{Z+4}Q$$

Con los núcleos ${}^{128}_{55}Cs \Rightarrow 2e^- + {}^{128}_{57}La$

$$B_Q = P - 0{,}72 * 57^2 * 128^{-\frac{1}{3}} - \frac{23{,}5}{128}(128 - 2*57)^2 - 0{,}88 = P - 501{,}03\ \ MeV$$

Q = 1,58 + P- 501,03 - P + 492,53 = -6,92 < 0, no es posible

e.4) .- Captura electrónica

$$ {}^{A}_{Z}X \; + \; e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}M $$

Si se tratara de los núcleos dados ${}^{128}_{53}I + e^{-} \Rightarrow {}^{128}_{52}\mathrm{T}e$

$$ \begin{aligned} M_X c^2 &= Z m_p c^2 + (A-Z)\; c^2 - B_X \\ M_e c^2 &= 0{,}51\ \mathrm{MeV} \\ M_M c^2 &= (Z-1) m_p c^2 + (A-Z+1)\; c^2 - B_M \end{aligned} $$

$$ Q = m_p c^2 - m_n c^2 + 0{,}51 + B_M - B_X = -0{,}79 + B_M - B_X $$

B_M = P – 491,18 MeV ; B_X = P-491,05 MeV

Q = -0,79 + P- 491,18 - P + 491,05 = -0,92 < 0, no es posible

---

$$ {}^{A}_{Z+1}Y \; + \; e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z}X $$

B_X = P- 491,05 MeV , B_Y = P- 489,16 MeV

Q = -0,79 + P- 491,05 - P + 489,16 = -1,1 < 0, no es posible

$$ {}^{A}_{Z+2}V \; + \; e^{-} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y $$

Pudiera tratarse de los núcleos ${}^{128}_{55}\mathrm{C}s + 1e \Rightarrow {}^{128}_{54}\mathrm{X}e$

B_V = P- 492,53 MeV , B_Y = P- 489,16 MeV

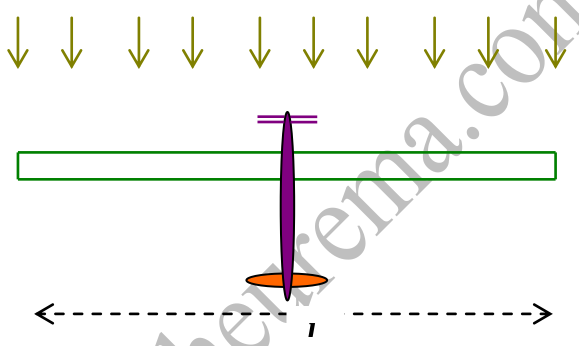
Q = -0,79 + P- 489,16 - P + 492,53 = 2,58 > 0, si es posible

Un resumen de los procesos permitidos y no permitidos, es el siguiente

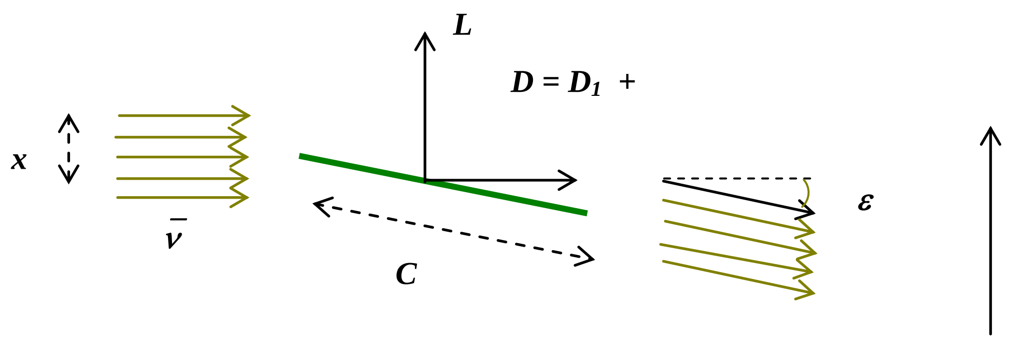
	β^-	β^+	$\beta^-\ \beta^+$	Captura
${}^{A}_{Z}X = {}^{128}_{53}I$	Sí	No	Sí	No
${}^{A}_{Z+1}Y = {}^{128}_{54}Xe$	No	No	No	No
${}^{A}_{Z+2}V = {}^{128}_{55}Cs$	No	Sí	No	Sí

3) Se desea diseñar un avión que pueda permanecer en lo alto usando energía solar. El tipo diseño más eficiente supone que las alas del avión están recubiertas completamente por células solares. Las células suministran energía eléctrica con la cual el motor acciona la hélice.

Considerar un ala de forma plana rectangular cuya envergadura el l y de ancho c, siendo su área S = lc y su aspecto viene dado por la relación A = l/c. Una idea aproximada acerca del funcionamiento del ala consiste en que una capa de aire de espesor x y longitud l sea desviada hacia abajo un pequeño ángulo ε , acompañado por un pequeño cambio en la velocidad del aire. Un modelo simple y que se aproxima a la realidad ocurre cuando x =π l/4 y supondremos que es nuestro caso.
La masa total del avión es M y vuela horizontalmente con una velocidad v respecto del aire circundante



a) Considerar el cambio en el momento del aire que está detrás del ala admitiendo que no hay variación de velocidad. Obtenga las expresiones para la fuerza vertical L y la de arrastre d en términos de las dimensiones del ala, velocidad V, y densidad del aire ρ.



b) Existe una fuerza de arrastre adicional D_2 motivada por la fricción del aire cuando fluye sobre el ala. El aire se frena ligeramente

provocando una disminución de velocidad (Δv menos del 1% de v) dada por la expresión

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

El valor de f es independiente de ε.

Encontrar una expresión en términos de M, f, A, S, y g(aceleración de la gravedad), para una velocidad de vuelo vo, la cual corresponde a una potencia mínima para mantener al avión en vuelo a una altitud constante

Se puede utilizar la expresión aproximada $1 - \cos\varepsilon = \dfrac{sen^2\varepsilon}{2}$

c) Haga un dibujo de la forma que tiene la curva P-v , indicando las dos contribuciones del arrastre D1 y D2. Exprese en términos de M, f, A , S , g la potencia mínima

d) Si las células solares suministran una potencia I = 10 vatios por metro cuadrado de ala , calcular la relación $\dfrac{Mg}{S}\left(\dfrac{N}{m^2}\right)$ ***y la velocidad de vuelo v_o.***

Datos. ρ = 1,25 kg/m^3 ; f = 0,004 , A = 10

a) En un tiempo Δt penetra en el ala del avión una capa de aire de longitud l, de espesor x y de ancho vΔt. La masa de aire contenida en dicha capa es $m = \rho\ l\ x\ v\ \Delta t$ y la cantidad de movimiento

$$p_i = \rho\ lxv^2\Delta t = \frac{\pi l^2 \rho v^2 \Delta t}{4}$$

La capa de aire después del ala forma un ángulo ε con la horizontal, ahora la cantidad de movimiento tiene dos componentes una sobre el eje X y otra sobre el Y

$$p_X = \frac{\pi l^2 \rho v^2 \Delta t}{4}\cos\varepsilon \qquad ; \qquad p_Y = -\frac{\pi l^2 \rho v^2 \Delta t}{4}\operatorname{sen}\varepsilon$$

Se ha producido una variación de la cantidad de movimiento tanto en el eje de abscisas como en el de ordenadas lo que da lugar a fuerzas de reacción D_1 y L.

$$D_1 = \frac{\dfrac{\pi l^2 \rho\ v^2 \Delta t}{4} - \dfrac{\pi l^2 \rho\ v^2 \Delta t}{4}\cos\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\pi l^2 \rho\ v^2}{4}(1 - \cos\varepsilon)$$

$$L = \frac{0 - \left(-\dfrac{\pi l^2 \rho\ v^2 \Delta t}{4}\operatorname{sen}\varepsilon\right)}{\Delta t} = \frac{\pi l^2 \rho\ v^2}{4}\operatorname{sen}\varepsilon$$

b) Llamamos v_1 a la velocidad después de frenarse el aire, por lo tanto, se produce una variación de la cantidad de movimiento y por tanto una fuerza de reacción D_2.

$$D_2 = \frac{\frac{\pi l^2 \rho v^2 \Delta t}{4} - \frac{\pi l^2 \rho\ v\ v_1 \Delta t}{4}}{\Delta t} = \frac{\pi l^2 \rho}{4}\left(v^2 - v\ v_1\right)$$

Teniendo en cuenta que $v_1 = v - \Delta v$

$$D_2 = \frac{\pi l^2 \rho}{4}\left(v^2 - v(v-\Delta v)\right) = \frac{\pi l^2 \rho v}{4}\Delta v = \frac{\pi l^2 \rho v^2}{4}\frac{f}{A}$$

$$D = D_1 + D_2 = \frac{\pi}{4}\rho l^2 v^2\left(1 - \cos\varepsilon + \frac{f}{A}\right) \approx \frac{\pi}{4}\rho l^2 v^2\left(\frac{sen^2\varepsilon}{2} + \frac{f}{A}\right)$$

Para que el avión se mantenga en el aire la fuerza ascensional L debe equilibrar el peso Mg del avión, lo cual nos permite conocer el valor de sen ε.

$$\frac{\pi l^2 \rho v^2}{4} sen\varepsilon = Mg \quad \Rightarrow \quad sen\varepsilon = \frac{4Mg}{\pi l^2 \rho v^2}$$

Llevamos el valor de sen ε a la expresión de la fuerza D

$$D = \frac{\pi}{4}\rho l^2 v^2\left(\frac{sen^2\varepsilon}{2} + \frac{f}{A}\right) = \frac{\pi}{4}\rho l^2 v^2\left(\frac{(4Mg)^2}{2\left(\pi l^2 \rho v^2\right)^2} + \frac{f}{A}\right) = \frac{2M^2 g^2}{\pi l^2 \rho v^2} + \frac{\pi}{4}\frac{\rho l^2 v^2 f}{A}$$

La potencia es el producto de la fuerza por la velocidad

$$P = Dv = \frac{2M^2 g^2}{\pi l^2 \rho v} + \frac{\pi}{4}\frac{\rho l^2 v^3 f}{A}$$

El valor mínimo de P lo hallamos derivando respecto de v e igualando a cero

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{2M^2 g^2}{\pi l^2 \rho v^2} + \frac{3\pi \rho l^2 f v^2}{4A} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_o^4 = \frac{8M^2 g^2 A}{3\pi^2 \rho^2 l^4 f}$$

Teniendo en cuenta que A = l/c y S = lc resulta $S = l^2/A$

$$v_o^4 = \frac{8M^2 g^2 A}{3\pi^2 \rho^2 l^4 f} = \frac{8M^2 g^2 A}{3\pi^2 \rho^2 S^2 A^2 f} = \frac{8M^2 g^2}{3\pi^2 \rho^2 S^2 A\ f}$$

c) El valor de D_1 que hemos calculado anteriormente y es

$$D_1 = \frac{\pi l^2 \rho \; v^2}{4}(1 - \cos\varepsilon) = \frac{\pi l^2 \rho \; v^2}{4}\frac{\mathrm{sen}^2\varepsilon}{2}$$

Anteriormente hemos calculado el valor del seno ε

$$\mathrm{sen}\varepsilon = \frac{4Mg}{\pi l^2 \rho v^2}$$

sustituyendo resulta:

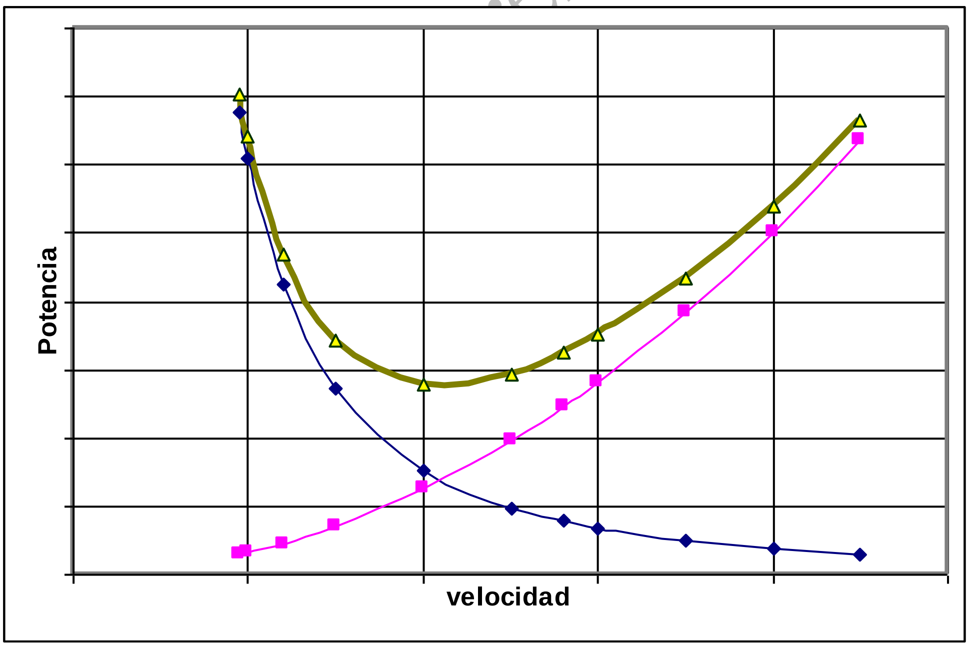
$$D_1 = \frac{\pi l^2 \rho \; v^2}{4}\frac{\mathrm{sen}^2\varepsilon}{2} = \frac{\pi l^2 \rho \; v^2}{8}\left(\frac{4Mg}{\pi l^2 \rho v^2}\right)^2 = \frac{2M^2 g^2}{\pi l^2 \rho} * \frac{1}{v^2} = K_1 * \frac{1}{v^2}$$

D_1 frente a v será una curva en la que D_1 disminuye a medida que aumenta v.

$$D_2 == \frac{\pi l^2 \rho v^2}{4}\frac{f}{A} = K_2 * v^2$$

El valor de D_2 crece a medida que lo hace la velocidad.

La representación gráfica es



En lugar de hacer un boceto, las curvas se han dibujado con la hoja de cálculo Excel, dando valores arbitrarios a M = 500 kg y a l = 20 m

d)

$$P = Dv = \frac{2M^2g^2}{\pi l^2 \rho v} + \frac{\pi}{4}\frac{\rho l^2 v^3 f}{A} \quad ; \quad v_o^4 = \frac{8M^2g^2}{3\pi^2\rho^2 S^2 A\ f}$$

De la expresión de la velocidad despejamos M^2g^2 y la sustituimos en la potencia y además tenemos en cuenta que $SA = l^2$.

$$P = IS = \frac{6\pi^2\rho^2 S^2 A f v_o^4}{8\pi S A \rho v_o} + \frac{\pi\ \rho S A f v_o^3}{4A} \quad \Rightarrow v_o^3 = \frac{I}{\pi\ \rho f} = \frac{10}{\pi * 1{,}25 * 0{,}004} \Rightarrow \quad v_o = 8{,}6\ \frac{m}{s}$$

De la expresión de la velocidad

$$\frac{Mg}{S} = \sqrt{\frac{3\pi^2\rho^2 A f v_o^4}{8}} = \pi\ \rho v_o^2 \sqrt{\frac{3Af}{8}} = \pi * 1{,}25 * 8{,}6^2 \sqrt{\frac{3 * 10 * 0{,}004}{8}} = 35{,}6\ \frac{N}{m^2}$$