

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

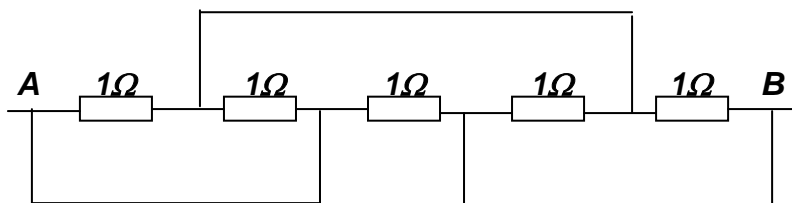
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

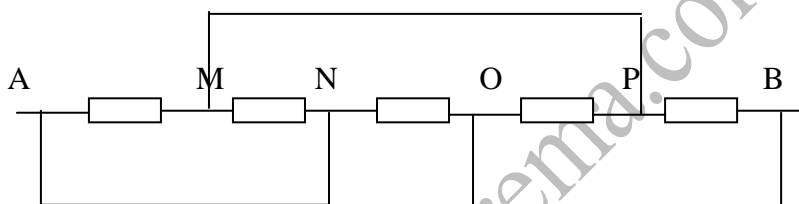
XXVII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. NORUEGA. 1996

1.-a) Cinco resistencias de $1\ \Omega$ cada una están conectadas como indica la figura

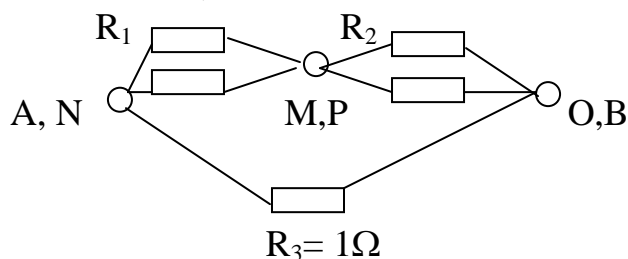


La resistencia de los conductores es despreciable. Calcular el valor de la resistencia R entre los puntos A y B

Los puntos de contacto de los hilos puentes con el horizontal los llamamos M, N, O, P



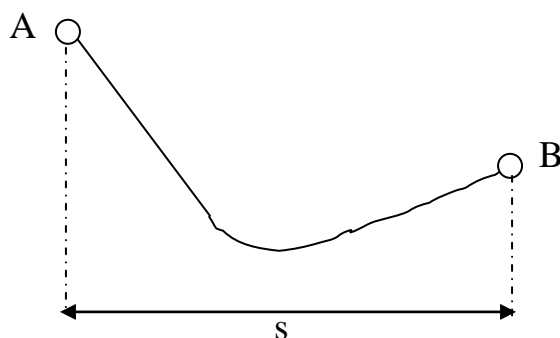
Los pares de puntos siguientes se encuentran al mismo potencial, ya que están unidos por hilos sin resistencia: A y N ; M y P ; O y B. Reducimos a tres puntos y entre ellos vamos colocando las resistencias. Entre A y M una resistencia, entre M y N una resistencia, otra resistencia entre N y O, otra entre O y P y otra entre P y B



$$R_1 = 0,5\ \Omega, \quad R_2 = 0,5\ \Omega, \quad R_1 + R_2 = 1\ \Omega$$

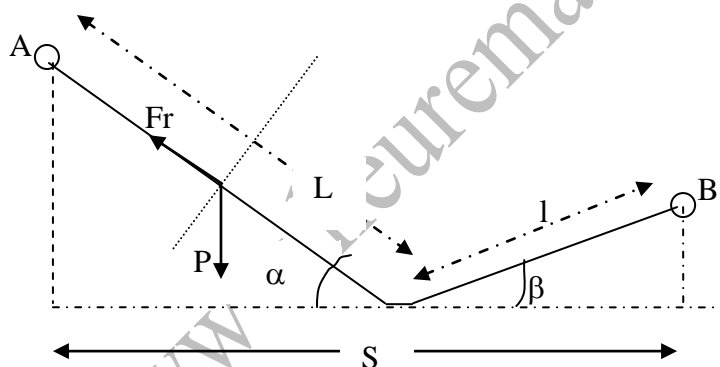
$$R_1 + R_2 \text{ está en paralelo con } R_3, \text{ luego } R = 0,5\ \Omega$$

b) Un esquiador parte en reposo desde el punto A y desliza hacia debajo de la colina, sin girar ni frenar. Cuando se detiene en el punto B su desplazamiento horizontal es s .



¿Cuál es la diferencia de alturas h entre los puntos A y B
La velocidad del esquiador es pequeña de manera que la presión adicional debida a la curvatura se desprecia, así como que μ es independiente de la velocidad.

Dado que se desprecia la presión adicional en la curvatura la pista se compone de dos planos inclinados uno α y el otro β



Sea P el peso del esquiador y L la longitud del plano de bajada. El trabajo de la fuerza de rozamiento es $W_1 = \mu P \cos \alpha * L$.

En el plano de subida, de longitud l , el trabajo de la fuerza de rozamiento es:

$$W_2 = \mu P \cos \beta * l.$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento equivale a la pérdida de energía potencial del esquiador

$$P * h = W_1 + W_2 = \mu P (L \cos \alpha + l \cos \beta)$$

De la figura se deduce que $L \cos \alpha + l \cos \beta = S$, por tanto, $h = \mu S$

c) Una pieza de metal aislada térmicamente se calienta bajo la presión atmosférica mediante una corriente eléctrica de manera que recibe la energía eléctrica siendo la potencia P constante. La variación de la temperatura de la pieza metálica con el tiempo está dada por la expresión

$$T(t) = T_0 [1 + a(t - t_0)]^{\frac{1}{4}}$$

en que a , t_0 , y T_0 son constantes

Calcule la capacidad calorífica $C_p(T)$ del metal en función de T y T_0 .

La capacidad calorífica se define como el cociente entre el calor recibido a presión constante y la variación de temperatura

$$C_p = \frac{dQ_p}{dT} = \frac{P dt}{dT} = \frac{P}{\frac{dT}{dt}}$$

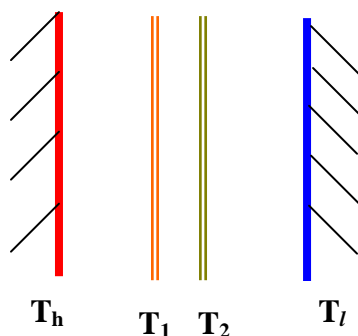
El denominador se puede calcular ya que tenemos una relación explícita entre la temperatura y el tiempo

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{4} T_0 [1 + a(t - t_0)]^{-\frac{3}{4}} * a = \frac{1}{4} T_0 a \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3}$$

$$C_p = \frac{4P}{T_0 a \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3}} = \frac{4P T^3}{a T_0^4}$$

d) Una superficie negra plana se encuentra a una temperatura alta T_h y es paralela a otra superficie semejante que se encuentra a una temperatura T_l inferior a T_h . Entre las superficies existe el vacío.

Con el fin de reducir el flujo calorífico debido a la radiación se coloca una pantalla que consiste en dos superficies planas negras aisladas térmicamente entre sí.



Dicha pantalla se coloca entre las superficies de temperaturas T_h y T_l . Cuando las condiciones son estacionarias, determinar el factor ξ que mide el cociente entre el flujo con la pantalla y sin ella.

Despreciar los efectos debidos al tamaño finito de las superficies.

Cuando no existe pantalla el flujo calorífico desde la superficie de temperatura alta T_h a la superficie de temperatura menor T_1 vale

$$\Phi_i = k(T_h^4 - T_1^4)$$

Cuando se coloca la pantalla las temperaturas de las superficies negras son T_1 y T_2 respectivamente. Los flujos de calor son ahora

$$\Phi_1 = k(T_h^4 - T_1^4) \quad ; \quad \Phi_2 = k(T_1^4 - T_2^4) \quad ; \quad \Phi_3 = k(T_2^4 - T_1^4)$$

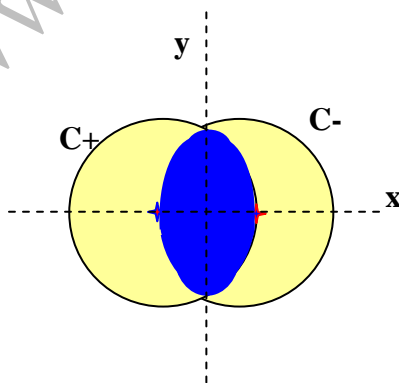
Los flujos han de ser iguales para que se mantengan las temperaturas en condiciones estacionarias. Si sumamos las tres ecuaciones

$$3\Phi_1 = k(T_h^4 - T_1^4) = \Phi_i \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\Phi_1}{\Phi_i} = \frac{1}{3}$$

e) Dos conductores rectilíneos no magnéticos de gran longitud C_+ y C_- , aislados uno del otro, llevan respectivamente una corriente I en la dirección positiva y negativa de z . Las secciones de los conductores (las cuales tienen forma de luna decreciente) están limitadas por círculos de diámetro D en el plano xy , siendo $D/2$ la distancia entre los centros. Las áreas de cada una de las secciones en forma de luna decreciente valen

$$\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3} \right) D^2$$

La corriente en cada conductor está distribuida homogéneamente. Calcular el campo magnético $B(x,y)$ en el espacio entre los conductores.



La ley circuital de Ampère permite calcular campos magnéticos creados por corrientes eléctricas cuando se presentan situaciones de simetría. Así, en los libros de Física, se calcula el campo magnético creado por un hilo filiforme por el que circula una intensidad I .

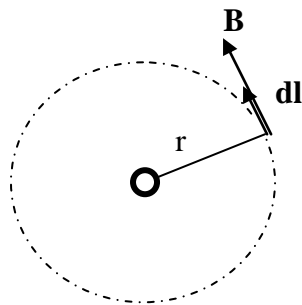


Fig.1

Se toma una circunferencia centrada en el hilo como línea de circulación, a lo largo de la cual el vector \mathbf{B} es tangente y con el mismo módulo (fig.1).

$$\int_0^{2\pi r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Otro problema es calcular el campo magnético a una distancia r del centro de un alambre de radio R , siendo $r < R$. El alambre lleva una corriente I distribuida de forma uniforme en toda su sección transversal

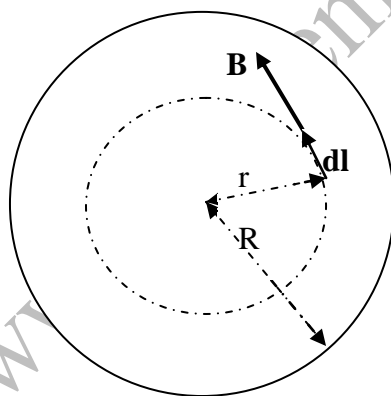


Fig.2

La circulación a, lo largo de la línea de radio r , (fig.2), vale:

$$\int_0^{2\pi r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

Siendo i la intensidad de la corriente que abarca la circunferencia de radio r . Como la intensidad está distribuida uniformemente se cumple:

$$\frac{I}{\pi R^2} = \frac{i}{\pi r^2}$$

$$\int_0^{2\pi r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

En el problema propuesto no se ve a simple vista la simetría que permita aplicar la ley de Ampère, aunque podría resolverse por una integración directa, pero en principio el procedimiento parece complicado, no obstante existe un “truco” mediante el cual es posible aplicar el teorema de Ampère. Supongamos dos conductores cilíndricos por cuya sección transversal circula una corriente de intensidad I' , uniformemente distribuida en la sección transversal, si ahora interpenetramos uno sobre el otro (fig.3), resulta que en la zona común la intensidad se anula y el sistema es el mismo que el propuesto en el problema, esto es, la interpenetración provoca la anulación de una parte de la corriente y da como resultado que disminuya a I en las zonas de forma de luna.

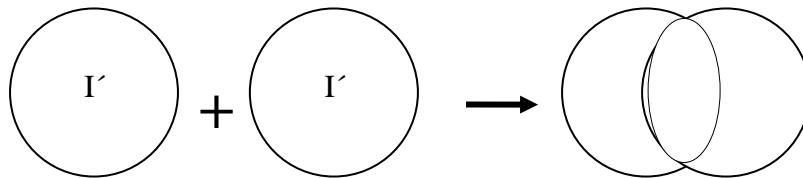


Fig.3

Por tanto, podemos calcular el campo pedido a partir de sumar los campos creados por dos conductores cilíndricos por los que circula una intensidad I' . Como las intensidades están uniformemente distribuidas se cumple:

$$\frac{I'}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{I}{\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) D^2} \Rightarrow I' = I \frac{\pi}{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = I \frac{6\pi}{2\pi + 3\sqrt{3}} \quad (1)$$

La ley de Ampère da para una corriente I' que crea un campo magnético B_ϕ a distancia r desde su eje, en el plano XY, (fig.4a).

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I' r}{2\pi r^2} = \frac{\mu_0 I' r}{2\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{2\mu_0 I' r}{\pi D^2}$$

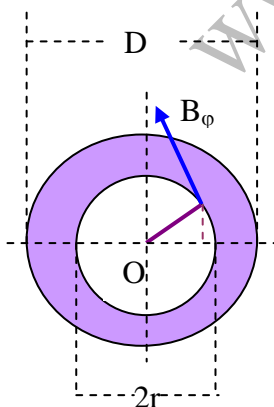


Fig.4a

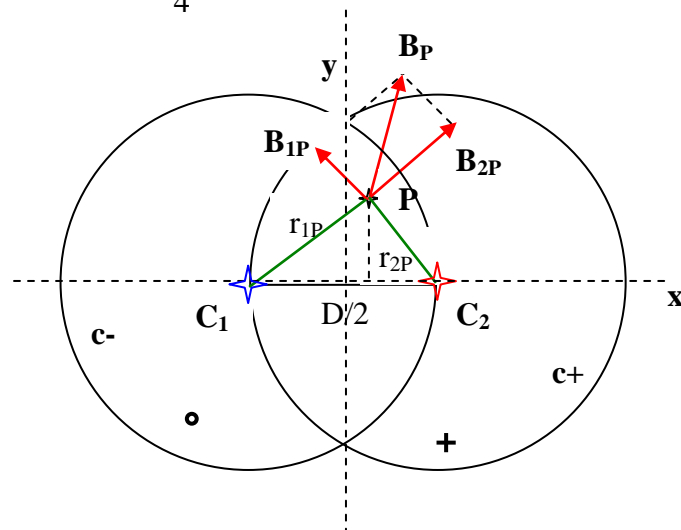


Fig.4b

Aplicando esta ley al caso que nos ocupa, en un punto como el P dentro de la zona de corte (fig.4b), nos permite calcular los campos que crea cada conductor.

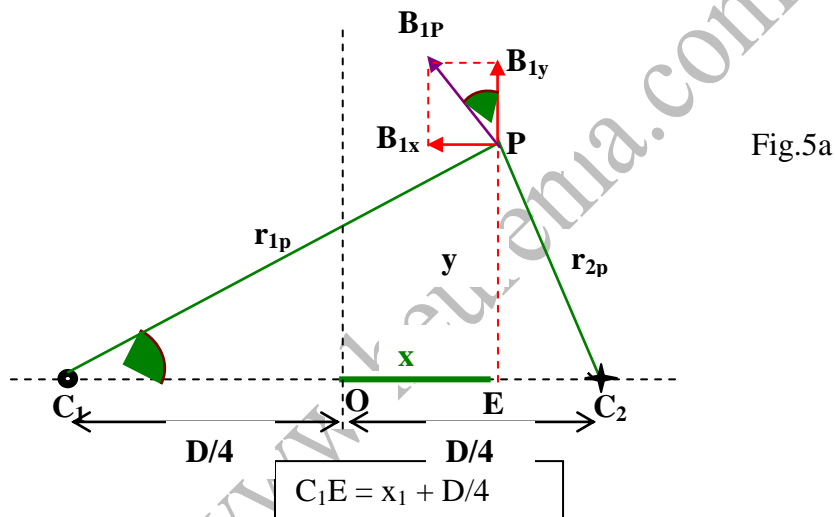
$$B_{1P} = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{r_{1P}}{D^2} \quad y \quad B_{2P} = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{r_{2P}}{D^2}$$

y el campo resultante \mathbf{B}_P es la suma vectorial de ambos.

Por la simetría del problema las componentes sobre el eje Y se suman y las componentes sobre el eje X, se anulan por tener igual valor y sentido contrario. Las figuras 5a y 5b son una ampliación de la figura 4a y en ella se muestran, por separado, las componentes sobre los ejes X e Y los campos B_{1P} y B_{2P} .

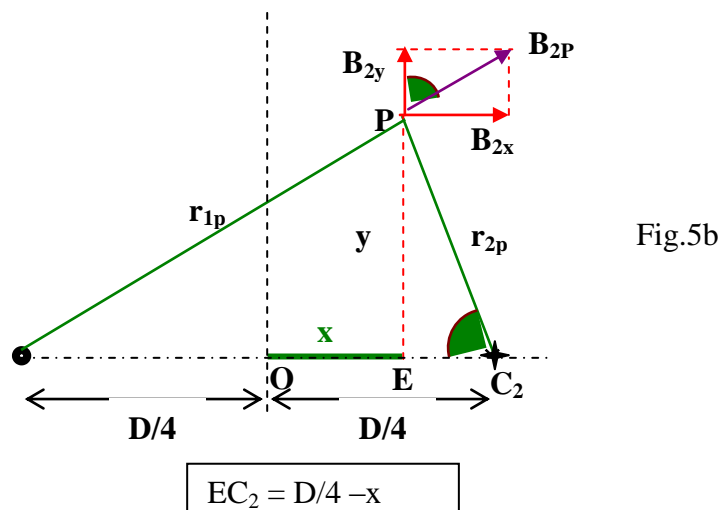
Como se aprecia en la figura 5a, las componentes sobre los ejes son:

$$B_{1x} = B_{1P} \frac{y}{r_{1P}} \quad B_{1y} = B_{1P} \frac{\frac{D}{4} + x}{r_{1P}}$$



De la figura 5b se deduce:

$$B_{2x} = B_{2P} \frac{y}{r_{2P}} \quad B_{2y} = B_{2P} \frac{\frac{D}{4} - x}{r_{1P}}$$



La suma de las componentes sobre el eje X

$$B_{1p} \frac{y}{r_{1p}} - B_{1p} \frac{y}{r_{1p}} = \frac{2\mu_o \Gamma^* r_{1p}}{\pi D^2} * \frac{y}{r_{1p}} - \frac{2\mu_o \Gamma^* r_{2p}}{\pi D^2} * \frac{y}{r_{2p}} = 0$$

La suma de las componentes sobre el eje Y

$$B_{1y} = \frac{2\mu_o \Gamma^* r_{1p}}{\pi D^2} * \frac{\frac{D}{4} + x}{r_{1p}} = \frac{2\mu_o \Gamma^*}{\pi D^2} \left(\frac{D}{4} + x \right)$$

$$B_{2y} = \frac{2\mu_o \Gamma^* r_{2p}}{\pi D^2} * \frac{\frac{D}{4} + x}{r_{2p}} = \frac{2\mu_o \Gamma^*}{\pi D^2} \left(\frac{D}{4} - x \right)$$

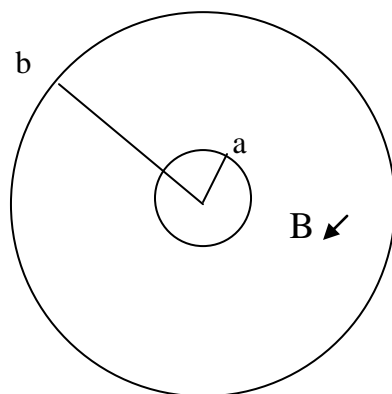
$$B_p = B_{1y} + B_{2y} = \frac{\mu_o \Gamma^*}{\pi D}$$

que como se ve no depende la posición del punto dentro de la zona de corte.

Sustituyendo Γ^* por I de la ecuación (1)

$$B_p = \frac{\mu_o I}{\pi D} \left(\frac{6\pi}{2\pi + 3\sqrt{3}} \right) = \frac{6\mu_o I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D}$$

2.- Entre dos cilindros coaxiales se ha hecho el vacío. El radio del cilindro interior es a y el del exterior b . El cilindro exterior se llama ánodo y tiene un potencial positivo V respecto del interior, que se denomina cátodo. En la zona evacuada existe un campo magnético uniforme paralelo al eje de los cilindros y dirigido perpendicularmente y hacia fuera del plano de la figura. Las cargas inducidas en los conductores son despreciables.



El cilindro exterior pueda lanzar electrones al espacio evacuado. La masa del electrón se representa por m y por e su carga.

a) En primer lugar se establece el potencial eléctrico V , siendo $B = 0$. Si un electrón se encuentra con velocidad nula en la superficie del cátodo, calcular la velocidad v que posee cuando llegue al ánodo. Dar la respuesta con la teoría clásica y la de la relatividad.

Para el resto de las cuestiones considerar un tratamiento clásico.

b) Ahora $V = 0$ y está presente el campo magnético. Un electrón parte del cátodo con una velocidad v_0 en dirección radial. Determinar el valor crítico de $B = B_c$, a partir del cual el electrón no alcanza el ánodo. Hacer un boceto de la trayectoria cuando B es ligeramente superior a B_c .

Ahora están presentes el potencial V y el campo magnético B

c) El campo magnético proporcionará al electrón un momento angular L respecto del eje de los cilindros, escribir la ecuación de dL/dt . Mostrar que esta ecuación implica que

$$L - kBe r^2$$

es constante durante el movimiento siendo k un número y r la distancia del electrón al eje de los cilindros. Hallar el valor d

d) Considerar un electrón que abandona el cátodo con velocidad despreciable y que no alcanza el ánodo, siendo la máxima distancia del eje del cilindro r_m . Determinar su velocidad en el punto de máxima distancia en función de r_m .

e) Deseamos utilizar el campo magnético con el fin de regular la corriente electrónica en el ánodo. Cuando B es mayor que un valor crítico B_c , un electrón que sale del cátodo con velocidad despreciable es incapaz de alcanzar el ánodo. Determinar B_c .

f) Si los electrones abandonan el cátodo debido a que éste está caliente su velocidad inicial, en el caso general, tendrá por componentes: v_B paralela al campo B , v_r componente en dirección radial y perpendicular a B y v_ϕ componente azimutal, esto es, perpendicular a la dirección radial. Determinar el valor crítico de B_c para alcanzar el ánodo

a).- Calcular la velocidad v que posee cuando llegue al ánodo

Cuando solamente actúa el campo eléctrico el electrón se dirige del cátodo al ánodo en línea recta, esto es, desde los potenciales negativos a los positivos. El electrón es acelerado por la fuerza del campo y la variación de su energía cinética al llegar al ánodo es igual al trabajo eléctrico realizado por el campo

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = eV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Según la teoría de la relatividad la energía cinética viene dada por la expresión

$$E = mc^2(\gamma - 1) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = eV \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{eV}{mc^2} + 1 = \frac{eV + mc^2}{mc^2} \Rightarrow$$

$$c^2 - v^2 = c^2 \left(\frac{mc^2}{eV + mc^2} \right)^2 \Rightarrow v^2 = c^2 \left(1 - \left(\frac{mc^2}{eV + mc^2} \right)^2 \right) \Rightarrow v = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{eV + mc^2} \right)^2}$$

b).- Determinar el valor crítico de $B = B_c$,

El electrón se ve sometido a la fuerza magnética que es perpendicular a la velocidad. Al no haber campo eléctrico el módulo de la velocidad es constante y la fuerza es perpendicular, en consecuencia se trata de un movimiento circular del cual sacamos el radio

$$F_M = eBv_o = \frac{mv_o^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv_o}{eB} \quad (1)$$

Para una velocidad dada el radio depende del campo magnético B . El valor crítico de $B = B_c$ se presenta cuando el electrón en su trayectoria circular roce el ánodo, si entonces $B < B_c$ el electrón llega al ánodo y si $B > B_c$ no llega al ánodo (fig 1)

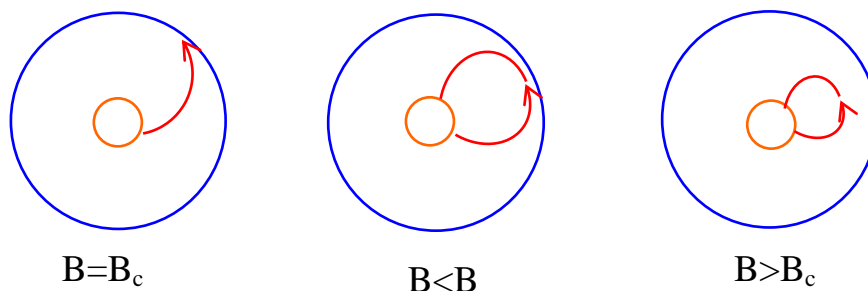


Fig. 1

Para calcular el valor crítico ampliamos la figura 1 y la construimos así: elegimos un punto de salida del electrón del cátodo. Trazamos la recta 1 y por el mismo punto una recta 2 perpendicular a 1. En la recta 2 buscamos un punto que al trazar la trayectoria del electrón salga del punto elegido y roce al ánodo.

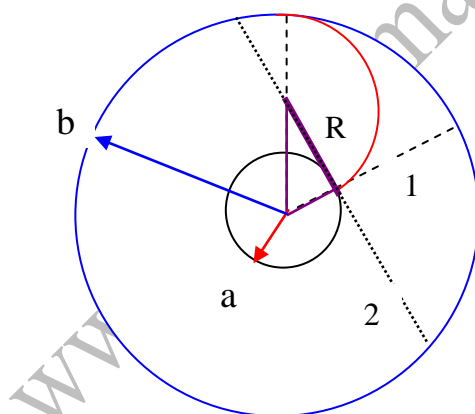


Fig. 2

De la figura 2 se deduce:

$$a^2 + R^2 = (b - R)^2 = b^2 + R^2 - 2bR \Rightarrow R = \frac{b^2 - a^2}{2b} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\frac{b^2 - a^2}{2b} = \frac{mv_0}{eB_c} \Rightarrow B_c = \frac{2mv_0 b}{(b^2 - a^2) e}$$

c).- Escribir la ecuación de dL/dt

Ahora el electrón se ve acelerado por la fuerza eléctrica y al mismo tiempo desviado de su trayectoria recta por la fuerza magnética.

Si tomamos momentos respecto del eje de los cilindros el momento de la fuerza eléctrica es nulo ya que actúa en dirección radial. La variación del momento angular se debe al momento de la fuerza magnética

$$\frac{dL}{dt} = M_M = evB * r = eBr * \frac{dr}{dt}$$

La velocidad v tiene la dirección de r y cambia debido a la fuerza eléctrica y la derivada de r con respecto al tiempo es la velocidad instantánea

En la expresión anterior

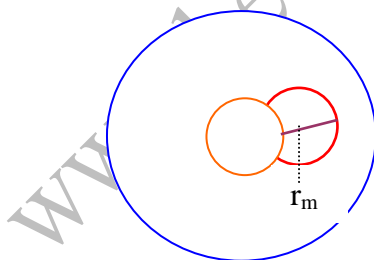
$$\frac{dL}{dt} - eBr \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(L - \frac{eBr^2}{2} \right) = 0$$

Si la derivada del lo que hay dentro del paréntesis es nula entonces

$$L - \frac{eBr^2}{2} = \text{constante}, \text{ siendo } k = \frac{1}{2} \quad (3)$$

d).- Determinar su velocidad en el punto de máxima distancia en función de r_m .

Dado que la relación (3) se mantiene constante, la aplicamos en la salida del electrón y en el punto radial r_m



$$0 - \frac{eBa^2}{2} = mvr_m - \frac{eBr_m^2}{2} \Rightarrow mvr_m = \frac{eB}{2}(r_m^2 - a^2) \Rightarrow v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}$$

e).- Determinar B_c

Para hallar el valor crítico de B , tenemos en cuenta que la máxima distancia que puede alcanzar el electrón es $r_m = b$

$$v = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}$$

La energía cinética que ha ganado el electrón es igual trabajo realizado por el campo eléctrico

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones obtenemos el valor crítico B_c .

$$\sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb} \Rightarrow B_c = \frac{2mb\sqrt{\frac{2eV}{m}}}{e(b^2 - a^2)} = \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2mV}{e}}$$

f).- Determinar el valor crítico de B_c para alcanzar el ánodo

En este caso la velocidad inicial del electrón en relación con sus componentes es:

$$v^2 = v_B^2 + v_r^2 + v_\phi^2$$

Como hemos visto en el apartado b) el valor crítico de B se obtiene dependiendo de la velocidad de salida del electrón del cátodo, $B_c = \frac{2mv_0 b}{(b^2 - a^2) e}$, pero ahora la

velocidad de salida es $v = \sqrt{v_B^2 + v_r^2 + v_\phi^2}$, de manera que este término sustituirá a v_0 en la expresión de B_c y queda:

$$B_c = \frac{2mb}{(b^2 - a^2) e} \sqrt{v_B^2 + v_r^2 + v_\phi^2}$$

3.-En este problema consideraremos de forma aproximada la cuantía de las mareas en medio del océano.

Se simplifica el problema haciendo las siguientes suposiciones:

I) La Tierra y la Luna se consideran como sistemas aislados

II) La distancia Tierra-Luna es constante

III) La Tierra está cubierta completamente por un océano

IV) Los efectos dinámicos de la Tierra alrededor de su eje son despreciables

V) La atracción gravitatoria de la Tierra se puede calcular como si toda la masa estuviese concentrada en el centro de la Tierra

Datos:

Masa de la Tierra $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

Masa de la Luna $M_L = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg

Radio de la Tierra $R = 6,37 \cdot 10^6$ m

**Distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna
 $L = 3,84 \cdot 10^8$ m**

Constante de Gravitación Universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ kg⁻¹·m³·s⁻²

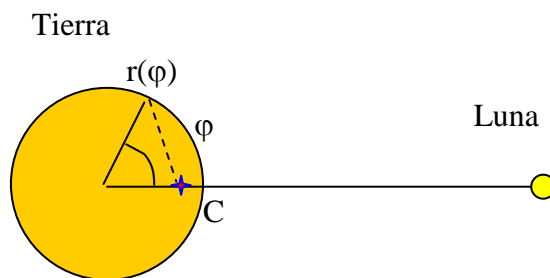
a) La Luna y la Tierra rotan con velocidad angular ω alrededor de su centro común de masa C

¿Cuál es la distancia del centro de la Tierra a C? (Indique esta distancia por la letra l)

Calcule el valor numérico de ω

Supongamos un sistema de referencia que está rotando con la luna y el centro de la Tierra alrededor de C. En este sistema de referencia la forma de la superficie líquida es estática.

En un plano P a través de C y perpendicular al eje de rotación la posición de una masa sobre la superficie del líquido se describe mediante coordenadas polares r y φ , tal como indica la figura, siendo r la distancia desde centro de la Tierra



Estudiaremos la forma $r(\varphi) = R + h(\varphi)$ de la superficie líquida de la Tierra en el plano P

b) Considerar una masa puntual (masa m) sobre la superficie del líquido en el plano P, en nuestro sistema de referencia actúan una fuerza centrífuga y las fuerzas gravitacionales de la Tierra y de la Luna. Escribir una expresión para la energía potencial correspondiente a estas tres fuerzas

Nota.- Cualquier fuerza $F(r)$ dirigida radialmente respecto de algún origen, es la derivada con signo negativo de una energía potencial de simetría esférica

$$F(r) = -V'(r)$$

c) Encontrar en términos de las magnitudes M_T , M_L ..etc la forma aproximada $h(\varphi)$ de la comba de la marea ¿Cuál es la diferencia de alturas entre la marea alta y baja según este modelo?

Se puede hacer la siguiente aproximación

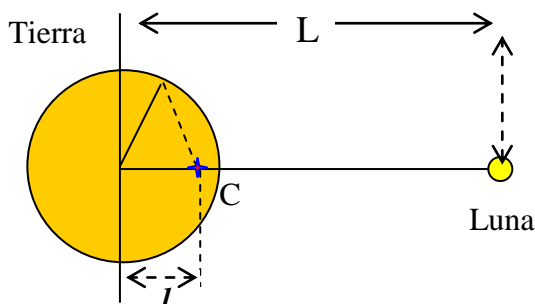
$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\theta}} = 1 + a\cos\theta + \frac{1}{2}a^3(3\cos^2\theta - 1)$$

la cual es válida si a es mucho menor que la unidad.

En este análisis puede hacer simplificaciones si éstas son razonables.

a).- ¿Cuál es la distancia del centro de la Tierra a C?

Tomamos unos ejes coordenados cartesianos en el centro de la Tierra



La coordenada del centro de masas es

$$l = \frac{M_T x_T + M_L L}{M_T + M_L} = \frac{0 + 7,3 \cdot 10^{22} * 3,84 \cdot 10^8}{5,98 \cdot 10^{24} + 7,3 \cdot 10^{22}} = 4,63 \cdot 10^6 \text{ m}$$

El centro común de masas está dentro de la Tierra.

La fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre la Luna es la fuerza centrípeta que ésta necesita para girar con velocidad angular ω alrededor del centro de masas

$$G \frac{M_T M_L}{L^2} = M_L \omega^2 (L - l) \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{L^2(L-l)}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} * 5,98 \cdot 10^{24}}{(3,84 \cdot 10^8)^2 * (3,84 \cdot 10^8 - 4,63 \cdot 10^6)}} = 2,67 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Podemos emplear el mismo argumento para la Tierra y es que la fuerza de atracción de la Luna es la fuerza centrípeta que la tierra necesita para girar alrededor del centro de masas común

$$G \frac{M_T M_L}{L^2} = M_T \omega^2 l \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_L}{L^2 l}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} * 7,3 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2 * 4,63 \cdot 10^6}} = 2,67 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b).- Escribir una expresión para la energía potencial correspondiente a estas tres fuerzas

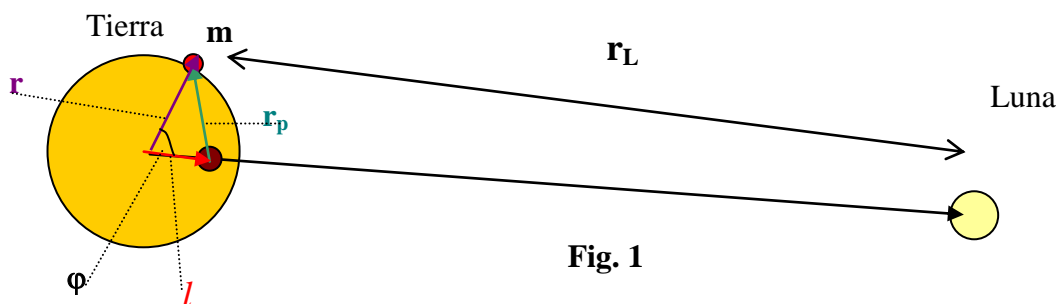


Fig. 1

\mathbf{r} vector distancia desde el centro de la Tierra al punto de masa m

l vector distancia desde el centro de la Tierra al centro de masas común Tierra-Luna

\mathbf{r}_p vector distancia del centro de masas a la masa m

\mathbf{r}_L vector distancia desde la masa m al centro de la Luna
 \mathbf{L} vector distancia desde el centro de la Tierra al centro de la Luna

La fuerza centrífuga de la masa respecto del eje que pasa por C vale

$$F(r_p) = m \omega^2 r_p = -\frac{dV_c}{dr_p} \Rightarrow V_c = -m \omega^2 \int r_p dr_p = -m \omega^2 \frac{r_p^2}{2} + cte$$

Las energías potenciales gravitatorias de la Tierra y de la Luna son respectivamente

$$G \frac{M_T m}{r}, \quad G \frac{M_L m}{r_L}$$

Las tres contribuciones son, 1) La energía centrífuga de m respecto del eje que pasa por el centro de masas,

$$V_L = -m \omega^2 \cdot r_p^2 / 2 + cte,$$

2) La energía potencial respecto de la Tierra $G \frac{M_T m}{r}$ y 3) La energía potencial respecto de la luna $G \frac{M_L m}{r_L}$

Vamos a poner los tres términos en función de r . De la figura 1 se deduce

$$\begin{aligned} \mathbf{l} + \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r} \longrightarrow \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{l} \longrightarrow r_1^2 = r^2 + l^2 - 2 l r \cos \varphi \\ \mathbf{r}_M + \mathbf{r} &= \mathbf{L} \quad \mathbf{r}_M = \mathbf{L} - \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$r_M = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi} = L \sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L}\right) \cos \varphi}$$

La contribución de los tres términos es:

$$V = -\frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 + l^2 - 2 r l \cos \varphi) + cte - G \frac{M_T m}{r} - G \frac{M_L m}{L \sqrt{1 + \left(\frac{r}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L}\right) \cos \varphi}}$$

teniendo en cuenta que $r/L \ll 1$, utilizamos

$$G \frac{M_T M_L}{L^2} = M_T \omega^2 l \Rightarrow \omega^2 = \frac{G M_L}{L^2 l}$$

la expresión del enunciado $\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \theta}} = 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2} a^3 (3 \cos^2 \theta - 1)$

$$\frac{V}{m} = -\frac{GM_L}{2L^2} (r^2 + l^2 - 2rl \cos \varphi) - G \frac{M_T}{r} - G \frac{M_L}{L} \left(1 + \frac{r}{L} \cos \varphi + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L^2} [3 \cos^2 \varphi - 1] \right) + cte$$

Operando en la última ecuación

$$\frac{V}{m} = -GM_L \left(\frac{r^2}{2L^2} + \frac{l^2}{2L^2} - \frac{r \cos \varphi}{L} + \frac{1}{L} + \frac{r}{L^2} \cos \varphi + \frac{r^2}{2L^3} [3 \cos^2 \varphi - 1] \right) - G \frac{M_T}{r} + cte$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{r^2}{2L^2} = \frac{(6,37 \cdot 10^6)^2}{2 * (3,84 \cdot 10^8)^2 * 4,63 \cdot 10^6} \approx 3 \cdot 10^{-11}; \quad \frac{l^2}{2L^2} = \frac{4,63 \cdot 10^6}{2 * (3,84 \cdot 10^8)^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-11}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{3,84 \cdot 10^8} \approx 3 \cdot 10^{-9}$$

c).- ¿Cuál es la diferencia de alturas entre la marea alta y baja según este modelo?

Hacemos la aproximación de despreciar los dos primeros términos frente al último

$$\frac{V}{m} = -G \frac{M_L}{L} - G \frac{M_T}{r} - G \frac{M_L}{2L^3} r^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) + cte$$

$$\frac{V}{m} - cte + G \frac{M_L}{L} = -G \frac{M_T}{R+h} - G \frac{M_L (R+h)^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1)$$

Los valores extremos de la expresión de la derecha son, para la marea alta

y para la marea baja

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{V}{m} - cte + G \frac{M_L}{L} = -G \frac{M_T}{R+h_m} + G \frac{M_L (R+h_m)^2}{2L^3}$$

De las dos últimas expresiones resulta:

$$M_T \left(\frac{1}{R+h_m} - \frac{1}{R+h_M} \right) = \frac{M_L}{L^3} \left[(R+h_M)^2 + \frac{(R+h_m)^2}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_T \left(\frac{h_M - h_m}{(R+h_m)^2 * (R+h_M)^2} \right) = \frac{M_L}{L^3} \left(R^2 + h_M^2 + 2h_MR + \frac{R^2}{2} + \frac{h_m^2}{2} + 2h_mR \right)$$

Hacemos las siguientes aproximaciones

$R+h_m = R = R+h_M$ y despreciamos los términos en R y h^2 frente a R^2

$$h_M - h_m = \frac{3M_L R^4}{2M_T L^3} = \frac{3 * 7,3 \cdot 10^{22} * (6,37 \cdot 10^6)^4}{2 * 5,98 \cdot 10^{24} * (3,84 \cdot 10^8)^3} = 0,53 \text{ m}$$