PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

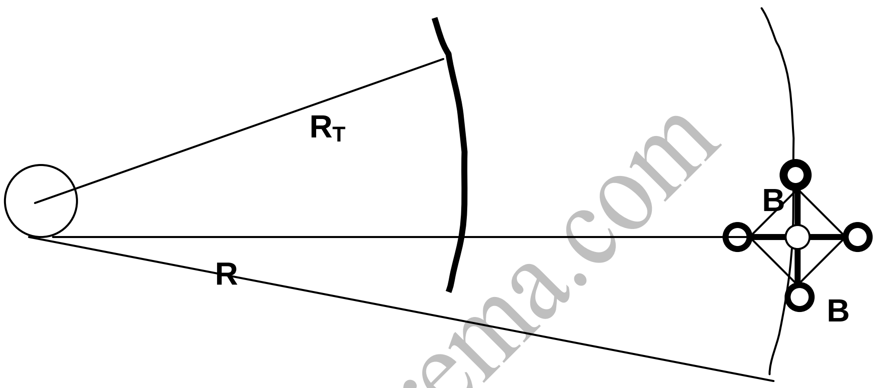
Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXIII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA.FINLANDIA.1992

1.- Un satélite circunvala la Tierra en una órbita circular en el plano ecuatorial. El satélite consiste en un cuerpo central P que se considera sin masa y cuatro cuerpos periféricos B de masa cada uno igual a m. Los cuerpos B están unidos a P por medio de hilos delgados de longitud r.

Todos los cuerpos del satélite, P y los B, son coplanarios con el plano ecuatorial terrestre y pueden rotar en ese plano. Los cuatro hilos radiales r, están unidos además por otros cuatro hilos de enlace, cuya misión es mantener entre los hilos radiales un ángulo constante de 90º



Todos los cuerpos B rotan alrededor del cuerpo central P con una velocidad angular ω respecto de las estrellas fijas.

En la figura el círculo blanco representa a P y los negros a B. La distancia PB = r

R_T es el radio de la tierra en el ecuador 6378 km
M es la masa de la tierra $5,974.10^{24}$ kg
R es la órbita del satélite y vale 6378+ 500 = 6878 km
m = 1000 kg ; r = 100 km ; ω = 10 revoluciones /hora

1) Calcular la fuerza ejercida por los hilos radiales sobre B en cada una de las cuatro posiciones indicadas en la figura

2) Dentro de cada uno de los cuerpos B existen unas máquinas conectadas a los hilos radiales y movidas por energía solar. Cada máquina tira del hilo hacia B, cuando la fuerza es máxima y lo desenrolla

cuando la fuerza es mínima. Los hilos se estiran y encogen un 1% de su longitud media. Calcular la potencia neta media, la cual se define como

$$\frac{W_1 - W_2}{T}$$

Siendo W_1 el trabajo que la máquina ejerce sobre el hilo cuando tira de él, y W_2 el trabajo que ejecuta el hilo sobre la máquina cuando éste se desenrolla. T es el periodo de rotación del satélite medido desde la Tierra

3) Analizar los cambios en el movimiento del satélite causados por las máquinas

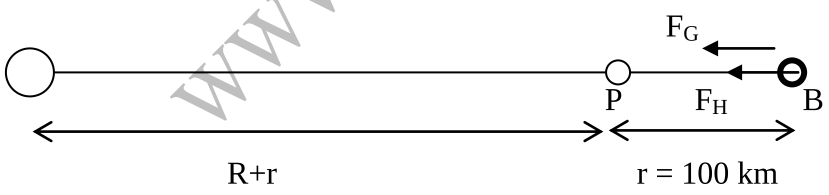
Considerar que los cuerpos B pueden girar alrededor de P en dos sentidos posibles.

Dato . $G = 6{,}673.10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

1) El centro de masas de todo el satélite se encuentra en el cuerpo P. La fuerza de gravitación entre la tierra y el satélite es igual a la fuerza centrípeta

$$G\frac{M_T * 4m}{R^2} = 4m\Omega^2 R \Rightarrow \quad \Omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}} = \sqrt{\frac{6{,}673.10^{-11} * 5{,}97.10^{24}}{\left(6878.10^3\right)^3}} = 1{,}107.10^{-3}\ \frac{rad}{s}$$

Consideremos el cuerpo B que está más alejado de la Tierra



Sobre él actúan dos fuerzas, una F_G que es la fuerza de atracción gravitatoria y otra F_H que es la fuerza que ejerce el hilo radial. Sobre este cuerpo existen dos aceleraciones, ambas dirigidas hacia el centro de la Tierra, una es la aceleración centrípeta debido a la rotación del satélite alrededor de la Tierra y otra la aceleración centrípeta debido a la rotación de B alrededor de P. Se debe cumplir la segunda ley de Newton

$$\Sigma F = ma; F_G + F_H = m\left[\Omega^2\left(R + r\right) + \omega^2 r\right] \quad \Rightarrow \quad F_H = -\frac{GM_T m}{\left(R + r\right)^2} + m\left[\Omega^2\left(R + r\right) + \omega^2 r\right]$$

Se sustituye el valor de omega

$$F_H = -\frac{GM_T m}{(R+r)^2} + m(R+r)\frac{GM_T}{R^3} + m\ \omega^2 r = GM_T m\left(\frac{R+r}{R^3} - \frac{1}{(R+r)^2}\right) + m\ \omega^2 r \quad \Rightarrow$$

$$F_H = GM_T m\left(\frac{R^3 + r^3 + 3R^2 r + 3Rr^2 - R^3}{R^3(R+r)^2}\right) + m\ \omega^2 r = GM_T m\left(\frac{3Rr(R+r)}{R^3(R+r)^2}\right) + m\ \omega^2 r$$

En la expresión anterior se desprecia el término r^3.

$$F_H = \frac{3\ GM_T mr}{R^2(R+r)} + m\ \omega^2 r = \frac{3*6,673.10^{-11}*5,974.10^{24}*10^3*10^5}{\left(6878.10^3\right)^2} * \frac{1}{6978.10^3} +$$

$$+10^3 * \left(\frac{20\pi}{3600}\right)^2 * 10^5 = 30824\ \ N$$

Consideremos el cuerpo B situado en dirección radial y lo más cerca posible del centro de la Tierra (fig 1)

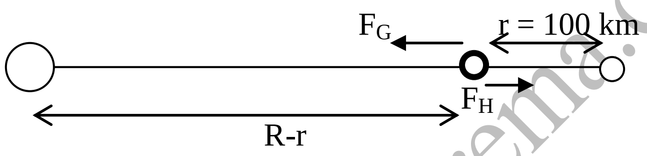


Fig. 1

$$\Sigma F = ma; F_G - F_H = m\left[\Omega^2(R-r) - \omega^2 r\right] \quad \Rightarrow \quad F_H = \frac{GM_T m}{(R-r)^2} - m\left[\Omega^2(R-r) - \omega^2 r\right]$$

$$F_H = \frac{GM_T m}{(R-r)^2} - m(R-r)\frac{GM_T}{R^3} + m\ \omega^2 r = GM_T m\left(\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{(R-r)}{R^3}\right) + m\ \omega^2 r \quad \Rightarrow$$

$$F_H = GM_T m\left(\frac{R^3 - \left(R^3 - 3R^2 r + 3Rr^2 - r^3\right)}{R^3(R-r)^2}\right) + m\ \omega^2 r = GM_T m\left(\frac{3Rr(R-r)}{R^3(R-r)^2}\right) + m\ \omega^2 r$$

$$F_H = \frac{3\ GM_T mr}{R^2(R-r)} + m\ \omega^2 r = \frac{3*6,673.10^{-11}*5,974.10^{24}*10^3*10^5}{\left(6878.10^3\right)^2} * \frac{1}{6778.10^3} +$$

$$+10^3 * \left(\frac{20\pi}{3600}\right)^2 * 10^5 = 30835\ N$$

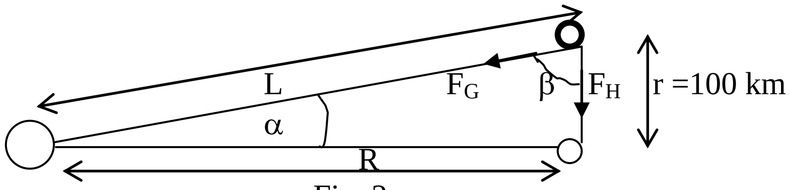


Fig. 2

Cuando B está en la parte superior (fig. 2), actúan la fuerza de atracción gravitatoria y la tensión del hilo, formando un ángulo muy próximo a 90º.

$$\mathrm{tag}\ \alpha = \frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \quad \Rightarrow \alpha = 0{,}8º \quad \Rightarrow \quad \beta = 89{,}2º \approx 90º$$

$$L^2 = R^2 + r^2$$

$$\sum F = ma; \sqrt{F_G^2 + F_H^2} = m\sqrt{\left(\Omega^2 L\right)^2 + \left(\omega^2 r\right)^2} \Rightarrow F_H^2 = -F_G^2 + m^2\left[\left(\Omega^2 L\right)^2 + \left(\omega^2 r\right)^2\right]$$

$$F_H^2 = -\left(\frac{GM_T m}{R^2 + r^2}\right)^2 + m^2\left[\Omega^4\left(R^2 + r^2\right) + \omega^4 r^2\right] \quad \Rightarrow$$

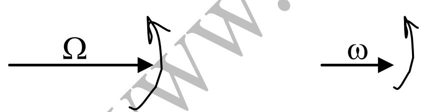
$$F_H^2 = \left(GM_T m\right)^2\left[-\frac{1}{\left(R^2 + r^2\right)^2} + \left(\frac{R^2 + r^2}{R^6}\right)\right] + m^2\omega^4 r^2 \quad \Rightarrow$$

$$F_H^2 = \left(GM_T m\right)^2\left[\frac{-R^6 + R^6 + 3R^4 r^2 + 3R^2 r^4}{R^6\left(R^2 + r^2\right)^2}\right] + m^2\omega^4 r^2 = \frac{3\left(GM_T m\right)^2 r^2}{R^4\left(R^2 + r^2\right)} + m^2\omega^4 r^2$$

$$F_H = \sqrt{\frac{3*\left(6{,}673.10^{-11}*5{,}974.10^{24}*10^3*10^5\right)^2}{\left(6978.10^3\right)^4*\left[6978^2*10^6 + 10^{10}\right]} + 10^6*\left(\frac{20\pi}{3600}\right)^4*10^{10}} = 30462 \ \ \mathrm{N}$$

2) Calcular la potencia neta media

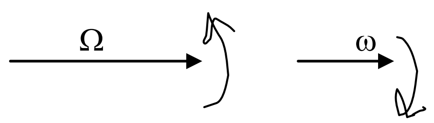
Supongamos que la rotación de los cuerpos B alrededor de P tiene sentido antihorario visto por un observador situado en P.



Si en el instante inicial coinciden y ω es mayor que Ω , resulta que vuelven a coincidir para un cierto ángulo girado por ω y otro ángulo que difiere del anterior en 2π

$$\alpha = \Omega T \quad ; \quad \alpha + 2\pi = \omega T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega - \Omega}$$

Supongamos que la rotación de B es en sentido horario



Si el primero recorre un ángulo α el segundo recorre un ángulo β tal que la suma de ellos es 2π

$$\alpha = \Omega T \quad ; \beta = \omega T \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 2\pi = T\left(\omega + \Omega\right) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega + \Omega}$$

El periodo en el primer caso vale $T = \frac{2\pi}{(17,45 - 1,107).10^{-3}} = 384\ \text{s}$ y el ángulo recorrido por el satélite es: $\delta = \omega * T = 17,45.10^{-3} * 384 = 6,7\ \text{rad} = 384^{\circ}$. Esto quiere decir que en ese tiempo los hilos se han estirado dos veces y se han encogido otras dos y el trabajo neto realizado vale

$$W = 2 * (F_{MAX} - F_{MIN}) * \Delta l = 2 * (30830 - 30462) * \frac{10^5}{100} \approx 732000\ \text{J}$$

y la potencia

$$P = \frac{W}{T} = \frac{732000}{384} = 1,9.10^3\ \text{W}$$

En el segundo caso el periodo vale T = 339 s y el ángulo recorrido por el satélite 339º. Esto indica que en ese tiempo los hilos se estiran y encogen dos veces, por lo que el trabajo vale 732 000 J y la potencia

$$P = \frac{W}{T} = \frac{732000}{339} = 2,2.10^3\ \text{W}$$

3) Analizar los cambios en el movimiento del satélite causados por las máquinas

El satélite en su órbita tiene energía cinética de traslación alrededor de la Tierra, cinética de rotación y potencial, su energía total es:

$$E = \frac{1}{2} 4m\ \Omega^2 R^2 + \frac{1}{2} 4m\ \omega^2 r^2 - \frac{G M_T 4m}{R}$$

Se cumple también que $\frac{G M_T 4m}{R^2} = 4m\ \Omega^2 R \quad \Rightarrow \quad G M_T = \Omega^2 R^3$

Por lo que la energía vale $E = 2m(\omega^2 r^2 - \Omega^2 R^2) = 2m\left(\omega^2 r^2 - \frac{G M_T}{R}\right)$ (1)

El satélite en su conjunto está sometido a la acción de una fuerza central que pasa por el centro de la tierra, al no existir momento exterior el momento angular total del sistema se conserva.

El momento angular del sistema L_S, cuando el giro de B es antihorario consta de L_T alrededor de la Tierra y L_P alrededor de P. En este caso ambos momentos tienen la misma dirección y el mismo sentido

$$L_T = R * 4m * \Omega R \quad \text{y} \quad L_P = r * 4m * \omega r$$

$$L_S = r * 4m * \omega r + R * 4m * \Omega R = 4m(\omega r^2 + \Omega R^2) = 4m\left(\omega r^2 + \sqrt{G M_T R}\right) = \text{constante} \quad (2)$$

Las maquinas ejercen trabajo y por lo tanto lo comunican al sistema con lo que E aumenta. Este aumento según la ecuación (1) puede lograrse o no ,si

a) Si aumenta ω y R no varía, sin embargo la ecuación (2) no se cumpliría ya que L_S aumentaría

b) Si disminuye R y ω permanece constante, pero no se cumpliría la ecuación (2)

c) **Si aumenta ω y disminuye R**, <u>en este caso se podría cumplir</u> la ecuación (2)

Cuando el giro de B alrededor de P es horario los momentos angulares tienen la misma dirección y sentido contrario, las ecuaciones son:

$$E = 2m\left(\omega^2 r^2 - \Omega^2 R^2\right) = 2m\left(\omega^2 r^2 - \frac{GM_T}{R}\right)$$

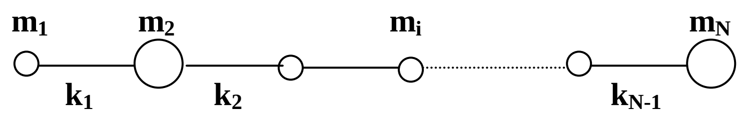
para que la energía E aumente <u>R debe aumentar,</u> pero el momento total L_S ha de permanecer constante

$$L_S = r * 4m * \omega r - R * 4m * \Omega R = 4m\left(\omega r^2 - \Omega R^2\right) = 4m\left(\omega r^2 - \sqrt{GM_T R}\right) = \text{constante}$$

o sea que $\left(\omega r^2 - \sqrt{GM_T R}\right) = \text{constante}.$

Se puede concluir que <u>si R aumenta, también ω debe aumentar</u> para que L_S permanezca constante.

2.- En este problema se analiza el movimiento longitudinal de una molécula lineal, esto es, el movimiento a lo largo del eje de la molécula. Los movimientos de rotación y aleteo no se consideran. La molécula consiste en N átomos de masas m_1, m_2 .....m_N, respectivamente. Cada átomo está conectado a sus vecinos por un enlace químico. Cada enlace se representa por un muelle elástico que obedece a la ley de Hooke y cuyas constantes elásticas son respectivamente k_1, k_2 ....k_{N-1}. la molécula se representa en la figura inferior



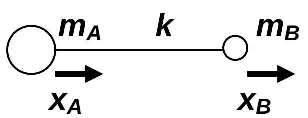
Una molécula lineal con N átomos

206

Para resolver el problema se tienen en cuenta los siguientes hechos: Las vibraciones longitudinales de la molécula consisten en una superposición de vibraciones separadas llamadas normales o modos normales. En un modo normal todos los átomos vibran con movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y pasan simultáneamente por sus posiciones de equilibrio.

1)Designamos con x_i al desplazamiento del átomo i desde su posición de equilibrio. Calcular la expresión de la fuerza F_i sobre el átomo i en función de los desplazamientos x_1 , x_2 .....x_N y de las constante k_1, k_2...k_{N-1}. ¿Qué relación hay entre las fuerzas F_1, F_2 ....F_N? Utilizando estas relaciones obtener una relación entre los desplazamientos x_1 , x_2 .....x_N y dar una interpretación física de esta relación

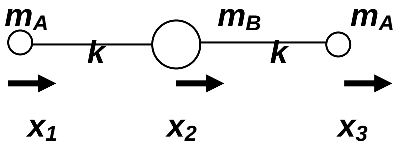
2) Analizar el movimiento de una molécula diatómica AB . El valor de la constante del muelle es k.. Calcular la expresión para las fuerzas que actúan sobre A y B.



La molécula diatómica AB

Determinar los posibles tipos de movimientos de la molécula. Calcular las frecuencias de vibración e interpretarlas. ¿Cómo es posible que los átomos vibren con la misma frecuencia aun cuando sus masas son diferentes?

3) Analizar el movimiento de una molécula triatómica BA_2

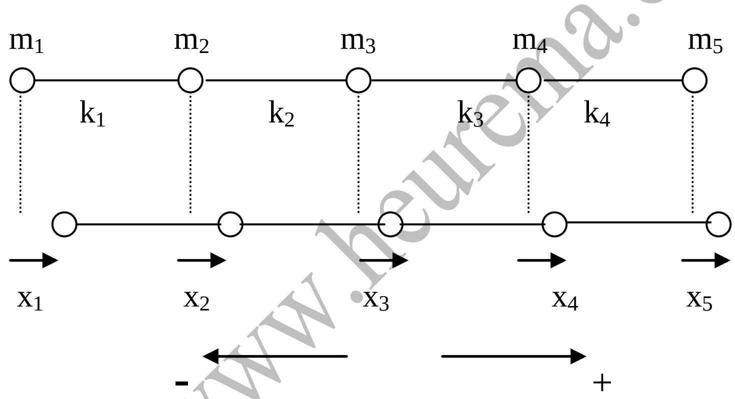


Expresar la fuerza neta sobre cada átomo en función de sus desplazamientos. Deduce los posibles movimientos de la molécula y las correspondientes frecuencias vibracionales.

4) Las frecuencias de los dos modos longitudinales de vibración del CO_2 son $3{,}998.10^{13}$ Hz y $7{,}042.10^{13}$ Hz respectivamente. Determinar el valor numérico de la constante del muelle del enlace CO

Datos: masas atómicas C = 12 u , O = 16 u ; u = $1{,}660.10^{-27}$

Iniciamos el problema suponiendo que existen cinco masas diferentes unidas por muelles de distintas constantes



En la figura la masa 1 se ha desplazado hacia la derecha una distancia x_1y la masa 2 una distancia x_2. El muelle que une dichas masas se ha encogido x_1 y al mismo tiempo se ha estirado x_2, por lo que en definitiva su longitud se ha encogido en x_1-x_2, siendo $x_1>x_2$ respecto de su longitud natural. La masa 1 es empujada por el muelle de constante k_1 hacia la izquierda con una fuerza

$$F_1 = -k_1(x_1-x_2)$$

El muelle que esta entre las masas 2 y 3 se ha encogido x_2-x_3 siendo $x_2 > x_3$. La masa 2 es empujada hacia la derecha por el muelle k_1 y hacia la izquierda por el k_2, siendo la fuerza

$$F_2 = k_1(x_1-x_2)-k_2(x_2-x_3)$$

Utilizando el mismo argumento las fuerzas para las masas 3 y 4 son respectivamente

$$F_3 = k_2(x_2-x_3)-k_3(x_3-x_4)$$

$$F_4 = k_3(x_3-x_4)-k_4(x_4-x_5)$$

La masa 5 es empujada hacia la derecha por el muelle k_4 con una fuerza

$$F_5 = k_4(x_4-x_5)$$

Si sumamos todas las fuerzas $\sum F = 0$

Generalizando para la masa i encontramos que la fuerza es:

$$F_i = k_{i-1}(x_{i-1} - x_i) - k_i(x_i - x_{i+1})$$

Para un sistema de partículas la suma de las fuerzas es igual a la masa del sistema por la aceleración del centro de masas

$$\sum F = 0 = M a_{CM} \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = 0$$

Si la aceleración del centro de masas es nula quiere decir que la velocidad del centro de masas o es cero o es constante.

La relación entre las coordenadas del centro de masas y las de cada partícula es:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ...m_Nx_N}{M}$$

Si el sistema de referencia elegido es el centro de masas

$$m_1x_1 + m_2x_2 + ...+ m_Nx_N = 0$$

Las fuerzas que actúan sobre la molécula son interiores y no pueden acelerar el centro de masas del sist

2) Analizar el movimiento de una molécula diatómica AB

Las fuerzas que actúan sobre la molécula diatómica AB son:

$$F_A = -k(x_A-x_B) = m_Aa_A \ ; \quad F_B = k(x_A-x_B) = m_Ba_B$$

Si el movimiento es armónico una posible solución es:

$$x_A = A \text{ sen } \omega t \quad ; x_B = B \text{ sen } \omega t$$

de aquí $\quad \dfrac{d^2x_A}{dt^2} = -A\omega^2 \text{sen } \omega t \quad ; \quad \dfrac{d^2x_B}{dt^2} = -B\omega^2 \text{sen } \omega t$

Sustituyendo en las ecuaciones de las fuerzas

$$-k(A\text{sen } \omega t - B\text{sen } \omega t) = -m_A A\omega^2 \text{sen } \omega t \quad \Rightarrow \quad A(k - m_A\omega^2) - kB = 0$$

$$k(A\text{sen } \omega t - B\text{sen } \omega t) = -m_B B\omega^2 \text{sen } \omega t \quad \Rightarrow \quad B(-k + m_B\omega^2) + kA = 0$$

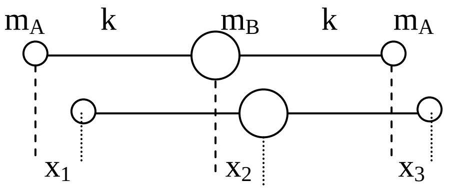
El determinante de los coeficientes ha de ser igual a cero

$$\begin{vmatrix} k-m_A\omega^2 & -k \\ k & -k+m_B\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$-k^2+km_A\omega^2+km_B\omega^2-m_Am_B\omega^4+k^2=0 \quad \Rightarrow \quad k\omega^2(m_A+m_B)=m_Am_B\omega^4$$

$$k=\frac{m_A.m_B}{m_A+m_B}\omega^2$$

3) Analizar el movimiento de una molécula triatómica



Las fuerzas que actúan sobre los átomos de la molécula son:

$$F_1=-k(x_1-x_2)=m_A\frac{d^2x_1}{dt^2}$$

$$F_2=k(x_1-x_2)-k(x_2-x_3)=m_B\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

Las posibles soluciones

$$x_1=A\ \text{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}=-A\omega^2\ \text{sen}\omega t$$

$$x_2=B\ \text{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=-B\omega^2\ \text{sen}\omega t$$

$$x_3=A_1\ \text{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x_1}{dt^2}=-A_1\omega^2\ \text{sen}\omega t$$

Sustituyendo en las ecuaciones de las fuerzas

$$\begin{array}{lllll} A(-k+m_A\omega^2) & + & kB & & =0 \\ kA & + & B(-2k+m_B\omega^2) & + \quad kA_1 & =0 \\ & & kB & A_1(-k+m_A\omega^2) & =0 \end{array}$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} -k+m_A\omega^2 & k & 0 \\ k & -2k+m_B\omega^2 & k \\ 0 & k & -k+m_A\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por menores complementarios, resulta:

$$\left(-k+m_A\omega^2\right)\left[\left(-2k+m_B\omega^2\right)\left(-k+m_A\omega^2\right)-k^2\right]-k^2\left[-k+m_A\omega^2\right]=0$$

$$\left(-k+m_A\omega^2\right)\left[\left(-2k+m_B\omega^2\right)\left(-k+m_A\omega^2\right)-k^2-k^2\right]=0$$

Una solución de la ecuación anterior es:

$$-k+m_A\omega^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m_A}} \qquad (1)$$

Otra solución es:

$$\left(-2k+m_B\omega^2\right)\left(-k+m_A\omega^2\right)=2k^2 \Rightarrow 2k^2-2km_A\omega^2-km_B\omega^2+m_Am_B\omega^4=2k^2$$

$$m_Am_B\omega^2=k\left(2m_A+m_B\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega=\sqrt{\frac{k\left(2m_A+m_B\right)}{m_Am_B}} \qquad (2)$$

Además de la solución $\omega = 0$

4) Determinar el valor numérico de la constante del muelle del enlace CO en la molécula de CO_2

De la ecuación (1) $\qquad k = 4*3{,}14^2*\left(3{,}998.10^{13}\right)^2*16*1{,}66.10^{-27} = 1{,}68.10^3\ \dfrac{N}{m}$

De la ecuación (2) $\qquad k = \dfrac{4*3{,}14^2*\left(7{,}042.10^{13}\right)^2*16*12*\left(1{,}66.10^{27}\right)^2}{\left(2*16+12\right)*1{,}66.10^{-27}} = 1{,}42.10^3\ \dfrac{N}{m}$

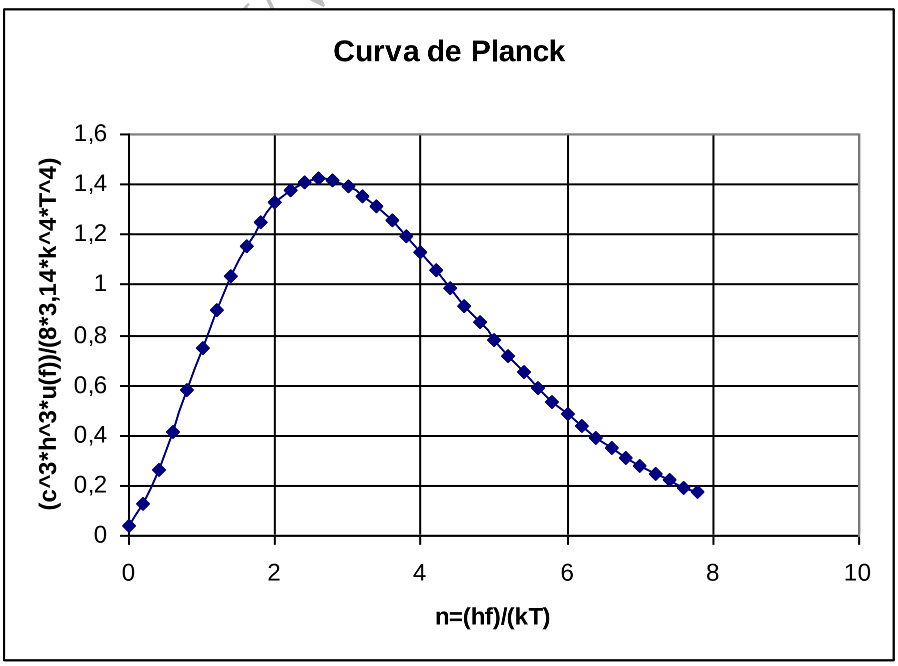
3.-En este problema se calculará la temperatura de un satélite espacial. El satélite es una esfera de 1 m de diámetro. Todo el satélite permanece a temperatura constante. Toda la superficie esférica del satélite esta recubierta por el mismo material. El satélite se encuentra cerca de la superficie de la Tierra pero no en su sombra.
La temperatura en la superficie del Sol es (su temperatura de cuerpo negro) 6000 K y su radio $6{,}96.10^{8}$ m. La distancia entre el Sol y la Tierra $1{,}5.10^{11}$ m. La radiación solar calienta al satélite hasta una temperatura a la cual la emisión como un cuerpo negro igual a la potencia absorbida de la luz del Sol.
La potencia emitida por un cuerpo negro obedece a la ley de Stefan-Boltzmann $P = \sigma T^{4}$, $\sigma = 5{,}67.10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} . En una primera aproximación se supone que el satélite y el Sol absorben toda la radiación electromagnética incidente sobre ellos.

1) Encontrar una expresión para la temperatura del satélite y su valor numérico.
El espectro de radiación de un cuerpo negro obedece a la ley de Planck

$$u(T,f)\,df = \frac{8\pi\, k^{4}T^{4}}{c^{3}h^{3}}\,\frac{\eta^{3}d\eta}{e^{\eta}-1} \quad ; \quad \eta = \frac{hf}{kT}$$

siendo u(T, f) la densidad de energía de la radiación electromagnética para un intervalo de frecuencias , (f , f +df), $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s es la constante de Planck y $k = 1{,}4.10^{-11}$ $J.K^{-1}$ la de Boltzmann.

La figura muestra el espectro normalizado



El área bajo la curva mide la potencia total por unidad de área

En muchas aplicaciones se necesita mantener frío el satélite tanto como se pueda y para ello los ingenieros han diseñado un recubrimiento reflectante tal que existe una frecuencia de corte a partir de la cual el satélite no absorbe radiación. Esta frecuencia de corte vale $\frac{hf}{k} = 1200\ K$

2) Calcular la nueva temperatura de equilibrio del satélite
Para facilitar los cálculos

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Para valores pequeños de η ***se puede hacer la siguiente aproximación***

$$e^\eta - 1 = \eta$$

3) Si un satélite dispone de paneles expandidos los cuales generan electricidad, los dispositivos electrónicos situados dentro del satélite producen calor . Suponiendo que la potencia interna es 1 kW ¿Cuál sería la temperatura del satélite en el caso 2?

4) Un fabricante anuncia una pintura con las siguientes características:
¨Esta pintura refleja más del 90% de toda la radiación incidente (tanto la visible como la infrarroja) pero es capaz de radiar a todas las frecuencias (visible e infrarrojo) como un cuerpo negro, disipando así el calor del satélite y manteniendo al satélite tan frío como sea posible¨
Razone si esta pintura puede existir

¿Qué propiedades deberá tener un recubrimiento con el fin de elevar la temperatura de un cuerpo esférico similar al del satélite considerando una temperatura superior a la calculada en 1?

La potencia radiada por el Sol cuando llega al satélite está distribuida sobre una superficie esférica cuyo radio es la distancia Sol-Tierra

$$\frac{\sigma T_{Sol}^4 * 4\pi R_{Sol}}{4\pi R_{S-T}^2} = \frac{\sigma T_{Sol}^4 * R_{Sol}}{R_{S-T}^2}$$

Dada la distancia entre el Sol y la Tierra los rayos solares llegan paralelos al satélite y éste intercepta un haz de rayos cuya superficie es un círculo de radio r_{sat} (fig 1)

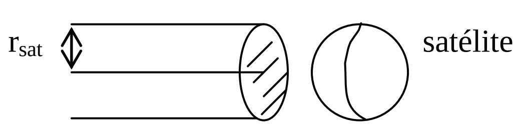


Fig. 1

La energía por unidad de tiempo que recibe el satélite es $\frac{\sigma T_{Sol}^4 R_{Sol}^2}{R_{S-T}^2} * \pi\ r_{sat}^2$ (1)

Cuando se alcance el equilibrio, la energía por unidad de tiempo que el satélite irradia al espacio a través de su superficie es igual a la que recibe del Sol

$$\sigma T_{sat}^4 * 4\pi r_{sat}^2 = \frac{\sigma T_{Solt}^4 R_{Sol}^2}{4R_{S-T}^2} * 4\pi r_{sat}^2 \Rightarrow T_{sat} = T_{Sol} \sqrt[4]{\frac{R_{Solt}^2}{4\ R_{S-T}^2}} = 6000\ \sqrt[4]{\frac{(6{,}96.10^8)^2}{4*\left(1{,}5.10^{11}\right)^2}} = 289\mathrm{K}$$

2) Calcular la nueva temperatura del satélite con su recubrimiento

La frecuencia de corte a partir de la cualñ el satélite no absorbe radiación es:

$$\frac{hf}{k} = 1200 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1200k}{h}$$

El valor de η es

$$\eta = \frac{hf}{kT} = \frac{h\frac{1200k}{h}}{k6000} = \frac{1200}{6000} = 0{,}2$$

teniendo en cuenta que la potencia total es el área bajo la curva de la figura del enunciado, la fracción de esa potencia que absorbe el satélite es:

$$\beta = \frac{\int_0^{0,2} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta}{\int_0^\infty \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta} = \frac{\int_0^{0,2} \frac{\eta^3}{1+\eta-1} d\eta}{\frac{\pi^4}{15}} = \frac{\frac{\eta^3}{3} * 15}{\pi^4} = 4.10^{-4}$$

La potencia que ahora absorbe el satélite se deduce a partir de la expresión (1)

$$\beta \frac{\sigma T_{Sol}^4 * R_{Sol}^2}{R_{S-T}^2} * \pi r_{sat}^2 = \sigma T_{sat}^4 * 4\pi r_{sat}^4 \Rightarrow T_{sat} = T_{Sol} \sqrt[4]{\frac{\beta}{4} * \frac{R_{Sol}^2}{R_{S-T}^2}} = 289\sqrt[4]{4.10^{-4}} = 41\ \mathrm{K}$$

3) ¿Cuál es la temperatura del satélite en el caso 2

El satélite emite desde su interior hacia el exterior

$$4\pi r_{sat}^2 * \chi\ \sigma T_{sat}^4 = 1000$$

En la expresión anterior, si el satélite dejase pasar todas las longitudes de onda χ sería la unidad, pero debido a su envoltura una parte de las longitudes de onda vuelven al interior y el valor de χ es inferior a la unidad, lo que significa que la temperatura interior del satélite es superior a la que tendría si careciese de envoltura

$$4\pi r_{sat}^2 * \frac{\int_o^{\eta_c} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta}{\frac{\pi^4}{15}} \sigma T_{sat}^4 = 1000$$

La relación entre la frecuencia de corte,1200 K, y la temperatura del satélite es:

$$\eta_C = \frac{1200}{T_{sat}}$$

llevada a la expresión anterior, tenemos para el área bajo la curva de distribución de energía de Planck

$$\int_0^{\eta_C} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta = \frac{1000 * \frac{\pi^4}{15} * \eta_C}{4\pi r_{sat}^4 * \sigma * 1200^4} = 0{,}0176 * \eta_C^4$$

Para resolver la ecuación anterior ya no podemos hacer la aproximación $e^\eta = 1 + \eta$. En consecuencia hemos de resolverla por tanteo. Damos valores a η_C y calculamos el segundo miembro de la ecuación anterior. Para cada valor dado a η_C, medimos el área bajo la curva en la figura 1. El resultado correcto ocurre cuando ambos valores numéricos coinciden

η_C	$0{,}0176*(\eta_C)^4$	Área bajo la curva
4	4,51	4,06
3,8	3,67	3,83
3,6	2,96	3,61
3,4	2,35	3,33

De la observación de la tabla se deduce que la solución debe ser próxima a 3,8
De aquí se deduce que la temperatura del satélite es:

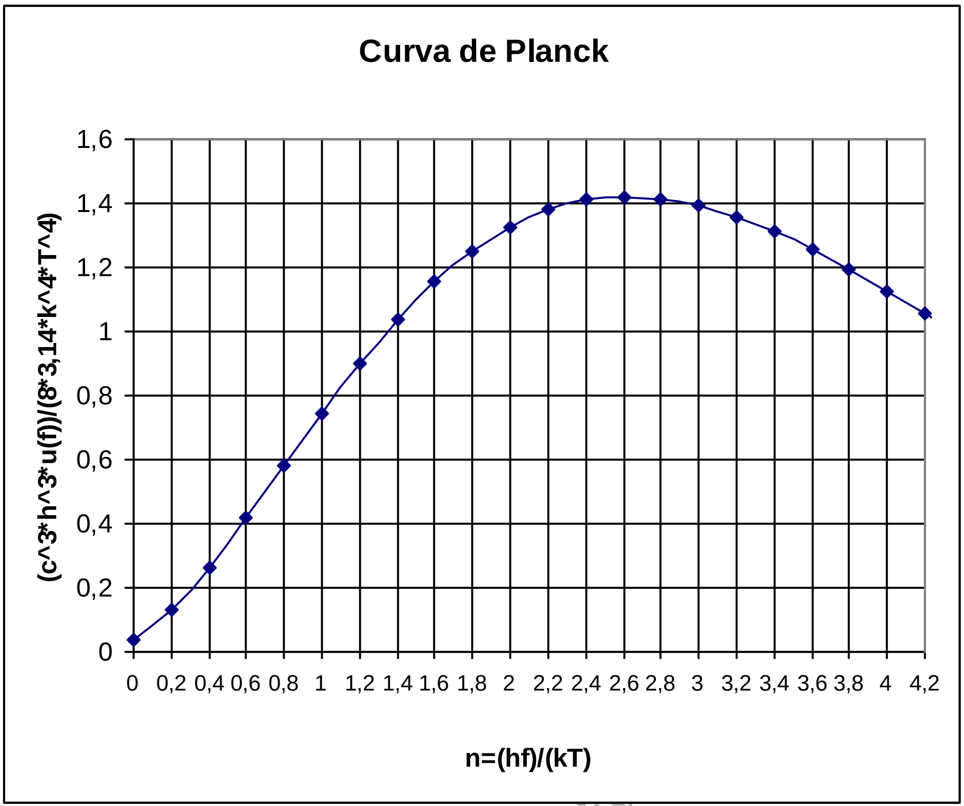


Fig. 1

$$T_{sat} = \frac{1200}{3{,}8} = 316 \text{ K}$$

4) Esa pintura no puede existir ya que se comporta como un cuerpo negro cuando radia al exterior y no lo hace así cuando absorbe radiación.

5) El efecto invernadero consiste en que una cubierta, por ejemplo una de vidrio, deja pasar las frecuencias altas y es impermeable a las frecuencias bajas. Esto hace que la radiación entre en un sistema pero no lo abandone dando lugar a un calentamiento del mismo. Por tanto la cubierta del satélite debe tener esas características para calentarlo todo lo posible.