PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

20ª OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. POLONIA. 1989

1.-Dos líquidos A y B son inmiscibles. Las presiones de sus vapores están dadas por las ecuaciones

$$ln\frac{p_A}{p_o} = \frac{\alpha_A}{T} + b_A \qquad ; \qquad ln\frac{p_B}{p_o} = \frac{\alpha_B}{T} + b_B$$

en las que p_o representa la presión atmosférica normal, T la temperatura en kelvin de los vapores y a_A , a_B ,b_A y b_B son constantes que dependen del líquido.
Para ambos líquidos se encuentran los siguientes valores:

$t/ºC$	p_A/p_o	p_B/p_o
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

los valores de la tabla anterior no tienen error.

a) Calcular la temperatura de ebullición de los líquidos a la presión p_o.

b) Los líquidos A y B se vertieron en un vaso tal como muestra la figura1

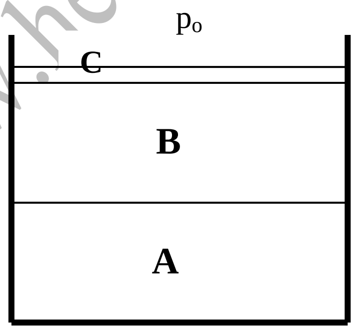

Fig.1

La superficie del líquido B está cubierta con una delgada capa de un líquido C no volátil insoluble en ambos líquidos. Actúa previniendo la libre evaporación del líquido B.
La razón de las masas moleculares de los vapores de los líquidos es:

$$\frac{M_A}{M_B} = 8$$

Las masas de líquidos A y B vertidos en el vaso son 100 g de cada uno. La altura de los líquidos en el vaso y las densidades son tales que puede considerarse que la presión en cualquier punto del vaso es p_o.

Los líquidos del vaso son calentados de forma lenta, constante y uniforme

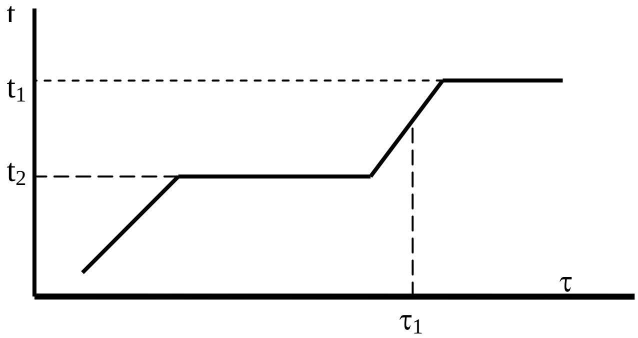

Fig.2

La temperatura de los líquidos cambia con el tiempo t tal como se muestra esquemáticamente en la figura 2.
Calcular los valores de las temperaturas t_1 y t_2 y las masas de los líquidos al tiempo τ_1. Las temperaturas se estimarán hasta el grado y las masas hasta la décima de gramo. Se supone que los vapores se comportan como gases ideales y que obedecen a la ley de Dalton que establece que la presión de una mezcla de gases es la suma de las presiones parciales de cada uno de ellos.

A partir de los datos de la tabla se pueden determinar las constantes que aparecen en las ecuaciones de las presiones de vapor

$$\ln\ 0{,}284 = \frac{\alpha_A}{313{,}15} + b_A \quad ; \quad \ln 1{,}476 = \frac{\alpha_A}{363{,}15} + b_A \quad \Rightarrow$$

$$0{,}38934 - (-1{,}2588) = \alpha_A\left(\frac{1}{363{,}15} - \frac{1}{313{,}15}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = -3748{,}5\ \ K^{-1}$$

$$\ln\ 0{,}284 = -\frac{3748{,}5}{313{,}15} + b_A \quad \Rightarrow \quad b_A = 10{,}71$$

$$\ln\ 0{,}07278 = \frac{\alpha_B}{313{,}15} + b_B \quad ; \quad \ln\ 0{,}6918 = \frac{\alpha_B}{363{,}15} + b_{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow$$

$$-0{,}36846 + 2{,}6203 = \alpha_B\left(\frac{1}{313{,}15} - \frac{1}{363{,}15}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = -5121{,}6\ \ K^{-1}$$

$$\ln\ 0{,}6918 = -\frac{5121{,}6}{363{,}15} + b_B \quad \Rightarrow \quad b_B = 13{,}73$$

Un líquido hierve cuando la presión exterior y la presión de vapor se igualan

$$\ln\frac{p_A}{p_0} = \ln 1 = 0 = \frac{-3748{,}5}{T_A} + 10{,}71 \quad \Rightarrow \quad T_A = 350K \quad \Rightarrow \quad t_A = 77\ \ {}^{o}C$$

$$\ln\frac{p_B}{p_0} = \ln 1 = 0 = \frac{-5121{,}6}{T_B} + 13{,}73 \quad \Rightarrow \quad T_B = 373K \quad \Rightarrow \quad t_B = 100\ ^{o}C$$

b) En los libros de Química-Física se trata la cuestión de las mezclas inmiscibles Para ellas la presión de vapor es la suma de las presiones de vapor de los componentes puros. La presión de vapor es independiente de las cantidades de cada componente.
Por tanto cuando se calienta una mezcla inmiscible, ésta hervirá cuando su presión de vapor sea igual a la presión exterior, esto es, cuando

$$p_o = p_A + p_B = p_o e^{\frac{-3748{,}5}{T}+10{,}71} + p_o e^{\frac{-5121{,}6}{T}+13{,}73} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 1 = e^{\frac{-3748{,}5}{T}+10{,}71} + e^{\frac{-5121{,}6}{T}+13{,}73}$$

La ecuación anterior la podemos resolver por tanteo dando valores a T hasta encontrar el que sustituido en el segundo miembro valga 1. Dado que la presión de vapor de la mezcla es la suma de los componentes, la temperatura T es inferior a la del componente de menor presión de vapor, lo que indica que el tanteo lo debemos hacer a partir de valores inferiores a 350 K.

T = 320 K	1>0,4691
T = 330 K	1>0,6894
T = 340 K	1>0,9935
T = 341 K	1<1,0291

La temperatura T está comprendida entre 340 K y 341 K, como 0,9935 difiere de 1 en $6{,}7.10^{-3}$ que es menor que la diferencia entre 1 y 1,0291 que vale $29{,}1.10^{-3}$, tomamos como valor más próximo al verdadero 340 K = 67ºC.

El número de moléculas de cada componente en la fase vapor es directamente proporcional a su presión de vapor

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{p_A}{p_B} \Rightarrow \frac{n_A * M_A}{n_B * M_B} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{p_A * M_A}{p_B * M_B} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{\left(e^{\frac{-3748{,}5}{T}+10{,}71}\right) * 8}{e^{\frac{-5121{,}6}{T}+13{,}73}}$$

Si en la expresión anterior se sustituye T por 340 K resulta:

$$\frac{m_A}{m_B} = 22{,}2$$

Cuando los 100 g del componente A se encuentren en la fase de vapor, la cantidad del componente B en esa fase es:

$$m_B = \frac{100}{22{,}2} = 4{,}5\ \text{g}$$

Por tanto en la fase líquida quedan del componente: 100-4,5 =95,5 g. Al seguir calentando, el componente B de la fase líquida pasará a la fase vapor y a una temperatura que será la que iguale la presión de vapor de B a la presión exterior. Ese valor ya lo hemos calculado en el apartado a) y es 100º C.

2.-En tres puntos no alineados, P_1, P_2 y P_3 están situadas tres masas puntuales, m_1, m_2 y m_3. Las tres masas interactúan entre sí a través de sus atracciones gravitatorias. Las masas están aisladas y no sufren interacción con otros cuerpos. Sea E un eje de rotación que pasa por el centro de masas del sistema y es perpendicular al plano $P_1P_2P_3$. Determinar qué condición debe tener la velocidad angular ω del sistema respecto del eje E para que la forma y tamaño del triángulo $P_1P_2P_3$ no cambie, esto es, bajo qué condiciones el sistema rota alrededor del eje E como si fuese un sólido rígido.
Las distancias entre los puntos son:

$$P_1P_2 = \alpha_{12} \quad ; \quad P_1P_3 = \alpha_{13} \quad ; \quad P_2P_3 = \alpha_{23}$$

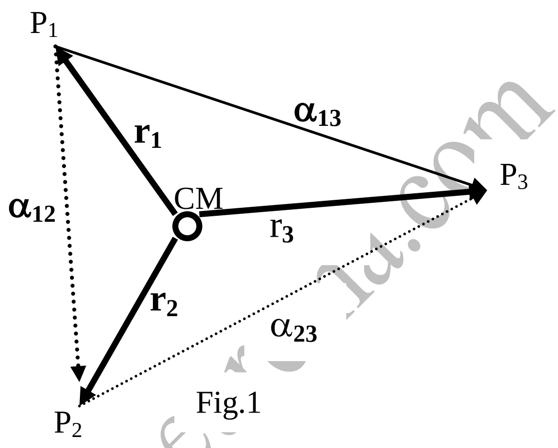

Fig.1

El sistema está aislado y entre las masas no actúan más que fuerzas internas, por consiguiente, la energía cinética de las partículas más la potencial debe mantenerse constante con el tiempo. Como se impone la condición de que el sistema gire como un sólido rígido, las distancias entre las partículas son constantes y cómo la interacción gravitatoria depende sólo de constantes, (G, las masas y las distancias), se deduce que la energía potencial es constante, y como la suma de esa energía potencial con la cinética es constante, también lo será la energía cinética del sistema.
La energía cinética del sistema depende de su momento de inercia y de su velocidad angular. El momento de inercia es constante ya que las masas y sus distancias al centro de masas no varían, se deduce, que la velocidad angular es constante.

En la figura 1 se han representado los tres puntos y el centro de masas del sistema. Los vectores $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ **y** $\mathbf{r_3}$ localizan las masas desde el centro de masas y a las distancias entre las masas se les ha adjudicado un sentido vectorial.

$$\boldsymbol{\alpha}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha}_{13} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad ; \quad \boldsymbol{\alpha}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$$

Si las tres masas giran alrededor del eje que pasa por el centro de masas la fuerza centrípeta que necesita la masa m_1 es la fuerza de interacción gravitatoria que ejercen la masa m_2 y la masa m_3. Este mismo razonamiento vale para la masa m_2 y la masa m_3.

La fuerza $\mathbf{F_{21}}$ la ejerce la masa m_2 sobre la masa m_1 y vale

$$\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^2}\vec{\varepsilon}_{12}$$

Siendo $\vec{\varepsilon}_{12}$ el vector unitario que está en la dirección y sentido P_1P_2.

$$\vec{\varepsilon}_{12} = \frac{\vec{\alpha}_{12}}{\alpha_{12}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\alpha_{12}} \quad \text{, por tanto,} \quad \vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$$

La fuerza que la masa 3 ejerce sobre la 1 vale: $\vec{F}_{31} = G\frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3}\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right)$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \text{ fuerza centrípeta de } m_1 = F_C = m_1\omega^2 r_1\ \vec{\varepsilon}_{CM1}$$

$\vec{\varepsilon}_{CM1}$, es un vector unitario en la dirección y sentido desde l el punto P_1 al centro de masas del sistema

$$\vec{\varepsilon}_{CM1} = -\frac{\vec{r}_1}{r_1} \qquad ; \qquad \vec{F}_C = -m_1\omega^2\ \vec{r}_1$$

$$G\frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) + G\frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3}\left(\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right) + m_1\omega^2\vec{r}_1 = 0$$

En la ecuación anterior vamos a sustituir $\vec{r}_2$, haciendo uso de la posición del centro de masas del sistema.

$$0 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M} \quad \Rightarrow \quad m_2\vec{r}_2 = -m_1\vec{r}_1 - m_3\vec{r}_3$$

$$G\frac{m_1 m_2}{\alpha_{12}^3}\vec{r}_2 + G\frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3}\vec{r}_3 + m_1\vec{r}_1\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{Gm_3}{\alpha_{13}^3}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Gm_1}{\alpha_{12}^3}\left(-m_1\vec{r}_1 - m_3\vec{r}_3\right) + G\frac{m_1 m_3}{\alpha_{13}^3}\vec{r}_3 + m_1\vec{r}_1\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{Gm_3}{\alpha_{13}^3}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_3\left(-\frac{Gm_1 m_3}{\alpha_{12}^3} + \frac{Gm_1 m_3}{\alpha_{13}^3}\right) + m_1\vec{r}_1\left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{\alpha_{12}^3} - \frac{Gm_3}{\alpha_{13}^3} - \frac{Gm_1}{\alpha_{12}^3}\right) = 0$$

Si nos fijamos en la última igualdad resulta que el primer sumando es un vector que tiene la dirección de $\vec{r}_3$ y el segundo sumando es otro vector que tiene la dirección de $\vec{r}_1$. Ambos vectores al tener diferentes direcciones no pueden sumar cero, salvo que los coeficientes de los vectores sean nulos

$$-\frac{Gm_1 m_3}{\alpha_{12}^3} + \frac{Gm_1 m_3}{\alpha_{13}^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} = \alpha_{13}$$

$$\omega^2 = G\left(\frac{m_1 + m_2}{\alpha_{12}^3} + \frac{m_3}{\alpha_{13}^3}\right) = G\left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{\alpha_{12}^3}\right) = \frac{GM}{\alpha_{12}^3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

Siguiendo este procedimiento con otras dos masas, obtendríamos:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

3.-Este problema se refiere a una investigación para transformar un microscopio electrónico en el que los electrones son acelerados con una diferencia de potencial U = 511 kV, en un microscopio de protones que se aceleran con un potencial –U.

a) Un electrón, después de abandonar el dispositivo que le acelera mediante una diferencia de potencial U, penetra en una región con un campo magnético no homogéneo $\vec{B}$, generado por un sistema de bobinas estacionarias L_1, L_2 …L_n, siendo las corrientes que circulan por ellas , i_1, i_2 …i_n , respectivamente.

¿Cuáles deberían ser las corrientes I_1, I_2 ….I_n, en las bobinas con la finalidad de que un protón(acelerado con una diferencia de potencial -U) siguiese la misma trayectoria y dirección que el electrón?

b) ¿Cuántas veces aumentaría o disminuiría el poder de resolución del microscopio de protones respecto del de electrones.

Se supone que el poder de resolución depende únicamente de las propiedades ondulatorias de las partículas

La ecuación fundamental de la mecánica relativista es:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

En el problema la fuerza magnética que ejerce el campo sobre el electrón es perpendicular a su velocidad, lo cual implica que la velocidad se mantiene constante, con lo que la ecuación anterior se convierte en

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_o \frac{d\vec{v}}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o \vec{a}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La fuerza y la aceleración tienen la misma dirección y sentido, se trata, de un movimiento circular, siendo $\vec{a}$ la aceleración centrípeta.

$$evB = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad eB = \frac{p}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{p}{eB}$$

Como el protón y el electrón han de seguir la misma trayectoria

$$\frac{p_p}{eB_p} = \frac{p_e}{eB_e} \quad \Rightarrow \quad B_p = B_e \frac{p_p}{p_e}$$

El campo magnético B_p debe tener la misma dirección que B_e, pero sentido contrario. Para hallar la relación entre los momentos hacemos uso del invariante relativista

$$E^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4$$

E es la energía de la partícula suma de la energía cinética y energía en reposo

$$\left(E_C + E_o\right)^2 = p^2c^2 + m_o^2c^4 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{\left(E_C + E_o\right)^2 - m_o^2c^4}{c^2}$$

$$B_p = B_e \frac{p_p}{p_e} = B_e \frac{\sqrt{\left(E_{cp} + m_{op}c^2\right)^2 - m_{op}^2c^4}}{\sqrt{\left(E_{ce} + m_{oe}c^2\right)^2 - m_{oe}^2c^4}} = B_e \sqrt{\frac{E_{cp}^2 + 2E_{cp}m_{op}c^2}{E_{ce}^2 + 2E_{ce}m_{oe}c^2}}$$

Las energías cinéticas del protón y del electrón son iguales

$$B_p = B_e \sqrt{\frac{E_{cp} + 2m_{op}c^2}{E_{ce} + 2m_{oe}c^2}} = B_e \sqrt{\frac{511.10^3 + 2*938.10^6}{511.10^3 + 2*511.10^3}} = 35\ B_e$$

b) La longitud de onda asociada a una partícula está dada por la ecuación de De Broglie

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} \quad ; \quad \lambda_p = \frac{h}{p_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_p}{\lambda_e} = \frac{p_e}{p_p} = \frac{1}{35} \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \frac{1}{35}\lambda_e$$

El poder de resolución es proporcional a la longitud de onda

$$z_p = k\lambda_p \quad ; \quad z_e = k\lambda_e \quad \Rightarrow \quad z_p = \frac{z_e}{35}$$

Con el microscopio de protones se distinguiría un objeto 35 veces más pequeño que el que se distinguiría con el microscopio electrónico.