PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

16ª OLIMPIADA DE FÍSICA. YUGOSLAVIA. 1985

1.-Un joven radio aficionado mantiene un enlace de radio con dos jóvenes chicas que viven en dos ciudades diferentes. El joven dispone de una antena direccional tal que cuando la joven que vive en la ciudad A recibe un máximo de señal la que vive en la ciudad B recibe un mínimo y viceversa. La antena direccional está formada por dos varillas verticales las cuales transmiten con la misma intensidad uniformemente en todas las direcciones en un plano horizontal.

a) Encontrar los parámetros de la antena direccional, esto es, la distancia entre las varillas, su orientación, el desfase entre las señales eléctricas aplicadas en las varillas, de modo que la distancia entre ellas sea la mínima posible.

b) Determinar la solución numérica si la estación del joven transmite a 27 MHz y está situada en la ciudad de Portoroz. A partir de un mapa se han medido los ángulos que forman con el norte las direcciones de las ciudades A y B y cuyos valores son 72º y 157º respectivamente.

En la figura 1 se representa la antena y la situación de las dos ciudades.

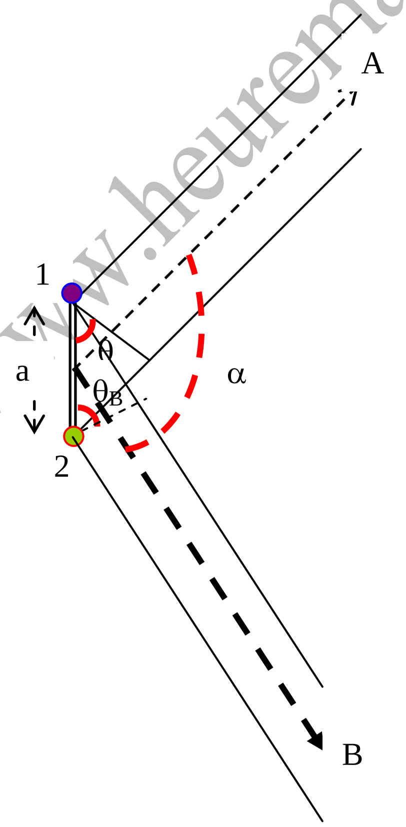


Fig.1

La señal eléctrica de la varilla 1 es: $E = E_o \cos\omega t$ y la de la varilla 2 $E = E_o \cos(\omega t + \delta)$.

La señal enviada hacia la ciudad A por parte de la varilla 2 mantiene un retraso en longitud $a\ \mathrm{sen}\theta_A$ y un adelanto, respecto de la 1, en el siguiente valor:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{x}{\delta} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\delta\ \lambda}{2\pi}$$

Si suponemos que la ciudad A recibe un máximo de intensidad

$$a\ \mathrm{sen}\theta_A - \frac{\delta\ \lambda}{2\pi} = k_1\lambda \quad , \quad k_1 = 0,\ 1,\ 2..... \quad (1)$$

Para la ciudad B la emisión de la varilla 1 está retrasada espacialmente en a sen θ_B y además en $\frac{\delta\ \lambda}{2\pi}$, luego, si B recibe un mínimo de señal

$$a\ \mathrm{sen}\theta_B + \frac{\delta\ \lambda}{2\pi} = \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad , \quad k_2 = 1,\ 2..... \quad (2)$$

Si sumamos las dos ecuaciones

$$a\ (\mathrm{sen}\ \theta_A + \mathrm{sen}\ \theta_B) = 2a\ \mathrm{sen}\frac{\theta_A + \theta_B}{2}\cos\frac{\theta_A - \theta_B}{2} = \left(k_1 + k_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (3)$$

Si volvemos a la figura 1

$$\theta_A + \varepsilon = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \theta_B + \rho = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \varepsilon + \rho + \alpha = \pi$$

De estas tres ecuaciones se deduce que $\theta_A + \theta_B = \alpha$, que llevado a la ecuación (3)

$$2a\ \mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2\theta_A - \alpha}{2} = \left(k_1 + k_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\left(k_1 + k_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2a\ \mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{2\theta_A - \alpha}{2}}$$

Si a, ha de ser mínimo, el menor valor del numerador es cuando $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ y el denominador será máximo cuando

$$\cos\frac{2\theta_A - \alpha}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\theta_A - \alpha}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \ \theta_B = \frac{\alpha}{2}$$

Con estos valores se tiene la distancia mínima entre las varillas en función de λ y α :

$$a_{min} = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{2\ \text{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

Si de la ecuación (2) le restamos la (1)

$$\frac{\lambda\ \delta}{\pi} = \left(k_2 - \frac{1}{2} + k_1\right)\lambda \quad \Rightarrow \quad \delta = \left(k_2 - \frac{1}{2} + k_1\right)\pi \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2}$$

En la figura 2 se representa la dirección del norte y de las varillas.

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3.10^8}{27.10^6} = 11{,}1\ \text{ m}$$

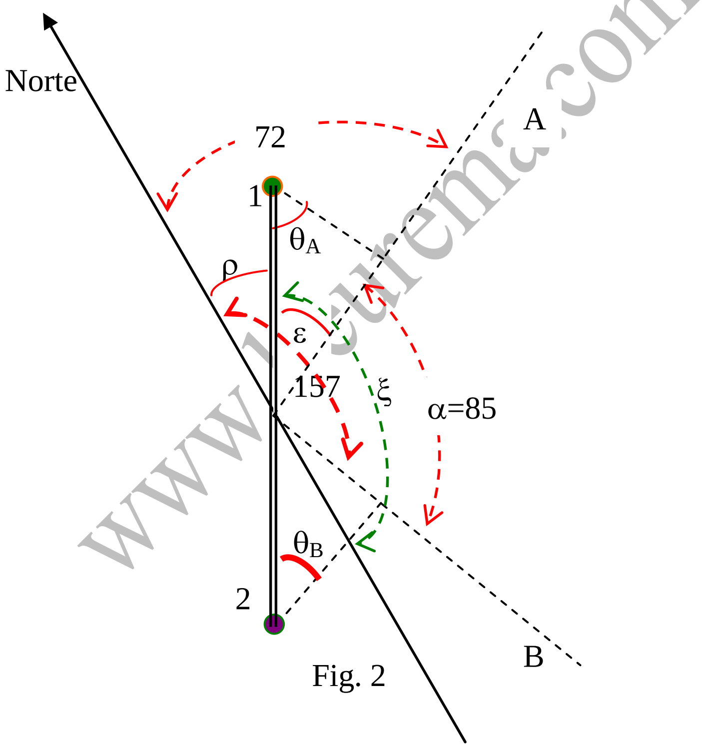


Fig. 2

$$\alpha = 157 - 72 = 85^o \quad \Rightarrow \quad a_{min} = \frac{\frac{1}{2}\lambda}{2\text{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{11{,}1}{2}}{2\ \text{sen}\ 42{,}5} = 4{,}1\ \text{ m}$$

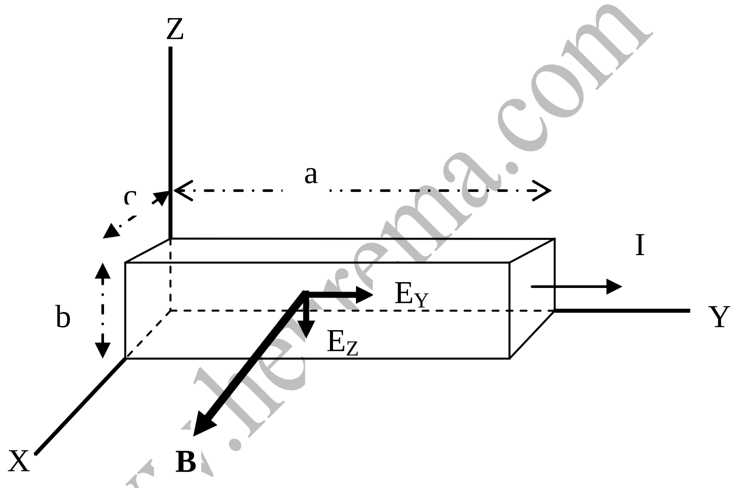
La dirección de la antena con el norte esta medida por el ángulo ξ de la figura 2

$$\theta_A + \varepsilon = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon = 90 - 42{,}5 = 47{,}5^o \ ; \ \rho = 72 - \varepsilon = 24{,}5^o \Rightarrow \ \xi = 180 - 24{,}5 = 155{,}5^o$$

2.- Una barra larga tiene la forma de un paralelepípedo con lados a, b y c (a>>b , b>>c)y esta hecha de un semiconductor InSb, por ella circula una corriente eléctrica paralela al lado a. La barra se encuentra en el seno de un campo magnético externo B paralelo al lado c. El campo magnético debido a la corriente I se desprecia. Los portadores de la corriente en la barra son electrones. La velocidad promedio de los electrones en un semiconductor en presencia de un campo eléctrico es v = μE ,en la que μ es la movilidad. Si existe un campo magnético el campo eléctrico ya no es paralelo a la corriente. El fenómeno se conoce como efecto Hall.

a) Determinar la cuantía y dirección del campo eléctrico en la barra respecto de la intensidad I

b) Calcular la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos opuestos



de las superficies de la barra en la dirección del lado b.

c) Encontrar el valor promedio de la diferencia de potencial eléctrico si la corriente y el campo magnético son alternos , I = $I_o$sen ωt y B = B_o sen (ωt+δ)
Datos. La movilidad del electrón en el InSb es 7,8 m^2T/Vs
La concentración de electrones en el InSb 2,5.10^{22} m^3 , I=1,0 A, B=0,10 T, b= 1,0 cm , c=1,0 mm , e_o =-1,6.10^{-19} C

a) En la figura del enunciado Ey es el campo eléctrico que hace mover a los electrones de la barra. Dado que la carga del electrón es negativa la velocidad de los electrones en promedio es paralela al eje Y y en sentido negativo . Si existe un campo magnético externo los electrones son desviados hacia abajo porque el campo magnético ejerce una fuerza de valor:

$$\vec{F} = -e_o \vec{v} \times \vec{B}$$

Esta fuerza desvía los electrones hacia el eje Z negativo. Como consecuencia de ello aparece una carga negativa en la parte inferior y otra positiva en la superior, o lo que es lo mismo un campo eléctrico designado por E_Z, el cual, una vez establecido, permite a los electrones seguir moviéndose en la dirección del eje Y negativo. Al existir ese campo E_Z se establece una diferencia de potencial entre las caras superior e inferior de la barra. Sea n el número de electrones que existen en el material de la barra por unidad de volumen. Consideremos un tiempo Δt, todos los electrones con velocidad v se encuentran en el prisma de altura $v\Delta t$ y superficie S = bc (ver figura 1)

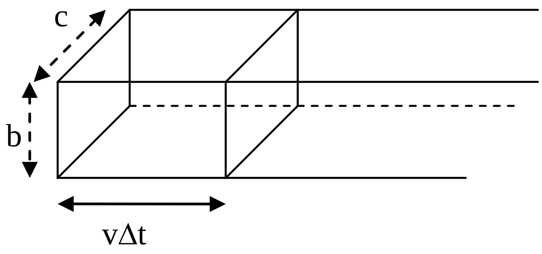


Fig. 1

La carga, en valor absoluto en ese prisma, es: $e_o nSv\Delta t = e_o nbcv\Delta t$. Toda esta carga atraviesa la superficie bc en el tiempo Δt, por tanto, la intensidad de la corrientes vale

$$I = \frac{Q}{\text{tiempo}} = \frac{e_o nbcv\Delta b}{\Delta t} = e_o nbcv$$

A partir de la anterior ecuación obtenemos el valor de v y calculamos la componente Ey del campo

$$v = \frac{I}{e_o nbc} = \frac{1}{1{,}6.10^{-19} * 2{,}5.10^{22} * 1.10^{-2} * 1.10^{-3}} = 25 \ \frac{m}{s}$$

$$v = \mu E_Y \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{v}{\mu} = \frac{25}{7{,}8} = 3{,}2 \ \frac{V}{m}$$

Cuando se ha establecido el campo E_Z y los electrones se desplazan a lo largo del eje Y negativo, se produce el equilibrio de fuerzas entre el campo magnético y el campo eléctrico

$$e_o vB = e_o E_Z \quad \Rightarrow \quad E_Z = vB = 25 * 0{,}1 = 2{,}5 \ \frac{V}{m}$$

$$E_T = \sqrt{3{,}2^2 + 2{,}5^2} = 4{,}1 \ \frac{V}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \text{tag}\varphi = \frac{E_Z}{E_Y} = \frac{2{,}5}{3{,}2} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 38^o$$

b) La diferencia de potencial entre las caras:

$$\Delta V = E_Z * b = 2{,}5 * 1.10^{-2} = 0{,}025 \ \text{V}$$

c) Cuando la corriente y el campo son alternos, obtenemos la velocidad de los electrones y las componentes del campo con el mismo procedimiento, utilizando los valores instantáneos

$$v = \frac{I_o \mathrm{sen}\omega\ t}{n e_o b c} \qquad \Rightarrow \qquad E_Y = \frac{I_o \mathrm{sen}\omega\ t}{n e_o b c \mu}$$

$$E_Z = \frac{I_o \mathrm{sen}\omega\ t}{n e_o b c} B_o \mathrm{sen}(\omega\ t + \delta) \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{I_o B_o}{n e_o c} \mathrm{sen}\omega\ t * \mathrm{sen}(\omega\ t + \delta)$$

$$\Delta\overline{V} = \frac{I_o B_o}{n e_o c}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}\omega\ t * \mathrm{sen}\ (\omega\ t + \delta)\right]$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\mathrm{sen}^2\omega\ t * \cos\delta + \mathrm{sen}\omega\ t * \cos\omega\ t * \mathrm{sen}\delta\mathrm{en}\delta = \frac{1}{T}\cos\delta\int_0^T dt - \frac{1}{T}\cos\delta\int_0^T \cos^2(\omega\ t)\ dt +$$

$$+\frac{\mathrm{sen}\delta}{2T}\int_0^T \mathrm{sen}(2\omega\ t)\ dt = \cos\delta - \frac{1}{T}\cos\delta\int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega\ t)dt + \frac{\mathrm{sen}\delta}{4\omega\omega}\left[-\cos 2\omega\ t\right]_0^T =$$

$$= \cos\delta - \frac{1}{T}\cos\delta * \frac{T}{2} + \frac{1}{T2\omega}\cos\delta\left[\mathrm{sen}2\omega\ t\right]_0^T + \frac{\mathrm{sen}\delta}{4\omega\omega}\left[-\cos\frac{4\pi}{T} * T + \cos 0\right] =$$

$$= \frac{\cos\delta}{2} + \frac{1}{T2\omega}\cos\delta\left[\mathrm{sen}\frac{4\pi}{T} * T - \mathrm{sen}0\right] + 0 = \frac{\cos\delta}{2}$$

$$\Delta\overline{V} = \frac{I_o B_o}{n e_o c}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sen}\omega\ t * \mathrm{sen}\ (\omega\ t + \delta)\right] = \frac{I_o B_o}{n e_o c}\frac{\cos\delta}{2}$$

3.-En un proyecto de investigación espacial existen dos propuestas para el lanzamiento de una sonda fuera del sistema solar. La primera (i) es lanzar la sonda con una velocidad suficiente para que escape del sistema solar directamente. La segunda (ii) es que la sonda se aproxime a un planeta más externo y con su ayuda cambie su dirección de movimiento y alcance la velocidad suficiente para que escape del sistema solar. Se supone que la sonda se desplaza bajo el campo gravitacional de solamente el Sol o el planeta dependiendo de cuál sea el campo más intenso en aquel punto.

a) Determinar la velocidad mínima y su dirección relativa al movimiento de la Tierra que debe proporcionarse a la sonda para lanzarla según el esquema (I)

b) Suponer que la sonda se ha lanzado en la dirección determinada en a) pero con otra velocidad. Determinar la velocidad de la sonda cuando cruce la órbita de Marte, esto es, sus componentes paralela y perpendicular respecto de esa órbita. El planeta Marte no se encuentra cerca del punto de cruce en el momento que éste se verifica.

c) Ahora suponemos que la sonda penetra en el campo gravitacional de Marte. Encontrar la mínima velocidad de lanzamiento desde la Tierra para que la sonda abandone el sistema solar.
Ayuda. A partir del resultado encontrado en a) se conoce la magnitud óptima y la dirección de la velocidad de la sonda que es necesaria para escapar del sistema solar y abandonar el campo gravitacional de Marte. (No se preocupe de la posición precisa de Marte durante el encuentro)
Encontrar la relación entre esta velocidad y las componentes de la velocidad antes de que la sonda entre en el campo gravitatorio de Marte(esto es, las componentes que se determinaron en el apartado b) .
¿Qué hay acerca de la conservación de la energía en la sonda?

d) Calcular el máximo posible de ahorro de energía en la propuesta (II) respecto de la (i) ,respecto a la propuesta (i)
Notas. Se supone que todos los planetas se mueven en círculos alrededor del Sol, con la misma dirección y en el mismo plano. Se desprecian la resistencia del aire, la rotación de la Tierra alrededor de su eje asi como la energía utilizada en escapar del campo gravitatorio terrestre
La velocidad de la Tierra alrededor del Sol es 30 km/s y la razón de las distancias de la Tierra y de Marte respecto del Sol es 2/3.

a) En algunos libros de Mecánica se define una velocidad de escape como la que debe comunicarse a un cuerpo a una distancia igual al radio orbital de la Tierra alrededor del

Sol para que dicho cuerpo pueda abandona el sistema solar. Para que esto ocurra la velocidad mínima tiene que ser tal que la energía cinética, en este caso de la sonda, sea igual a la potencial del Sol

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = G\frac{Mm}{R_T} \quad \Rightarrow \quad v_a^2 = \frac{2GM}{R_T} \quad (1)$$

m es la masa de la sonda , M la del Sol, R_T el radio de la órbita terrestre.
Como en el problema el dato que nos dan es la velocidad de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, la fuerza centrípeta entre la Tierra y el Sol es precisamente la fuerza de atracción gravitatoria

$$G\frac{MM_T}{R_T^2} = M_T\frac{v_T^2}{R_T} \quad \Rightarrow \quad v_T^2 = G\frac{M}{R_T} \quad (2)$$

A partir de las ecuaciones (1) y (2)

$$v_a = \sqrt{2}v_T = 42 \ \text{km/s}$$

Para alcanzar la velocidad anterior tenemos que sumar a la velocidad orbital de la sonda, que es la de la Tierra, una velocidad respecto de la Tierra v'_s. Ambas velocidades deben tener la misma dirección y sentido para que v'_a sea mínima.

$$v_a = v_T + v'_a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}v_T = v_T + v'_a \Rightarrow \quad v'_a = \left(\sqrt{2}-1\right) v_T = 12{,}4 \ \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

b) Ahora v'_b representa la velocidad comunicada en la Tierra a la sonda, la velocidad respecto del Sol es

$$v_B = v'_b + v_T$$

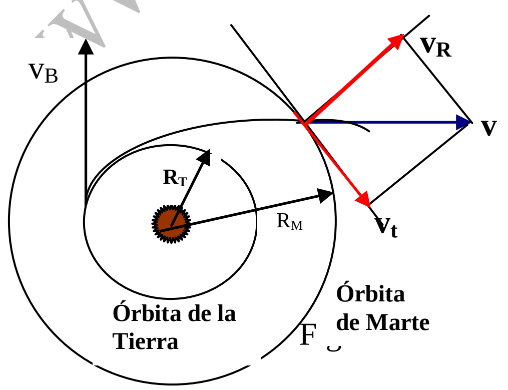


Fig. 1

En la figura 1 se indica la situación del Sol de la sonda respecto de él y la orbita de Marte

La sonda al desplazarse conserva su momento angular y su energía

$$mv_B R_T = mv_t R_M \quad (3) \quad ; \qquad \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{1}{2}m\left(v_R^2 + v_t^2\right) - \frac{GMm}{R_M} \quad (4)$$

De la ecuación (3) se deduce $v_t = v_B \frac{R_T}{R_M} = \left(v'_b + v_T\right)\frac{R_T}{R_M} = \left(v'_b + 30\right)\frac{2}{3}$

A partir de la (4)

$$\frac{1}{2}\left(v'_b + v_T\right)^2 - GM\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right) = \frac{1}{2}\left(v_R^2 + v_t^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(v'_b + v_T\right)^2 - v_T^2 R_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M}\right) = \frac{1}{2}\left(v_R^2 + v_t^2\right) \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(v'_b + v_T\right)^2 - v_T^2\left(1 - \frac{R_T}{R_M}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(v_R^2 + v_t^2\right) \Rightarrow \left(v'_b + v_T\right)^2 - 2v_T^2\left(1 - \frac{R_T}{R_M}\right) = \left(v_R^2 + v_t^2\right) \Rightarrow v_R^2 = \left(v'_b + v_T\right)^2 -$$

$$2v_T^2\left(1 - \frac{R_T}{R_M}\right) - \left(v'_b + v_T\right)^2\left(\frac{R_T}{R_M}\right)^2 \Rightarrow v_R = \sqrt{\left(v'_b + v_T\right)^2\left(1 - \left(\frac{R_T}{R_M}\right)^2\right) - 2v_T^2\left(1 - \frac{R_T}{R_M}\right)} =$$

$$v_R = \sqrt{\left(v'_b + 30\right)^2 * \frac{5}{9} - 600}$$

c) Designamos con v'_m la velocidad de la sonda en el campo de Marte para que pueda salir del sistema solar. Según lo calculado en el apartado a)

$$v'_m = \left(\sqrt{2} - 1\right)v_M$$

Siendo v_M la velocidad del planeta Marte en su orbita alrededor del Sol. Para calcular esta velocidad hacemos uso de que la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y Marte es la fuerza centrípeta que necesita el planeta parta girar alrededor del Sol

$$G\frac{MM_M}{d_{SM}^2} = \frac{M_M v_M^2}{d_{SM}} \Rightarrow v_M^2 = \frac{GM}{d_{SM}} = \frac{v_T^2 d_{ST}}{d_{SM}} = \frac{2}{3}v_T^2$$

$$v'_m = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{2}{3}v_T^2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{2}{3} * 30^2} = 10{,}1 \ \frac{km}{s}$$

En este apartado se pide la velocidad mínima de lanzamiento desde la Tierra.

Desde Marte la velocidad de la sonda tiene dos componentes una radial y otra tangencial. La componente tangencial vista desde Marte es igual a la velocidad tangencial de la sonda menos la velocidad de Marte y la componente radial es la de la sonda, por tanto:

$$v'_m = \sqrt{v_R^2 + (v_t - v_M)^2}$$

Si en la ecuación anterior llevamos los valores obtenidos en el apartado b)

$$10{,}1^2 = (v'_b + 30)^2 * \frac{5}{9} - 600 + \left((v'_b + 30)\frac{2}{3} - v_T\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$102 = (v'_b + 30)^2 * \frac{5}{9} - 600 + \left((v'_b + 30)\frac{2}{3} - 24{,}49\right)^2$$

Una forma cómoda de calcular v'_b, es por tanteo dando valores a v'_b y encontrar el que se aproxima a 102

Si v'_b = 4 km/s	102 >45,5
Si v'_b = 5 km/s	102 >81,9
Si v'_b = 6 km/s	102 <120
Si v'_b = 5,5 km/s	102 >100,8
Si v'_b = 5,6 km/s	102 <104,7
Si v'_b = 5,55 km/s	102 <102,7
Si v'_b = 5,54 km/s	102 <102,3

Podemos dar como valor aproximado de la velocidad 5,5 km /s

d) Gasto de energía en la propuesta (I) $\frac{1}{2}m*12{,}4^2$

Gasto de energía en la propuesta (II) $\frac{1}{2}m*5{,}5^2$

$$\frac{\frac{1}{2}m*12{,}4^2 - \frac{1}{2}m*5{,}5^2}{\frac{1}{2}m*12{,}4^2} = 0{,}80$$