

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

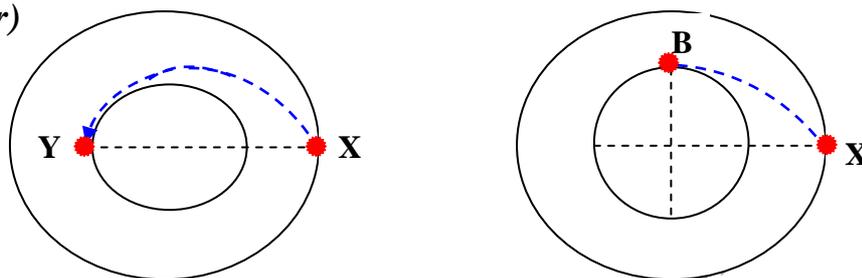
**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## 11ª OLIMPIADA DE FÍSICA. UNIÓN SOVIÉTICA. 1979

1.-Una nave espacial de masa  $m = 12$  toneladas da vueltas alrededor de la Luna a una altura de 100 km, describiendo una órbita circular. Con objeto de que llegue a la Luna, un motor de propulsión se conecta en un punto X durante un corto periodo de tiempo. La velocidad de escape de los gases es  $u = 10^4$  m/s con relación a la nave espacial. El radio de la Luna es 1700 km y la aceleración de la gravedad en su superficie  $g = 1,7$  m/s<sup>2</sup>.

La nave espacial puede alcanzar la Luna por dos métodos diferentes (fig. inferior)



a) Alcanzando a la Luna en el punto Y opuesto al X, después que el motor de propulsión haya actuado lanzando los gases en la dirección y sentido de la nave b) tocando la Luna tangencialmente en el punto B después de que el motor haya impulsado a la nave en dirección del centro de la Luna. Calcular la cantidad de combustible gastado en cada caso.

11ª Olimpiada Internacional de Física. Unión Soviética 1979.

a) Para calcular la velocidad que tiene la nave en la órbita circular hacemos uso de que la fuerza centrípeta es precisamente la fuerza de atracción gravitatoria entre la Luna y la nave

$$G \frac{Mm}{(R+h)^2} = \frac{mv_0^2}{R+h} \Rightarrow v_0^2 = \frac{GM}{R+h} \quad ; \quad \text{como} \quad \frac{GM}{R^2} = g \Rightarrow$$

$$v_0 = R \sqrt{\frac{g}{R+h}} = 1700 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{1,7}{(1700+100) \cdot 10^3}} = 1652 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Al actuar el motor se frena la nave y pasa a describir una órbita que pasa tangencialmente por el punto Y. Las velocidades en los puntos X e Y son respectivamente  $v_X$  e  $v_Y$ . (En la figura 1 se ha hecho un esquema de la situación, no está a escala).

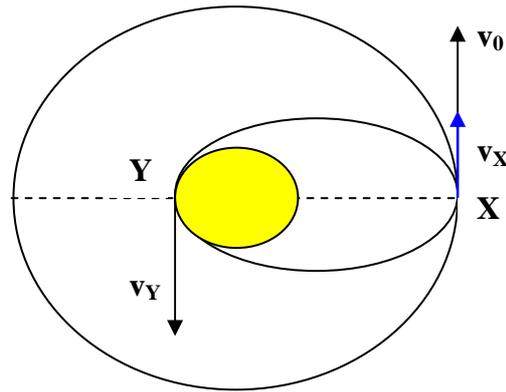
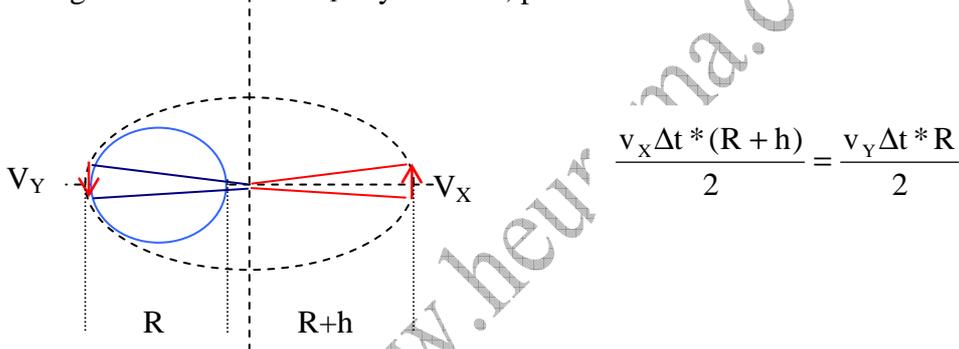


Fig. 1

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre los dos puntos y el teorema de las áreas: Admitimos que en un tiempo muy pequeño  $\Delta t$  el área barrida en X es un triángulo de base  $v_X \Delta t$  y altura  $R+h$ . En el mismo tiempo y en el lado Y el triángulo tiene de base  $v_Y \Delta t$  y altura  $R$ , por tanto:



$$\frac{1}{2} m v_X^2 - G \frac{Mm}{R+h} = \frac{1}{2} m v_Y^2 - G \frac{Mm}{R} \quad (1) \quad , \quad v_X(R+h) = v_Y R \quad (2)$$

Si se opera con las ecuaciones (1) y (2) y además se utiliza la ecuación  $g = GM/R^2$ , se llega a:

$$v_X = \sqrt{\frac{2gR^4h}{(R+h)[(R+h)^2 - R^2]}} = \sqrt{\frac{2 * 1,7 * (1700 \cdot 10^3)^4 * 100 \cdot 10^3}{(1800 \cdot 10^3) [(1800 \cdot 10^3)^2 - (1700 \cdot 10^3)^2]}} = 1628 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v_Y = \frac{v_X(R+h)}{R} = \frac{1628 * 1800}{1700} = 1724 \frac{m}{s}$$

En la figura 2 se observa la nave espacial que en un determinado instante lleva la velocidad  $v_0 = 1652 \text{ m/s}$ , los gases son expulsados en la misma dirección y en el mismo sentido con una velocidad relativa respecto de la nave  $u$

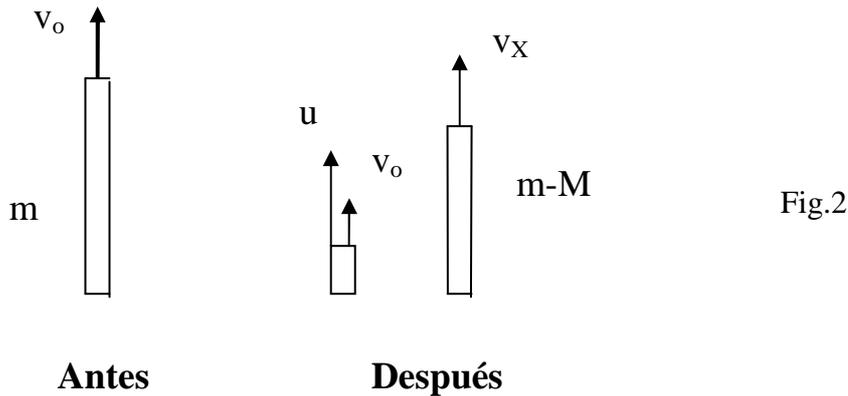


Fig.2

Antes de funcionar el motor la nave tiene una masa  $m$  y una velocidad  $v_0$ . Después de funcionar el motor la nave tiene una masa  $m-M$ , siendo  $M$  la masa de gases expulsados. Si aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento resulta:

$$mv_0 = (m-M)v_x + Mu + Mv_0 \Rightarrow M = \frac{m(v_0 - v_x)}{u + v_0 - v_x} = \frac{12 \cdot 10^3 (1652 - 1628)}{10^4 + 1652 - 1628} = 28,7 \text{ kg}$$

b) En la figura 3 se da un esquema, no a escala, del proceso.

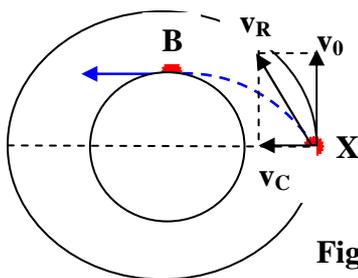


Fig. 3

$$v_R = \sqrt{v_0^2 + v_c^2} \quad (3)$$

$v_0$  es la velocidad de la nave en su órbita circular,

$v_v$  representa la velocidad de la nave en el punto B de la figura 3

$v_R$  la velocidad de la nave en el punto X, después de funcionar el motor de propulsión.

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre los dos puntos y el teorema de las áreas:

$$\frac{1}{2}mv_R^2 - G\frac{Mm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_v^2 - G\frac{Mm}{R} \quad (4) \quad , \quad v_v R = v_0(R+h) \quad (5)$$

A partir de las ecuaciones (3), (4) y (5) se llega a

$$v_v^2 - v_0^2 - v_c^2 = 2GM\frac{h}{(R+h)R} \quad ; \quad v_c^2 = v_0^2 \left[ \frac{(R+h)^2}{R^2} - 1 \right] - 2GM\frac{h}{(R+h)R}$$

y con la relación  $g = GM/R^2$ , resulta finalmente

$$v_C = \sqrt{v_o^2 \left[ \frac{(R+h)^2 - R^2}{R^2} \right] - \frac{2gRh}{R+h}} = \sqrt{1652^2 \left[ \frac{1800^2 - 1700^2}{1700^2} \right] - \frac{2 * 1,7 * 1700 * 10^3 * 100 * 10^3}{1800 * 10^3}} = 97 \frac{m}{s}$$

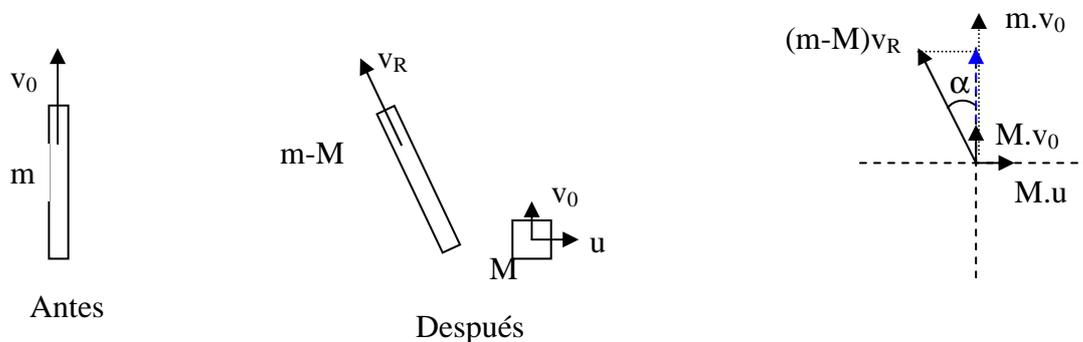


Fig. 4

$$v_R = \sqrt{v_o^2 + v_C^2} = \sqrt{1652^2 + 97^2} = 1655 \frac{m}{s}$$

Para impulsar la nave hacia el centro de la Luna los gases del motor deben actuar como indica la fig. 4.

Si aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento sobre los ejes coordenados resulta:

$$mv_o = (m-M)v_R \cos \alpha + Mv_o \quad (6) \quad , \quad (m-M)v_R \sin \alpha = Mu \quad (7)$$

De la ecuación (6) se deduce  $v_o = v_R \cos \alpha$  (8) y de ésta elevándola al cuadrado y sumándola a la (7) también elevada al cuadrado, da como resultado:

$$\left( \frac{M}{m-M} \right)^2 u^2 = v_R^2 \sin^2 \alpha \quad ; \quad v_o^2 = v_R^2 \cos^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{M}{m-M} \right)^2 u^2 + v_o^2 = v_R^2$$

$$\frac{M}{m-M} * u = \sqrt{v_R^2 - v_o^2} = \sqrt{1655^2 - 1652^2} = 99,6 \quad \Rightarrow$$

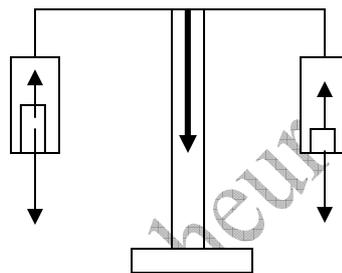
$$Mu + 99,6M = 99,6m \quad \Rightarrow \quad M = 118 \text{ kg}$$

2.- La masa de una pieza de aluminio se mide primero en aire seco y después en aire húmedo con una presión parcial del vapor de agua de 15,2 mm de mercurio. Las pesas utilizadas son de latón. La presión atmosférica es 760 mm Hg y la temperatura es la misma en los dos casos. Si la balanza tiene una precisión de 0,1 mg, ¿cuál es la masa de aluminio a partir de la cual ya es posible detectar una diferencia de peso en ambos casos?

Datos : Densidad del aluminio  $2,7 \text{ g/cm}^3$ , densidad del latón  $8,5 \text{ g/cm}^3$ , densidad del aire a la temperatura del experimento  $0,0012 \text{ g/cm}^3$ , densidad del vapor de agua  $0,00075 \text{ g/cm}^3$

11ª Olimpiada Internacional de Física. Unión Soviética 1979.

Cuando se hace una pesada se coloca en un platillo de la balanza el objeto de aluminio y en el otro las pesas de latón, hasta lograr que la balanza se encuentre en equilibrio. El valor del peso del objeto de aluminio se determina contando las pesas de latón.



$N$  representa el volumen en  $\text{cm}^3$  del objeto de aluminio situado en el platillo izquierdo de la balanza.  $V_L$  representa el volumen de las pesas de latón colocadas en el platillo de la derecha cuando la pesada se hace en aire seco.

Sobre el objeto de aluminio actúa su peso y el empuje del aire y sobre las pesas de latón el peso de éstas y el empuje del aire. Al estar la balanza equilibrada se cumple:

$$N \cdot 2,7 \cdot g - N \cdot \rho_{AS} \cdot g = V_L \cdot 8,5 \cdot g - V_L \cdot \rho_{AS} \cdot g \quad (1)$$

$\rho_{AS} = 0,0012 \text{ g/cm}^3$  es la densidad del aire seco que es un dato del problema

Cuando del mismo objeto de aluminio se hace la pesada en aire húmedo,  $N$  es el mismo que antes,  $V_{LL}$  es el volumen de las pesas de latón y se cumple

$$N \cdot 2,7 \cdot g - N \cdot \rho_{AH} \cdot g = V_{LL} \cdot 8,5 \cdot g - V_{LL} \cdot \rho_{AH} \cdot g \quad (2)$$

$\rho_{AH}$  es la densidad del aire húmedo que es preciso calcular a partir de los datos suministrados.

Para calcular la densidad del aire humedo supongamos que  $V$  representa el volumen de aire humedo a la temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$  y a la presión de  $760\text{ mm}$ . Imaginemos que las moléculas de aire se separan por un lado ocupando un volumen  $V_1$  en las mismas condiciones de presión y temperatura ( $760\text{ mm}$  y  $20^{\circ}\text{C}$ ) y por otro lado las de vapor de agua ocupando un volumen  $V_2$  en las mismas condiciones.

Se cumple que  $V = V_1 + V_2$  y de acuerdo con la ecuación de los gases  $760 \cdot V_2 = 15,2 \cdot V$   
La densidad del gas humedo es .

$$\rho_{\text{AH}} = \frac{g(\text{vapor de agua}) + g(\text{de aire seco})}{V} = \frac{\rho(\text{vapor de agua}) \cdot V_2 + \rho(\text{aire seco}) \cdot V_1}{V} =$$

$$= \frac{\rho(\text{vapor de agua}) \cdot \frac{15,2 \cdot V}{760} + \rho(\text{aire seco}) \cdot \left( V - \frac{15,2 \cdot V}{760} \right)}{V}$$

$$\rho_{\text{AH}} = \rho(\text{vapor de agua}) \cdot \frac{15,2}{760} + \rho(\text{aire seco}) \cdot \left( \frac{760 - 15,2}{760} \right) = 0,00075 \cdot \frac{15,2}{760} + 0,0012 \cdot \frac{745}{760}$$

$$\rho_{\text{AH}} = 1,19 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

De las ecuaciones (1) y (2) despejamos  $V_L$  y  $V_{LL}$  respectivamente y sustituimos por los valores numéricos de las densidades

$$V_L = \frac{N(2,7 - 0,0012)}{8,5 - 0,0012} \quad ; \quad V_{LL} = \frac{N(2,7 - 0,0019)}{8,5 - 0,00119}$$

$(V_{LL} - V_L) \cdot 8,5$  es la diferencia de peso encontrada entre las dos pesadas. Teniendo en cuenta que la balanza tiene una precisión de  $10^{-4}\text{ g}$ , para que se pueda apreciar alguna diferencia entre las pesadas se cumplirá a partir de que  $(V_{LL} - V_L) \cdot 8,5$  sea igual o mayor que  $10^{-4}\text{ g}$ .

$$\left[ \frac{N(2,7 - 0,0019)}{8,5 - 0,00119} - \frac{N(2,7 - 0,0012)}{8,5 - 0,0012} \right] \cdot 8,5 = 10^{-4} \quad ; \quad N = 14,7 \text{ cm}^3$$

En resumen se encontrará alguna diferencia de peso cuando el objeto de aluminio tenga un volumen mayor de  $14,7\text{ cm}^3$  o una masa mayor de  $14,7\text{ cm}^3 \cdot 2,7\text{ (g/cm}^3) = 40\text{ g}$

3.- Con la ayuda de un telescopio que tiene un espejo parabólico cóncavo de diámetro  $D = 2,6 \text{ m}$ , se envía a la Luna un rayo láser de longitud de onda  $\lambda = 0,69 \mu\text{m}$ . El rayo se refleja mediante un espejo plano de  $d = 20 \text{ cm}$  de diámetro situado en la Luna.

Los rayos reflejados inciden exactamente sobre el espejo situado en la Tierra. Una célula fotoeléctrica intercepta la luz en el foco del espejo del telescopio. La distancia de la Tierra a la Luna es  $L = 380\,000 \text{ km}$  calcular a) La exactitud con la que el ángulo del telescopio se debe ajustar en esa dirección b) ¿Qué parte de la energía inicial intercepta la célula (despreciando las pérdidas)? c) Si la energía de cada impulso emitido es  $1 \text{ julio}$  ¿cuántos fotones alcanzarán un ojo humano, sin utilizar instrumentos ópticos? El diámetro de la pupila del ojo es de  $5 \text{ mm}$  d) ¿Cuánta energía llegaría a la célula si no hubiera espejo en la Luna? Admitir que la superficie lunar refleja el 10% de la luz incidente uniformemente en todas las direcciones.

Datos : Constante de Planck ,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  , velocidad de la luz  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

11ª Olimpiada Internacional de Física. Unión Soviética 1979.

a) La intensidad de la difracción viene dada por la expresión

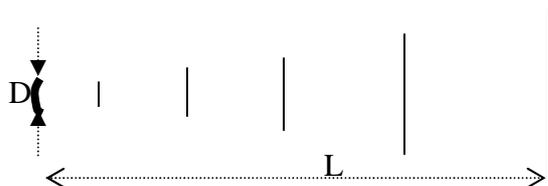
$$I_{\theta} = I_m \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$$

cuando  $\alpha = \pi$  , el valor de  $I_{\theta}$  es nulo, y de ahí se deduce que

$$\pi = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta, \quad \sin \theta \approx \theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{0,69 \cdot 10^{-6}}{2,6} = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

Luego si el espejo parabólico se desvía un ángulo de  $2,7 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$ , al espejo situado en la Luna no le llega nada de luz.

b) Si se consulta el libro Ondas ( Berkeley Physics Course, volumen 3 ) en la página 503 y siguientes se explica que un haz de luz emitido por un espejo parabólico perfecto el ancho del haz aumenta conforme se observa a una distancia mayor del espejo. Si  $D$  representa el ancho inicial que coincide aproximadamente con el diámetro del espejo



Al llegar dicho haz a la Luna tiene un diámetro de

$$W = L \frac{\lambda}{D} = 380 \cdot 10^6 \frac{0,69 \cdot 10^{-6}}{2,6} = 101 \text{ m}$$

y abarca una superficie de  $S = \pi \frac{W^2}{4} = 8000 \text{ m}^2$

Admitiendo que la intensidad luminosa es constante en esa área (situación que no es cierta), el espejo de la Luna recibe una energía respecto a la emitida en la Tierra por el espejo parabólico de

$$E_L = E_T \frac{\text{Superficie del espejo lunar}}{\text{Superficie del haz de luz en la luna}} = E_T \frac{\pi \frac{(20 \cdot 10^{-2})^2}{4}}{8000} = 3,9 \cdot 10^{-6} E_T$$

El espejo situado en la Luna reemite hacia la Tierra el haz luminoso que debido a la difracción se ensancha en un valor de

$$W_1 = L \frac{\lambda}{d} = 380 \cdot 10^6 \frac{0,69 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-2}} = 1311 \text{ m}$$

y a una superficie de

$$S_1 = \pi \frac{W_1^2}{4} = 1,35 \cdot 10^6 \text{ m}^2$$

Admitiendo que la distribución de energía es constante, al espejo parabólico llegaría

$$\frac{3,9 \cdot 10^{-6} E_T}{1,35 \cdot 10^6} = \frac{E_{T1}}{\pi \frac{2,6^2}{4}} \quad ; \quad E_{T1} = 1,53 \cdot 10^{-11} E_T$$

c) Si cada pulso es de un julio, la energía que llega a la Tierra después de reflejarse en el espejo de la Luna es :

$$\frac{3,9 \cdot 10^{-6}}{1,35 \cdot 10^6} = \frac{E_P}{\pi \frac{d_P^2}{4}} ; E_P = \frac{3,9 * \pi * (5 \cdot 10^{-3})^2}{4 * 1,35} * 10^{-12} = 5,67 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

La energía de cada fotón es  $h\nu = h(c/\lambda)$ , luego los fotones que llegan al ojo son :

$$N = \frac{5,67 \cdot 10^{-17}}{6,6 \cdot 10^{-34} * \frac{3 \cdot 10^8}{0,69 \cdot 10^{-6}}} \approx 200 \text{ fotones}$$

Si no hay pérdidas de energía la Luna reemite al espacio  $0,1 E_T$  en todas las direcciones. El ángulo sólido completo son  $4\pi$  estereorradianes. Dado que la emisión de la Luna se emite hacia el espacio exterior desde su superficie, toda la energía emitida se hace bajo un ángulo sólido de  $2\pi$  estereorradianes. La radiación interceptada en la Tierra corresponde al valor del ángulo sólido bajo el que se ve la superficie parabólica del espejo desde la Luna, esto es:

$$\Omega = \frac{S}{L^2} = \frac{\pi D^2}{4L^2}$$

La energía interceptada es:

$$\frac{0,1E}{2\pi} = \frac{E_{1T}}{\frac{\pi D^2}{4L}}; E_{1T} = \frac{0,1ED^2}{8L^2} = \frac{0,1E * 2,6^2}{8 * (380.10^6)^2} = 5,9.10^{-18} E$$