

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

1ª OLIMPIADA DE FÍSICA. POLONIA . 1967

1.- Una pelota de masa $m = 0,2 \text{ kg}$ está apoyada sobre una columna vertical de altura $h = 5 \text{ m}$. Una bala de masa $m = 0,01 \text{ kg}$ y velocidad paralela al suelo $v_0 = 500 \text{ m/s}$, atraviesa la pelota y ésta toca el suelo a una distancia $s = 20 \text{ m}$ de la base de la columna. a) Calcular la distancia entre el impacto de la bala con el suelo y la base de la columna b) ¿qué fracción de la energía cinética de la bala se transfiere como calor a la propia bala? 1ª Olimpiada de Física. Polonia 1967

a) Consideremos el sistema formado por la bala y la pelota. Antes del impacto y después de él, se conserva la cantidad de movimiento:

Antes: mv_0 , después: $mv + MV$; $mv_0 = mv + MV$ (1)

v es la velocidad de la bala inmediatamente después de atravesar la pelota, V es la velocidad de la pelota justamente después de ser atravesada por la bala.

Cuando la pelota abandona la columna describe una trayectoria parabólica. Tomando como origen de referencia la columna y el eje Y en sentido vertical y dirigido hacia abajo, las ecuaciones de la trayectoria de la pelota son:

$$\left. \begin{array}{l} x = Vt \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \right\} y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V^2} \quad (2)$$

Cuando la pelota llegue al suelo su coordenada y es igual a $h = 5 \text{ m}$, siendo $x = s = 20 \text{ m}$. De la ecuación (2) se deduce el valor de V

$$V = \sqrt{\frac{gx^2}{2y}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 20^2}{2 \cdot 5}} = 19,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sustituyendo valores numéricos en la ecuación (1)

$$0,01 \cdot 500 = 0,01 v + 0,2 \cdot 19,8; v = 104 \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación (2) para la bala

$$x = \sqrt{\frac{2yv^2}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 104^2}{9,8}} = 105 \text{ m}$$

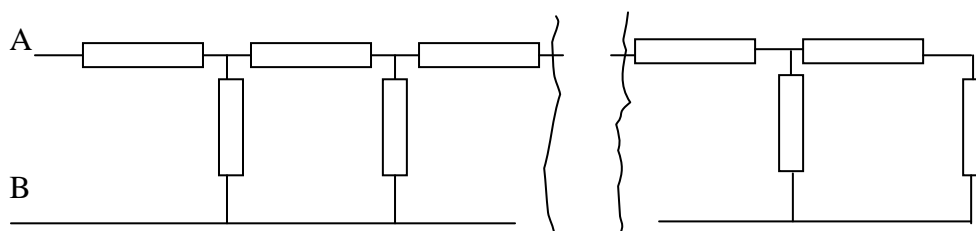
b) La energía cinética de la bala antes y después del impacto con la pelota son:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 500^2 = 1250 \text{ J}; \quad E_{c2} = \frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot 104^2 = 54 \text{ J}$$

La energía cinética de la pelota es $E_c = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 19,8^2 = 40 \text{ J}$

En otras formas de energía aparecen $1250 - (54 + 40) = 1156 \text{ J}$, que supone el $(1156 \cdot 100 / 1250) = 93\%$ de la energía

2.- En la figura inferior tenemos una malla formada por infinitas resistencias, cada una de valor r ¿Cuál es la resistencia resultante entre A y B? 1ª Olimpiada de Física. Polonia 1967



Supongamos que la malla no es infinita sino que consta de 8 resistencias en total. En la terminación de la malla las dos últimas resistencias se encuentran en serie, por tanto su resistencia equivalente es $2r$, a su vez esta resistencia equivalente se encuentra en paralelo con otra resistencia r , con lo cual la equivalente es :

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \quad ; \quad r_e = \frac{2}{3}r$$

Esta resistencia equivalente se encuentra en serie con otra de valor r y la equivalente es $2/3 r + r = 5/3 r$, ésta se encuentra en paralelo con otra de valor r y la equivalente es .

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{3}{5r} = \frac{8}{5r} \quad ; \quad r_e = \frac{5r}{8}$$

Siguiendo el cálculo tenemos ahora una resistencia $5/8 r + r = 13/8 r$, que se encuentra en paralelo con otra r

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r} + \frac{8}{13r} = \frac{21}{13r} \quad ; \quad r_e = \frac{13r}{21}$$

Finalmente la resistencia entre A y B sería

$$R_{AB} = r + \frac{13}{21}r = r \left(1 + \frac{13}{21} \right)$$

Observemos la secuencia de cálculo: $2/3$; $5/8$; $13/21$ El numerador de una fracción se obtiene sumando el numerador y denominador de la anterior y el denominador se obtiene sumando el numerador obtenido con el denominador de la anterior, esto nos permite escribir que si x_{n-1} es el numerador del penúltimo término e y_{n-1} el denominador, el último término es:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{(x_{n-1} + y_{n-1}) + y_{n-1}} = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + 2y_{n-1}}$$

Si la serie obtenida tiene un límite la diferencia entre los dos últimos términos debe ser nula

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \quad ; \quad \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + 2y_{n-1}} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0 \quad ; \quad \frac{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 1}{\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + 2} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = 0$$

Si en la ecuación anterior hacemos $\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = a$, resulta.

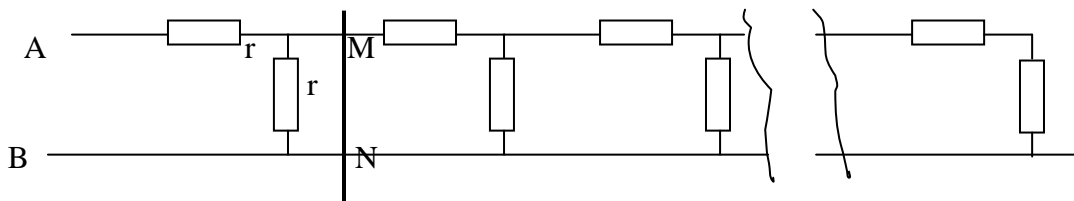
$$a = \frac{a+1}{a+2} \quad , \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad , \quad \text{resolviendo} \quad : a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Si se considera la solución positiva resulta para el último término

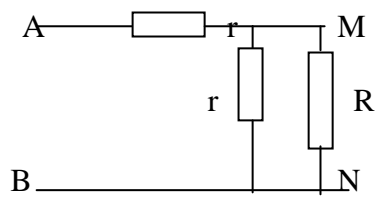
$$\frac{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$R_{AB} = r \left(1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right) = r \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Una manera más rápida de resolver este problema se basa en que en un circuito de infinitos términos no se altera el valor de su resistencia al añadir uno más o quitarlo.



Sea R la resistencia equivalente a todas las que están a la derecha de la línea MN. El circuito equivalente es el inferior, que también tiene una resistencia R



La resistencia del circuito inferior es:

$$R = r + \frac{rR}{r+R} \Rightarrow R^2 - rR - r^2 = 0 \Rightarrow R = r \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

www.heurema.com