7.- El periodo de semidesintegración del ^{238}U es 4,51.10^{9} años. La serie de su desintegración finaliza en el ^{206}Pb, un núcleo estable. En el análisis de un mineral se encuentra que la relación entre los átomos de ^{206}Pb a los átomos de ^{238}U es 0,0058.
Si se admite que todos los átomos de ^{206}Pb se producen por la descomposición del ^{238}U y que los periodos de semidesintegración de los otros átomos que se forman en la serie de desintegración son despreciables, determinar con esta condición la edad del mineral.
Olimpiada de Suiza 1997

Designamos con N_o a los átomos de uranio que existen en el tiempo t =0 y con N a los que existen cuando t = t.
Ambos números están relacionados por la ecuación

$$N = N_o e^{-\lambda t} \quad (1)$$

De acuerdo con el enunciado podemos escribir el siguiente proceso:

	^{238}U	$\rightarrow$	^{206}Pb
Número de átomos cuando t = 0,	N_o		0
Número de átomos cuando t = t	N		$N_o - N$

Para hallar la constante λ de la expresión (1) hacemos uso del periodo de semidesintegración , que es el tiempo que transcurre para que los átomos de una muestra radiactiva se reduzca a la mitad.

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{0,5}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\lambda t_{0,5} \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{t_{0,5}} = -\frac{-0,693}{4,51.10^{9}} = 1,54.10^{-10} \text{ año}^{-1}$$

$$\frac{N_o - N}{N} = 0,0058 \Rightarrow \frac{N_o}{N} = 1,0058 \Rightarrow \frac{N_o}{N_o e^{-\lambda T}} = 1,0058 \Rightarrow e^{\lambda T} = 1,0058 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda T = \ln 1,0058 \Rightarrow T = \frac{\ln 1,0058}{1,54.10^{-10}} = 3,8.10^{7} \text{ años}$$

8.-El cañón de un fusil tiene una longitud de 55 cm y un diámetro de 3,5 mm, los primeros diez centímetros del cañón están llenos de aire a la presión de 60.10^5 Pa y a una temperatura de 20ºC. Si esa masa de aire se expande muy rápidamente consigue impulsar un proyectil de masa 2g fuera del cañón.

a) Calcular la temperatura y presión del aire cuando el proyectil abandona el cañón

b) Encontrar la velocidad de salida del proyectil, suponiendo que no hay rozamiento

Considerar al aire con un coeficiente adiabático de 1,4.

Olimpiada de Suiza 1997

El aire comprimido inicialmente se expansiona adiabáticamente hasta ocupar todo el volumen del cañón del fusil.

$$P_iV_i^{\gamma} = P_fV_f^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P_f = \frac{P_iV_i^{\gamma}}{V_f^{\gamma}} = \frac{P_i(SL_i)^{\gamma}}{(SL_f)^{\gamma}} = \frac{60.10^5 \cdot 10^{1,4}}{55^{1,4}} = 5,5.10^5\,\text{Pa}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$\frac{P_i\,V_i}{T_i} = \frac{P_f\,V_f}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{P_f\,V_fT_i}{P_i\,V_i} = \frac{5,5.10^5 \cdot \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L_f\right) \cdot 293}{60.10^5 \cdot \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L_i\right)} = \frac{5,5 \cdot 55 \cdot 293}{60 \cdot 10} = 148\,\text{K}$$

Admitimos que el trabajo en la expansión adiabática se transmite íntegramente a la bala y aparece en forma de energía cinética.

$$W = -\int_{Vi}^{Vf} PdV, \text{ como } \quad PV^{\gamma} = Cte = P_iV_i^{\gamma} \quad \Rightarrow \; P = \frac{P_iV_i^{\gamma}}{V^{\gamma}}, \text{sustituyendo en el trabajo}$$

$$W = -\int_{Vi}^{Vf} PdV = -P_iV_i^{\gamma}\int_{Vi}^{Vf}\frac{dV}{V^{\gamma}} = -P_iV_i^{\gamma}\left|\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right|_{Vi}^{Vf} = -P_iV_i^{\gamma}\left(\frac{V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

$$V_i = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L_i = \frac{\pi \cdot (3,5.10^{-3})^2}{4} \cdot 10.10^{-2} = 9,62.10^{-7}\,\text{m}^3$$

$$V_f = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot L_f = \frac{\pi \cdot (3,5.10^{-3})^2}{4} \cdot 55.10^{-2} = 52,9.10^{-7}\,\text{m}^3$$

Sustituyendo los valores numéricos en el trabajo

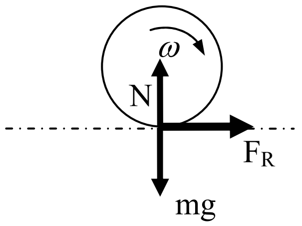
$$W = -60.10^5 \cdot (9,62.10^{-7})^{1,4}\left[\frac{(52,9.10^{-7})^{-0,4} - (9,62.10^{-7})^{-0,4}}{-0,4}\right] = -0,0226\frac{255-129}{-0,4} = -7,1\,\text{J}$$

El signo negativo indica que es un trabajo realizado por el sistema contra el exterior, y en este caso el trabajo sirve para dar energía cinética al proyectil.

$$\frac{1}{2}mv^2 = 7,1 \; \Rightarrow \; v = \sqrt{\frac{2 \cdot 7,1}{2.10^{-3}}} = 84\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

9.-Un cilindro homogéneo de masa m y radio R posee una velocidad angular ω_i. Se deposita sobre un suelo horizontal con lo que comienza a deslizar, al cabo de un cierto tiempo el cilindro rueda y no desliza, siendo entonces su velocidad angular ω_f.
a) Demostrar que la velocidad ω_f es un tercio de la ω_i.
b) Calcular la fracción de la energía cinética inicial que se ha convertido en calor
c) Indicar si la longitud en la que desliza el cilindro depende del coeficiente de rozamiento. Olimpiada de Suiza 1997

Cuando el cilindro se deposita en el suelo las fuerzas que actúan son las indicadas en la



figura

La fuerza de rozamiento F_R crea un momento respecto del centro de masas que hace disminuir la velocidad angular, y a la vez actúa para que el centro de masas adquiera aceleración y velocidad de traslación, esto dura hasta que la velocidad del centro de masas sea igual a la angular por el radio, que es cuando se produce la rodadura.

$$\left.\begin{array}{l} F_R R = I\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad F_R = \frac{1}{2}mR\alpha \\ F_R = ma \end{array}\right\} \qquad \frac{1}{2}R\alpha = a \Rightarrow \frac{\alpha}{a} = \frac{2}{R} \quad (1)$$

Aplicando las relaciones cinemáticas

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \omega_i - \alpha t \\ v = at \end{array}\right\} \qquad \omega = \omega_i - \alpha\frac{v}{a} \quad (2)$$

Cuando se cumpla que $v_f = \omega_f R$, hay rodadura, la sustituimos en (2) junto con la (1)

$$\omega_f = \omega_i - \frac{2}{R}\omega_f R \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{\omega_i}{3}$$

La energía cinética inicial es $E_{Ci} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega_i^2$, la energía cinética total cuando se ha alcanzado la velocidad angular ω_f, es:

$$E = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega_f^2 + \frac{1}{2}m\omega_f^2R^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_f^2 = \frac{3}{4}mR^2\frac{\omega_i^2}{9} = \frac{1}{12}mR^2\omega_i^2$$

La diferencia de energías se ha convertido en calor

$$E_{calor} = \frac{1}{4} mR^2\omega_i^2 - \frac{1}{12} mR^2\omega_i^2 = E_{Ci} - \frac{4E_{Ci}}{12} = \frac{8}{12}E_{Ci} = \frac{2}{3}E_{Ci}$$

c) Las ecuaciones del movimiento del cilindro

$$\left.\begin{array}{l} L = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \\ v_f = \omega_F R \\ F_R = ma \Rightarrow \quad \mu mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = \mu g \\ F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot P = \mu mg \end{array}\right\} L = \frac{a}{2}\frac{v_f^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{\omega_f^2 R^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\omega_i}{3}\right)^2 R^2}{\mu g} = \frac{1}{18}\frac{\omega_i^2 R^2}{\mu g}$$

De la última ecuación se deduce que ł L y μ son inversamente proporcionales.

10.-Un cuadro rectangular indeformable tiene 100 espiras y una masa de 0,1 kg, sus dimensiones son a=10 cm y b=15 cm. Se suspende de un resorte de longitud L y éste experimenta un alargamiento Δl = 2,5 cm. Luego se coloca parte de él en un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del cuadro, de modo que la mitad superior del cuadro queda fuera del campo y la mitad inferior dentro del campo.

a) Calcular la constante del resorte

b) Si se hace pasar una corriente I por el cuadro se consigue que el resorte tenga la longitud inicial sin el cuadro, esto es, la longitud L. Indicar los sentidos de I y B

c) Calcular B si I =10 A

d) Se desea obtener un alargamiento mayor que 2,5 cm, indicar el sentido de I y de B.

e) Calcular el alargamiento total del muelle si I y B tienen los valores del apartado c).

f) Explicar porqué los lados verticales del cuadro no intervienen en el proceso de alargamiento

g)¿Qué ocurriría si el cuadro se sumerge por entero dentro del campo magnético y se hace pasar por él una Intensidad de I =10 A ¿Cuál sería el alargamiento del muelle?

h) Calcular la intensidad de la corriente que debe circular por un largo solenoide de n =10 espiras /cm para lograr un campo magnético de la misma intensidad que el del apartado c)

Olimpiada de Suiza 1998

a) El peso del cuadro se equilibra con la fuerza que ejerce el muelle debido al incremento de su longitud

$$mg = k\Delta\Delta \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}81}{2{,}5.10^{-2}} = 39{,}2 \ \frac{N}{m}$$

b) Para lograr restituir al muelle a su longitud L debe actuar de abajo hacia arriba una fuerza que sea igual peso del cuadro.

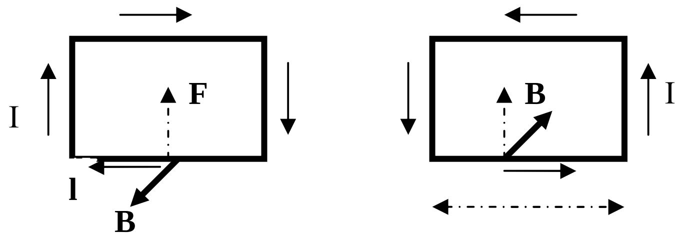


Fig.1 b=15 cm

Recordemos que la fuerza que sufre un cable por el que circula una corriente I está dada por el producto vectorial

$$\vec{F} = I\ \vec{l} \times \vec{B}$$

Dado que en el cuadro son N =100 espiras

$$\vec{F}_t = NI\ \vec{l} \times \vec{B}$$

Siendo $\vec{l}$ un vector de módulo la longitud del cable (en el problema la longitud l es b = 15 cm), la dirección la del cable y sentido el de avance de la corriente. En la figura 1 se representan las dos posibilidades.

c)

$$\left|\vec{F}_t\right| = NI\ \left|\vec{l} \times \vec{B}\right| \Rightarrow \quad mg = NI\ bB\ \text{sen}90º \Rightarrow \quad B = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}81}{100 \cdot 10 \cdot 15.10^{-2}} = 6{,}54.10^{-3}\,T$$

d) Si se desea un alargamiento mayor de 2,5 cm la fuerza debe estar dirigida hacia abajo

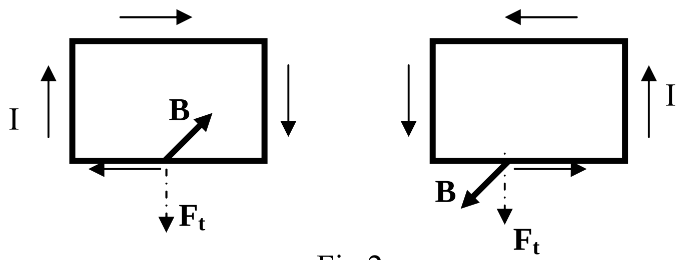


Fig.2

La figura 2 indica el sentido de I y de B.

e) El alargamiento total del muelle se debe al alargamiento del peso del cuadro (2,5 cm), más el alargamiento que produzca la fuerza magnética

$$k\Delta\Delta = NI\ bB\ \text{sen}90º \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{NIbB}{k} = \frac{100 \cdot 10 \cdot 15.10^{-2} \cdot 6{,}54.10^{-3}}{39{,}2} = 0{,}025\ \ m = 2{,}5\ \ cm$$ El

alargamiento total es 5 cm.

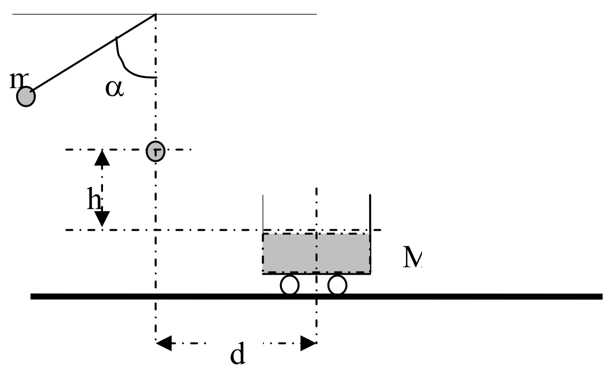
f) Las fuerzas sobre los lados laterales son iguales y de sentido contrario, por tanto , se anulan.

g) Si se sumerge por entero, la fuerza en el lado inferior tiene la misma dirección que en el lado superior pero sentido contrario, la suma vectorial es nula. Luego no pasaría nada al anularse todas las fuerzas. El alargamiento del muelle se debería al peso del cuadro, valdría 2,5 cm.

h) El campo magnético creado por un solenoide de gran longitud es:

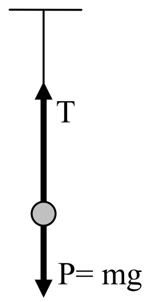
$$B = \mu_o nI \Rightarrow \quad I = \frac{B}{\mu_o n} = \frac{6,54.10^{-3}}{4\pi 10^{-7} \cdot \dfrac{10}{10^{-2}}} = 5,2 \ \ A$$

11.-Un péndulo está constituido por un hilo de longitud L=2 m y masa despreciable, al extremo del mismo se coloca una esfera de m=0,5 kg y cuyas dimensiones se consideran despreciables. Se desvía el péndulo un ángulo de α=60º respecto de la vertical. El hilo se rompe en el punto más bajo de su trayectoria y la esfera cae en el centro de un carrito con arena y una masa total de M=2 kg . El desnivel entre el nivel de la arena en el carrito y el punto más bajo de la esfera es h= 5 m,(ver figura inferior).



a) Indicar las fuerzas que actúan sobre el hilo justamente antes de romperse.
b) Calcular la fuerza máxima que puede soportar el hilo.
c) Determinar la distancia d entre la posición del carrito en el momento del choque.
d) Determinar la energía cinética del sistema esfera-carrito antes y después del choque. Determinar la pérdida en %.
Olimpiada de Suiza 1998

a) Las fuerzas que actúan sobre la esfera es su peso y la tensión de la cuerda o fuerza con que el hilo tira de la esfera.



La tensión de la cuerda es mayor que el peso ya que tiene que suministrar la fuerza centrípeta que necesita la esfera al girar.

b)

$$T = mg + F_C = mg + m\frac{v^2}{L}$$

La velocidad de la esfera la calculamos aplicando el principio de conservación de la energía

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \quad mv^2 = 2mgh = 2mgL(1 - \cos\alpha)$$

$$T = mg + \frac{2mgL(1-\cos\alpha)}{L} = mg + 2mg(1-\cos\alpha) = 0{,}5 \cdot 9{,}81 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot (1 - \cos 60^o)$$

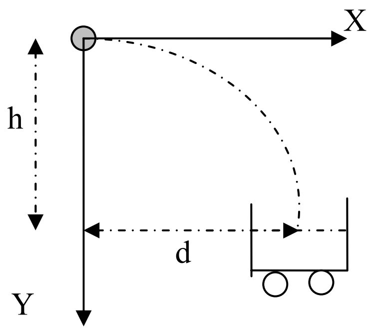
$$T = 9{,}81 N$$

c) Al romperse el hilo en la parte más baja de su trayectoria, la esfera describe una trayectoria parabólica. La velocidad inicial tiene dirección horizontal y su módulo es:

$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$$

Tomando como ejes de referencia los indicados en la figura, las ecuaciones del movimiento son:

$$x = vt \quad ; \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$



Cuando y = h , x =d , poniendo esta condición en las ecuaciones resulta:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \quad d = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4hL(1-\cos\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{4 \cdot 5 \cdot 2(1-\cos 60^o)} = 4{,}47 \ \ m$$

d) Energía antes del choque, la de la esfera más la del carrito que es nula. Tomando como referencia el nivel de la arena, la energía cinética de la bola es la suma de la cinética inicial más la potencial de la bola al soltarse.

$$E_{C_{antes}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{2}0{,}5\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot(1-\cos 60º)} = 1{,}11\ \text{J}$$

$$E_{P,antes} = mgh = 0{,}5\cdot 9{,}81\cdot 5 = 24{,}5\text{J} \Rightarrow \quad E_{totalantes} = 24{,}5 + 1{,}1 = 25{,}6\ \text{J}$$

La energía después del choque es la energía cinética del conjunto carrito+esfera. Para saber la velocidad del conjunto carrito+esfera, aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento, a la componente horizontal

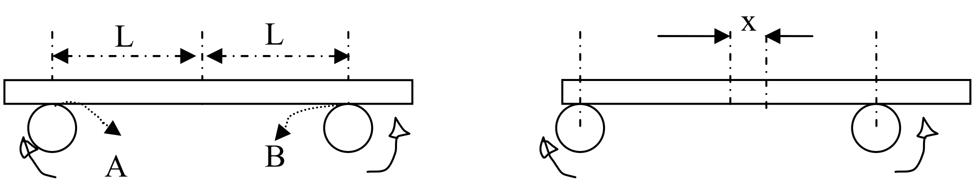
$$mv = (M+m)V \Rightarrow V = \frac{m\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}{M+m} = \frac{0{,}5\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot(1-\cos 60º)}}{2+0{,}5} = 0{,}89\ \frac{m}{s}$$

$$E_{C,después} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}2\cdot 0{,}89^2 = 0{,}87\ \text{J}$$

Pérdidas al deformar la arena.

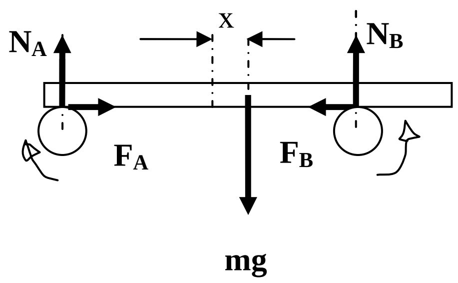
$$25{,}6-0{,}87 = 24{,}9\ \text{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{24{,}9}{25{,}6}\cdot 100 = 97\ \%$$

12.- Una barra homogénea de masa m, está apoyada simétricamente sobre dos rodamientos que giran a gran velocidad. En un principio los dos puntos de contacto A y B de los dos rodamientos equidistan la distancia L del centro de la barra.
Los rodamientos giran en la forma que se indica en la figura siendo el coeficiente de rozamiento cinético con la barra μ=0,12.



La barra se separa desplazándola ligeramente hacia la derecha una distancia x respecto de su centro geométrico y se deja en libertad
a) Determinar el movimiento de la barra y las características del movimiento
b) Estudiar el caso en que los dos rodamientos giren en el mismo sentido
Olimpiada de Suiza 1998

a) Las fuerzas que actúan sobre la barra están en la figura inferior



Si existe equilibrio respecto a la dirección vertical y se toman momentos respecto al centro geométrico de la barra, tenemos: $\sum \vec{F} = 0 \;; \sum \vec{M} = 0$

$$N_A + N_B = mg \quad ; \quad N_A(L+x) = N_B(L-x) \quad \Rightarrow \quad N_A = N_B \frac{L-x}{L+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_B \frac{L-x}{L+x} + N_B = mg \quad \Rightarrow \quad N_B = \frac{mg}{1+\frac{L+x}{L-x}} = \frac{mg(L-x)}{2L} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A = mg - \frac{mg(L-x)}{2L} = \frac{mg(L+x)}{2L}$$

Las fuerzas de rozamiento están relacionadas con los valores de N

$$F_A = \mu N_A = \mu \frac{mg(L+x)}{2L} \quad ; \quad F_B = \mu N_B = \mu \frac{mg(L-x)}{2L} \Rightarrow$$

$$F_A - F_B = F = \frac{\mu\ mg}{L} x = kx$$

Al ser la fuerza directamente proporcional al desplazamiento se trata de un movimiento armónico cuyo periodo vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\mu\ mg}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\mu g}}$$

b) Si las dos fuerzas actúan en el mismo sentido la barra se acelera en la dirección y sentido de las fuerzas. Sustituyendo los valores de F_A y F_B hallados antes:

$$F_A + F_B = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mu\ mg}{m} = \mu g$$

13.- Se sabe que el rozamiento del aire sobre un objeto aumenta con la velocidad del objeto respecto del aire y esa es la razón por la que un cuerpo en caída ´´libre´´ alcanza una velocidad límite.
Un paracaidista alcanza una velocidad límite cuando las fuerzas que actúan sobre él se equilibran.
La fuerza de rozamiento del aire se expresa mediante la ecuación

$$F_A = \frac{1}{2} C\rho_A A v^2$$

C es un coeficiente de forma del objeto y que vale para una esfera 0,45
ρ_A es la densidad del aire igual a 1 kg/m^3
A es la superficie del cuerpo proyectado en dirección perpendicular al desplazamiento
v es la velocidad relativa del aire respecto del objeto
Se busca si una esfera suficientemente grande puede actuar como paracaídas. Sea ρ_S la densidad media de la esfera y m= 80 kilos la masa de la persona que está suspendida por debajo de la esfera, se supone que esta persona tiene volumen despreciable frente a la esfera y que no sufre rozamiento con el aire.
a) Encontrar la ecuación que relaciona la velocidad límite con el radio de la esfera y mostrar que existe un radio óptimo para el cual la velocidad límite es la menor posible.
b) Si se usa una esfera con radio óptimo y la velocidad límite es 5 m/s determinar el valor de la densidad media ρ_S. Encontrar con este valor de la densidad media el radio de la esfera.
Olimpiada de Suiza 1998

a) Las fuerzas que actúan sobre la esfera son: verticalmente hacia arriba, la fuerza de rozamiento y el empuje que sufre la esfera en el aire y verticalmente hacia abajo, el peso total, que es la suma del peso de la persona más el peso del aire que contiene la esfera. Se supone que la envoltura de la esfera tiene masa despreciable.

$$\frac{1}{2} C\rho_A A v^2 + V\rho_A g = mg + V\rho_S g$$

V es el volumen de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$; el área A es el área del círculo máximo de la esfera $A = \pi\, r^2$

$$\frac{1}{2} C\rho_A \pi\, r^2 v^2 + \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho_A g = mg + \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho_S g \Rightarrow v^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi\, r^3 (\rho_S - \rho_A) g + mg}{\frac{1}{2} C\rho_A \pi\, r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{8\ (\rho_S - \rho_A) g}{3C\rho_A} r + \frac{2\ mg}{C\rho_A \pi\, r^2}} \qquad (1)$$

En la ecuación anterior existen dos variables la densidad de la esfera y su radio. Existirá un radio para el que la velocidad límite sea mínima y que obtendremos derivando la velocidad respecto de la variable r e igualando a cero.

$$\frac{dv}{dr}=\frac{\dfrac{8\ (\rho_S-\rho_A)g}{3C\rho_A}-\dfrac{2mg\cdot 2\ C\rho_A\pi\ r}{\left(C\rho_A\pi\ r^2\right)^2}}{2\sqrt{\dfrac{8\ (\rho_S-\rho_A)}{3C\rho_A}r+\dfrac{mg}{C\rho_A\pi\ r^2}}}=0\Rightarrow\quad \frac{8\ (\rho_S-\rho_A)g}{3C\rho_A}-\frac{4\ mg\ C\rho_A\pi}{\left(C\rho_A\pi\ \right)^2 r^3}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8}{3}\ (\rho_S-\rho_A)=\frac{4m}{\pi\ r^3}\quad\Rightarrow\quad r_{opt}=\sqrt[3]{\frac{3\ m}{2\ \pi(\rho_S-\rho_A)}}$$

b) En la ecuación (1) elevamos al cuadrado y llamamos a $\rho_S-\rho_A=\rho$

$$v^2=\frac{8g\rho\, r}{3C\rho_A}+\frac{2mg}{\pi C\rho_A r^2}\quad;\quad r_{opt}=\sqrt[3]{\frac{3m}{2\pi(\rho_S-\rho_a)}}\Rightarrow\quad r_{opt}^3=\frac{3m}{2\pi\ \rho}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores

$$v^2=\frac{gr}{C\rho_A}\left(\frac{8\rho}{3}+\frac{2m}{\pi r^3}\right)=\frac{gr}{C\rho_A}\left(\frac{8\rho}{3}+\frac{2m}{\pi\dfrac{3m}{2\pi\ \rho}}\right)=\frac{4gr\rho}{C\rho_A}=\frac{4g\rho}{C\rho_A}\sqrt[3]{\frac{3m}{2\pi\ \rho}}=\frac{4g\rho^{\frac{2}{3}}}{C\rho_A}\sqrt[3]{\frac{3m}{2\pi}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{v^2C\rho_A}{4g}\sqrt[3]{\frac{2\pi}{3m}}=\rho^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\rho^{\frac{2}{3}}=\frac{25\cdot 0{,}45\cdot 1}{4\cdot 9{,}8}\sqrt[3]{\frac{2\pi}{240}}=0{,}0852\Rightarrow\rho=\rho_S-\rho_A=0{,}0852^{\frac{3}{2}}\Rightarrow$$

$$\rho=0{,}025\quad\Rightarrow\quad\rho_S=1{,}025\frac{kg}{m^3}$$

$$r_{opt}=\sqrt[3]{\frac{3m}{2\pi\ \rho}}=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 80}{2\pi\cdot 0{,}025}}=11{,}5\ \ m$$

14.- Uno puede convencerse, basándose en la teoría de la relatividad restringida, que el transporte de un reloj no es un método adecuado para la sincronización de relojes que estén muy alejados entre sí.
No obstante se transportan relojes atómicos desde diversos institutos nacionales hasta una oficina internacional de la hora (BIH), cuya finalidad es establecer un tiempo internacional basado en un reloj atómico (TAI).
Con el objetivo de efectuar esa sincronización, se transporta un reloj atómico desde Tokio a Paris. La distancia entre ambas ciudades es s =1,2.10^4 km.
a) Encontrar una expresión para la diferencia de tiempos $\Delta\tau$=t-t´ en función de la distancia s y de la velocidad v = βc a la cual se efectúa el transporte; siendo t el tiempo transcurrido en el viaje medido en un sistema de referencia ligado a la tierra y t´ el tiempo transcurrido medido en un sistema referencial ligado al avión donde se transporta el reloj atómico

b) Se desea que esta diferencia no sobrepase los 10 ns. Determinar la velocidad del avión que transporta el reloj, en el supuesto de que β<<1
c) Repetir el cálculo del apartado b) sin hacer la suposición de que β<<1 y dar el resultado en la forma $v_{exacta} = \alpha\, v_{aproximada}$, expresando α en función de s y $\Delta\tau$.¿Cuál es el error del resultado aproximado?
Olimpiada de Suiza 1998

Designamos con S al sistema referencial ligado a la tierra. El observador ligado a este sistema mide un tiempo de vuelo desde Tokio a Paris que designa con t. Con S´ se designa al sistema referencial ligado al avión y que transporta el reloj atómico. El observador en reposo respecto a este sistema mide el tiempo de vuelo en el reloj atómico y determina que vale t´. Este tiempo t´ es el tiempo propio y se relaciona con el tiempo t mediante la relación:

$$t = \frac{t_{\text{propio}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Para el observador en tierra el tiempo t , la velocidad del avión v y la distancia s

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\beta\ c}$$

$$\Delta\tau = t - t' = t - t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = t\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \frac{s}{\beta\ c}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)$$

b) Se puede hacer la aproximación siguiente

$$\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}\beta^2$$

$$\Delta\tau = t - t' = \frac{s}{\beta\ c}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) \approx \frac{s}{\beta\ c}\left(1-1+\frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{s\beta}{2c} = \frac{sv}{2c^2} \quad \Rightarrow \quad v_{ap} = \frac{2c^2\Delta\tau}{s} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\cdot\left(3.10^8\right)^2\cdot 10.10^{-9}}{1{,}2.10^7} = 150\frac{m}{s} = 540\frac{km}{h}$$

c) De la expresión

$$\Delta\tau = \frac{s}{\beta\ c}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) \Rightarrow \frac{\Delta\tau\ \beta\ c}{s} = 1-\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow 1-\beta^2 = 1+\frac{\Delta\tau^2\beta^2c^2}{s^2} - 2\frac{\Delta\tau\ \beta\ c}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{\Delta\tau\ \beta\ c}{s} = \beta^2\left(\frac{\Delta\tau^2c^2}{s^2}+1\right) \Rightarrow \quad \beta = \frac{2\ \Delta\tau\ c}{\frac{\Delta\tau^2c^2}{s}+s} = \frac{2\ \Delta\tau\ c\ s}{\Delta\tau^2c^2+s^2} \quad \Rightarrow v_{ex} = \frac{2\ \Delta\tau\ c^2 s}{\Delta\tau^2c^2+s^2}$$

$$v_{exacto} = \alpha\ v_{aproximado} \Rightarrow \frac{2\ \Delta\tau\ c^2 s}{\Delta\tau^2c^2+s^2} = \alpha\cdot\frac{2\ \Delta\tau\ c^2}{s} \Rightarrow \frac{s}{\Delta\tau^2c^2+s^2} = \frac{\alpha}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{s^2}{\Delta\tau^2c^2+s^2}$$

$$\varepsilon_{elativo} = \frac{v_{exacta} - v_{aproximada}}{v_{exacta}} = 1 - \frac{\dfrac{2\ c^2\ \Delta\tau}{s}}{\dfrac{2\ \Delta\tau\ c^2 s}{\Delta\tau^2\ c^2\ + s^2}} = 1 - \frac{\Delta\tau^2\ c^2 + s^2}{s^2} = -\left(\frac{\Delta\tau\ c}{s}\right)^2$$

El valor absoluto del error relativo expresado en tantos por ciento es:

$$\varepsilon_r = \left(\frac{10.10^{-9} \cdot 3.10^8}{1,2.10^7}\right)^2 \cdot 100\,\% = 6,25.10^{-12}\ \%$$