RELATIVIDAD 1

1.- Una barra se mueve con velocidad constante v a lo largo del eje de abscisas respecto de un sistema inercial S. Un observador situado en el sistema S encuentra que la longitud de la barra es 1% menor que su longitud propia. Calcular el módulo de v.

La longitud propia de la barra L_0, es lo que mediría un observador situado en un sistema inercial S´ respecto del cual la barra se encuentre en reposo.
Entre ambas medidas existe la relación

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

El valor de L que mide el observador situado en S es 1% menor que Lo

$$L = L_o - \frac{1}{100}L_0 = 0{,}99\ L_o$$

$$0{,}99\ L_o = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1-0{,}99^2 \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1-0{,}99^2} = 0{,}14c$$

2.- Desde un sistema de referencia inercial S se mide el tiempo entre dos sucesos que ocurren en un sistema inercial S´, encontrándose un intervalo de tiempo Δt =5,0 s. Si el intervalo de tiempo de ese mismo suceso se mide desde S´ se encuentra que dura 0,1 segundo menos que en S. Determinar la velocidad con que el observador de S ve desplazarse al sistema S´.

Los sucesos que ocurren en el sistema S´, se miden en el sistema S, por tanto el llamado tiempo impropio vale 5,0 segundos. Desde S´ se mide el intervalo de dos secesos que ocurren en su propio sistema de referencia y se encuentra una décima de segundo menos que antes, este es el llamado tiempo propio que vale 4,9 s.
La relación entre ambos tiempos medidos es:

$$\text{tiempo propio} = \text{tiempo impropio}\ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_P = \Delta t_I\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow$$

$$1-\frac{\Delta t_P^2}{\Delta t_I^2} = \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow v = c\sqrt{1-\frac{\Delta t_P^2}{\Delta t_I^2}} = c\sqrt{1-\left(\frac{4{,}9}{5{,}0}\right)^2} = 0{,}2\ c$$

3.- En el eje X de un sistema de referencia S se hace una marca. Una barra se desplaza paralelamente a lo largo del eje X con velocidad constante v. Un observador situado en S mide que la barra tarda en pasar por la marca un tiempo de 20 ns. Un observador situado sobre la barra mide que el tiempo que tarda en pasar por la marca es 25 ns. Calcular la longitud propia de la barra.

En la figura 1 se indican dos sistemas uno es el S y otro el S´ que se encuentra sobre la barra en movimiento

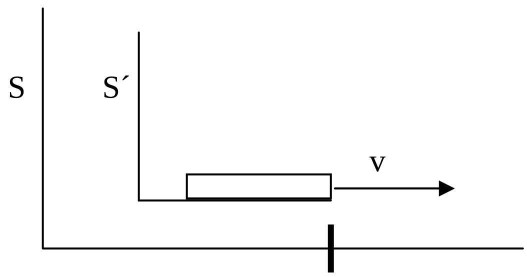


Fig. 1

Un observador que está en reposo respecto del sistema S, observa que el sistema S´, esto es la barra, se desplaza hacia el eje positivo de las X con una velocidad v. La longitud de la barra para él es L, y viene dada por la expresión:

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

siendo L_o la longitud propia de la barra, la que mide un observador que se encuentre en reposo sobre ella, esto es , sobre el sistema S´.

Para el observador S, desde que el extremo derecho de la barra pasa por la marca hasta que lo hace el otro extremo pasa un tiempo medido en el sistema S que vale Δt = 20 ns, en consecuencia establece que:

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

Para un observador situado en S´, razona que el sistema S se desplaza hacia la izquierda con una velocidad v y para él la marca se desplaza de derecha a izquierda. Puesto que la barra tiene una longitud propia Lo, desde que la marca pasa por un extremo de la barra hasta que pasa por el otro, transcurre un tiempo $\Delta t´$= 25 ns medido ese tiempo en el sistema S´.

$$v = \frac{L_o}{\Delta t'}$$

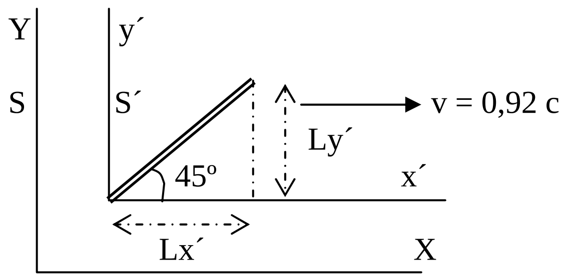
De las dos últimas ecuaciones se deduce:

$$\frac{L}{L_o} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}$$

$$\frac{L}{L_o} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{20}{25}\right)^2} = 0{,}6 \ c$$

$$L_o = v\Delta t' = 0{,}6 * c * 25.10^{-9} = 4{,}5 \ m$$

4.- En un sistema inercial S´ yace una barra de longitud 1 metro que forma un ángulo de 45 º con el eje Ox´. Un observador se encuentra en un sistema de referencia S siendo el eje Ox paralelo al Ox´. Para este observador el sistema S´ se mueve con velocidad v = 0,92 c, manteniendo los ejes paralelos. Si este observador realiza medidas de la longitud de la barra y del ángulo que forma con Ox´ ¿qué valores encuentra?



Parra el observador situado sobre el sistema S Ly´= Ly = 1*sen 45 = 0,707 m y la longitud que mide sobre el eje Ox´ viene dada por la expresión:

$$L_X = L_{X'}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 * \cos 45 * \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}277 \ m$$

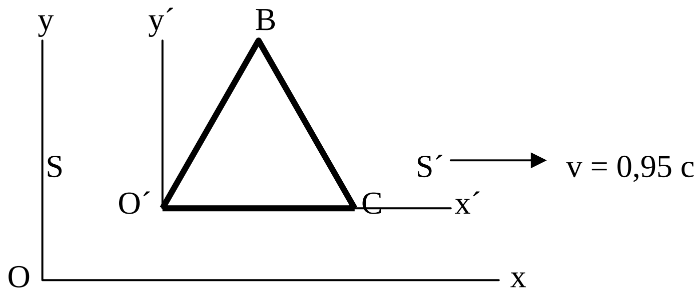
Longitud de la regla para el observador S

$$L = \sqrt{0{,}707^2 + 0{,}277^2} = 0{,}76 \ m$$

ängulo

$$\text{tag } \theta = \frac{L_y}{L_x} = \frac{1 * \text{sen} 45}{\sqrt{1-0{,}92^2}\cos 45} = 2{,}552 \quad \Rightarrow \quad \theta = 68{,}6^o$$

5.- En un sistema inercial S´ se encuentra un triángulo equilátero de lado 1 metro, estando uno de los vértices en el origen de coordenadas y un lado sobre el eje O´x´. Un observador se encuentra en un sistema de referencia S siendo el eje Ox paralelo al O´x´. Para este observador el sistema S´ se mueve con velocidad v = 0,95 c, manteniendo los ejes paralelos. Si este observador realiza medidas del perímetro del triángulo ¿qué valor encuentra? Resolver el mismo problema cuando el triángulo tenga un vértice en el origen de coordenadas y una de sus bisectrices sobre el eje O´x´.



Para el observador en S las distancias sobre el eje de abscisas las encuentra más cortas, mientras que las del eje de ordenadas son las mismas.. A este observador le parece que en vez de ver un triángulo equilátero ve uno isósceles, con la misma altura sobre el lado O´C.

$$L_{OC} = L_{O'C}\sqrt{1-\frac{v^2}{c}} = \sqrt{1-\beta^2}$$

Altura sobre O´C desde el sistema S´ :

$$h_{O'C} = \sqrt{L^2_{O'B} + \left(\frac{L_{O'C}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L_{O'B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

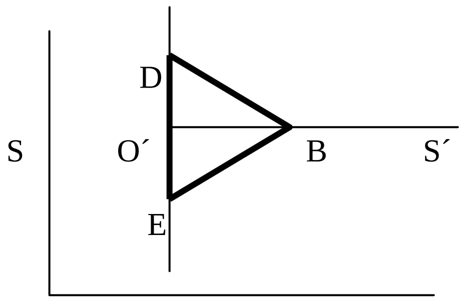
Este valor se mantiene en el sistema S, por tanto, la longitud del lado O´B visto desde el sistema S vale.

$$L_{OB} = \sqrt{h^2_{O'C} + \left(\frac{L_{OC}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1-\beta^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}$$

El valor del perímetro visto desde S es:

$$P = \sqrt{1-\beta^2} + 2\left(\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\right) = \sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{4-\beta^2}$$

La figura inferior indica la situación de la segunda parte del problema



L altura O´B medida en el sistema S´ vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m

Esa misma altura medida en el sistema S vale:

$$OB = O'B\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\beta^2}$$

El lado DE mide 1 m en el sistema S. El lado DB que es igual al EB mide en el sistema S

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\beta^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+3\left(1-\beta^2\right)}{4}} = \frac{\sqrt{4-3\beta^2}}{2}$$

El perímetro del triángulo medido desde S

$$P = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{4-3\beta^2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{4-3\beta^2}$$

6.- Una partícula tiene una vida media de 1,6 μ s y se mueve con una velocidad v, respecto de un sistema de laboratorio que se designa con S. Desde este sistema se mide la vida media de la partícula y se encuentra que es 3,2 μs. Calcular la distancia que recorre la mencionada partícula, medida por el observador situado en S, desde que se forma hasta que se desintegra.

La vida media de la partícula medida en un sistema que se desplace con ella es el tiempo propio. El tiempo medido desde S es el tiempo impropio. Ambos se relacionan entre sí

$$\text{tiempo propio} = \text{tiempo impropio}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1{,}6}{3{,}2}\right)^2 = 1 - \frac{c^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

La distancia recorrida $d = \frac{\sqrt{3}}{2} c * 3{,}2.10^{-6} = 831\ \text{m}$

Podemos también resolver este problema a partir de la invarianza

$$c^2\Delta t^2 - \Delta l^2 = \text{cons tan te}$$

que es valida para cualquier sistema inercial

Aplicamos la anterior relación para el sistema S y para el sistema S´. Para este último sistema $\Delta l' = 0$, ya que el nacimiento y la desintegración de la partícula ocurren en el mismo lugar de ese sistema

$$c^2 * \left(3{,}2.10^{-6}\right)^2 - \Delta l^2 = c^2 * \left(1{,}6.10^{-6}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta l = c.10^{-6}\sqrt{3{,}2^2 - 1{,}6^2} = 831\ \text{m}$$

7.- La velocidad promedio de los muones en la atmósfera terrestre es 0,992 c y su vida media 2,26.10^{-6} segundos. Si no se aplicase la mecánica relativista determinar la distancia que pueden recorrer esas partículas en la atmósfera terrestre y hacer el mismo cálculo con la mecánica relativista.

La distancia es:

$$d = v * t = 0{,}992 * 3.10^8 * 2{,}26.10^{-6} = 673 \ \ m$$

Este resultado no está de acuerdo con las medidas efectuadas en la tierra en la que se detectan distancias mayores.

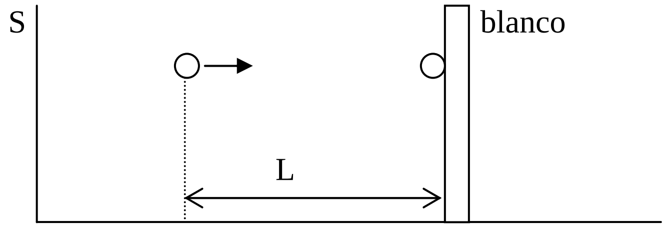
La vida media es el tiempo propio de la vida del muón. Desde la tierra el tiempo de vida es:

$$\text{tiempo propio} = \text{tiempo impropio}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \text{t.impropio} = \frac{2{,}26.10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{0{,}992^2 c^2}{c^2}}} = 1{,}79.10^{-5}\,s$$

La distancia recorrida para un observador situado en la tierra es:

$$d = 0{,}992 * 3.10^8 * 1{,}79.10^{-5} = 5327 \ \ m$$

8.- Dos partículas iguales se mueven a una velocidad constante 0,95 c respecto de un sistema inercial S. Estas partículas chocan contra un blanco con un intervalo de tiempo entre ellas de 2,0.10^{-8} segundos, tiempo medido por el observador situado en S. Hallar la distancia propia, esto es, la medida por un observador situado sobre las partículas, a la que se encuentran dichas partículas.



El observador situado en el sistema S observa que la partícula primera choca con el blanco y para él la segunda partícula se encuentra a una distancia L y mide el tiempo que dicha partícula tarda en alcanzar el blanco y encuentra un valor de $\Delta t = 2{,}0.10^{-8}$ s.

Para el observador situado en un sistema S´ ligado a las partículas, la distancia entre ellas es L_0, esto es, la distancia propia. Esta magnitud se encuentra relacionada con L mediante la expresión.

$$L = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow L_o = \frac{L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0{,}95 * 3.10^8 * 2{,}0.10^{-8}}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 18{,}3 \text{ m}$$

9.- Una barra se mueve con respecto a un sistema S con una velocidad constante. En este sistema se mide la longitud de la barra y se encuentra que vale 5 m. En un sistema ligado a la propia barra se marcan dos señales de forma simultánea en los extremos de dicha barra y se mide la distancia entre esas señales desde el sistema S encontrándose que vale 7m. Calcular la longitud propia de la barra y su velocidad respecto del sistema S.

Designamos con L_o la longitud propia de la barra que es la distancia que mediría un observador situado en un sistema S´ para el que la barra está en reposo. La distancia L = 5 metros se mide desde S y ambas medidas están relacionadas por

$$5 = L_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (1)$$

Designamos con x'_A la coordenada de un extremo de la barra y con x'_B la del otro extremo, ambas en el sistema S´ ; x'_B - x'_A = L_o . La relación con las coordenadas medidas en S la obtenemos mediante las ecuaciones de Lorentz

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad x_B = \frac{x'_B + vt'_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Restando ambas ecuaciones y teniendo en cuenta que los tiempos son iguales

$$x_A - x_B = 7 = \frac{x'_A - x'_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

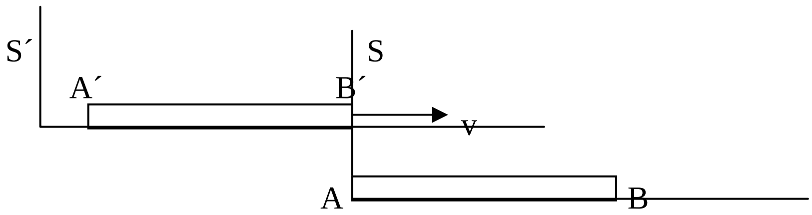
De las ecuaciones (1) y (2), se deduce:

$$\frac{5}{L_o} = \frac{L_o}{7} \quad \Rightarrow \quad L_o = \sqrt{35}\ \text{m}$$

$$L_o = \sqrt{35} = 7\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{35}{49} = 1-\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = c\sqrt{1-\frac{35}{49}} = 0{,}53\ c$$

10.-Una barra A´B´se mueve con velocidad v respecto de otra barra AB y lleva incorporados en sus extremos dos relojes designados con A´y B´ que han sido sincronizados entre sí. La barra AB lleva en sus extremos dos relojes designados con A y B que también están sincronizados entre sí. La longitud propia de cada barra es L_o. En el momento en que el reloj B´ se encuentras frente al A se comienza a contar el tiempo tanto para los relojes de la barra A¨B´ , como de la AB. Determinar las indicaciones de los relojes cuando B´ se encuentre frente B

Analicemos la situación desde el punto de vista de un observador que está en el sistema S, siendo éste un sistema ligado a la barra AB.



Para este observador la longitud de la barra A´B´vale

$$L = L_o\sqrt{1-\beta^2} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Cuando A´ se encuentre frente a A el reloj A marcará un tiempo

$$t_A = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v}$$

teniendo en cuenta que el extremo B´ todavía no ha llegado a B puesto que L< L´. El reloj B tiene que marcar la lectura de A más el tiempo que tarde en recorrerse la distancia Lo-L (es la distancia que le falta a B´ para estar frente a B)

$$t_B = t_A + \frac{L_o - L}{v} = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v} + \frac{L_o - L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v} = \frac{L_o}{v}$$

Para el observador situado en el sistema S´(el ligado a la barra) razona que B está frente a B´ cuando la barra de S se haya desplazado hacia la izquierda una longitud L que vale

$$L = L_o\sqrt{1-\beta^2}$$

puesto que para él la barra situada en el sistema S se mueve con velocidad v hacia la izquierda y por tanto él mide una longitud más pequeña

El reloj B´ marcará

$$t'_B = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v}$$

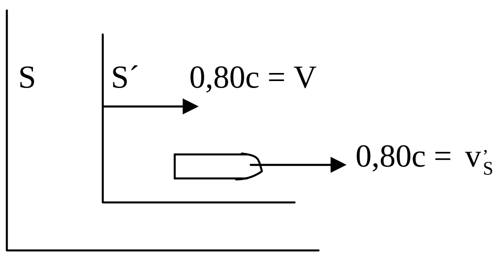
Cuando A y A´ estén frente a frente el reloj en A ´ marcará el tiempo de B´ más lo que tarda en llegar A frente a A´ que es $\frac{L_o - L}{v}$

El reloj A´ marcará

$$t'_A = t'_B + \frac{L_o - L}{v} = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v} + \frac{L_o - L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v} = \frac{L_o}{v}$$

11.- Una nave espacial se mueve con una velocidad 0,80 C respecto de un observador situado en el sistema S. En el sentido de avance de la nave, ésta lanza un cohete que se mueve respecto de ella con una velocidad de 0,80 c. Determinar La velocidad del cohete respecto del observador del sistema S.

La situación desde el observador es la de la figura

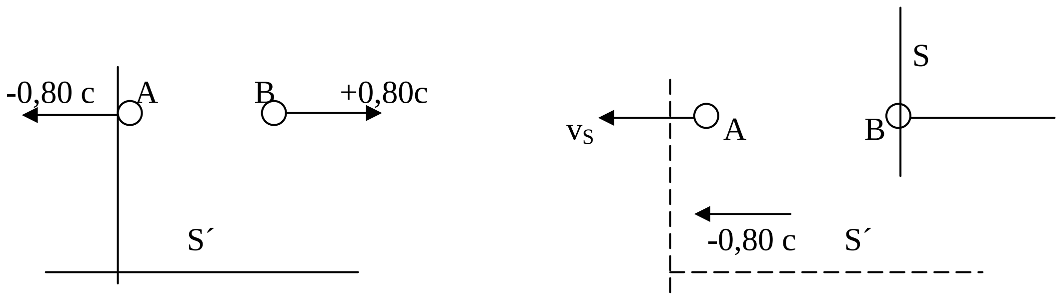


Aplicamos la ley de adición de velocidades relativistas

$$v_S = \frac{v'_S + V}{1 + \frac{v'_S V}{c^2}} = \frac{0{,}80c + 0{,}80c}{1 + \frac{0{,}80c * 0{,}80c}{c^2}} = 0{,}98c$$

12.- Respecto de un sistema de referencia se mueven dos objetos A y B en la misma dirección y en sentido contrario con la misma velocidad 0,80 c. Calcular la velocidad relativa del objeto A respecto del B.

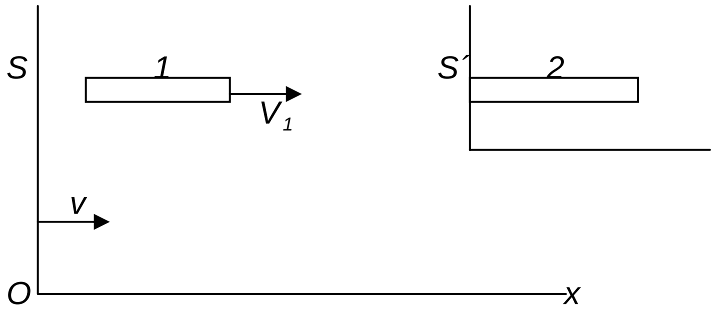
En la figura se indica la situación vista desde S, un sistema inercial para el que el objeto B se encuentra en reposo



Para el observador en S el sistema S´ se desplaza hacia la izquierda con velocidad 0,8 c

$$v_S = \frac{v'_S + V}{1 + \frac{v'_S V}{c^2}} = \frac{-0{,}80c - 0{,}80c}{1 + \frac{(-0{,}80c) * (-0{,}80c)}{c^2}} = -0{,}98c$$

13.- Dos barras tienen la misma longitud propia L_o. Ambas se mueven una al encuentro de la otra con la misma velocidad v paralela al eje Ox de un sistema de referencia del laboratorio (sistema S). Un observador se sitúa sobre una de las barras ¿ qué longitud mediría de la otra barra?



Para el observador situado sobre el sistema S la barra 1 se mueve hacia la derecha con velocidad v y la 2 se mueve hacia la izquierda con la misma velocidad. Para un observador en S´ la barra 2 está en reposo y el sistema S se desplaza hacia la derecha con velocidad v y la barra 1 lo hace con velocidad V_1. La adición de velocidades según la transformación de Lorentz es:

$$V_1 = \frac{v+v}{1+\frac{v*v}{c^2}} = \frac{2v}{1+\beta^2} \quad \text{siendo} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

El observador sobre la barra 2 (sistema S´) ve contraída su longitud

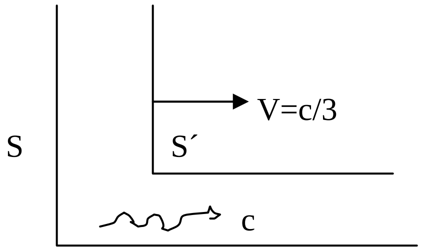
$$L = L_0\sqrt{1-\frac{V_1^2}{c^2}} = L_o\sqrt{1-\frac{4v^2}{c^2\left(1+\beta^2\right)^2}} = L_o\,\frac{\sqrt{c^2\left(1+\beta^2\right)^2-4v^2}}{c\left(1+\beta^2\right)} =$$

$$= L_o\,\frac{\sqrt{c^2+c^2\beta^4+2c^2\beta^2-4v^2}}{c\left(1+\beta^2\right)} = L_o\,\frac{\sqrt{c^2-2v^2+\frac{v^4}{c^2}}}{c\left(1+\beta^2\right)} = L_o\,\frac{\sqrt{\frac{\left(c^2-v^2\right)^2}{c^2}}}{c\left(1+\beta^2\right)}$$

Finalmente

$$L = L_o\,\frac{\left(c^2-v^2\right)}{c^2\left(1+\beta^2\right)} = L_o\,\frac{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1+\beta^2\right)} = L_o\,\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$$

14.- En un sistema inercial S un foco de luz envía un rayo en la dirección positiva del eje x. Determinar la velocidad medida por un observador situado en un sistema S´ que se desplaza con velocidad V=c/3 con relación a S y en la misma dirección y sentido que el rayo de luz.



$$v_S' = \frac{v_S - V}{1 - \frac{v_S V}{c^2}} = \frac{c - \frac{c}{3}}{1 - \frac{c * \frac{c}{3}}{c^2}} = c$$

La velocidad de la luz es constante para cualquier observador.

15.-Una nave espacial tiene una longitud de 100 m entre la proa y la popa medida esta distancia en el sistema ligado a la nave, la cual se desplaza con relación a la tierra con una velocidad 0,96 c. De forma simultánea para el observador de la nave, se emiten dos destellos luminosos de sendos faros situados en la proa y la popa. Determinar con qué intervalo de tiempo son detectados los destellos en la tierra.

Designamos con x_1' la coordenada de proa de la nave y con x_2' la de popa.

$$x_1' - x_2' = 100 \text{ m}$$

Aplicamos la transformación de Lorentz

$$t_1 = \frac{t_1^{'} + \frac{Vx_1^{'}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ; \quad t_2 = \frac{t_2^{'} + \frac{Vx_2^{'}}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad t_1 - t_2 = \frac{\frac{V}{c^2}\left(x_1^{'} - x_2^{'}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

En la última expresión se tiene en cuenta que $t_1^{'} = t_2^{'}$

$$t_1 - t_2 = \frac{\frac{0{,}96c}{c^2} * 100}{\sqrt{1-0{,}96^2}} = 1{,}14.10^{-6}\ \text{s}$$

Al ser $t_1 > t_2$ la luz procedente de proa se encendió para el observador de tierra un tiempo posterior a la de popa.