1.- Un dispositivo óptico está fabricado con vidrio de n = 1,5, tiene la forma de un cuarto de cilindro (ver figura 1). Sobre él y por la cara plana se hacen incidir rayos luminosos a distintas alturas h, se pide encontrar una expresión que nos dé los valores de x positivos para los que la luz incide sobre la recta AB

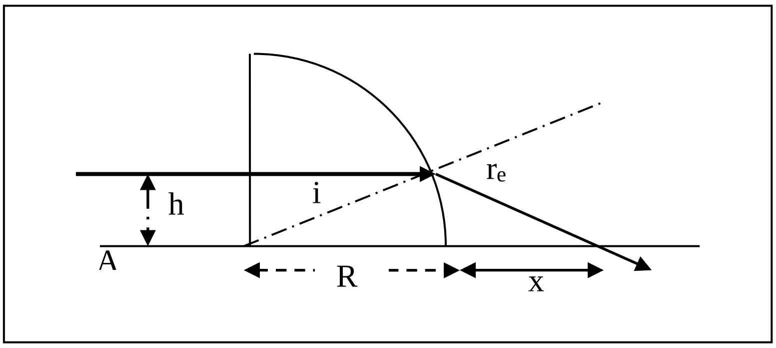


Fig. 1

Como la luz incide desde el vidrio al aire, esto es, desde un medio de mayor índice a uno de menor, habrá una altura máxima h_{max}, para la que el rayo refractado forme un ángulo de 90º, por encima de ese h_{max} los rayos se reflejarán y no se refractarán. Para ese h_{max} corresponde un x mínimo.

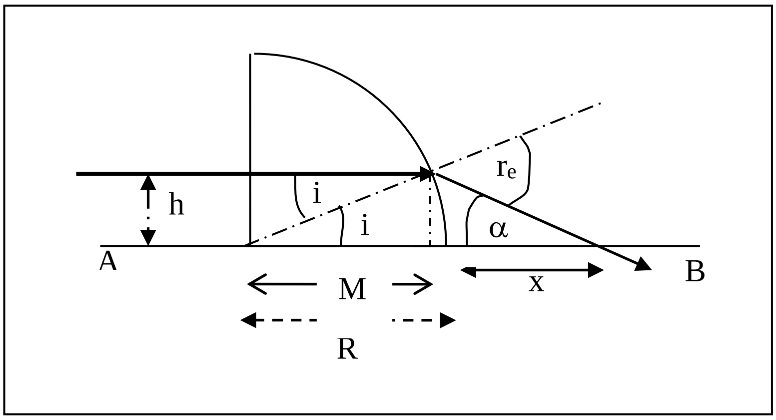


Fig.2

Según la ley de Snell n sen i = 1 sen r_e

De la figura 2 se deduce: $\text{sen } i = \dfrac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r_e = \dfrac{nh}{R} \quad ; \quad \text{tag } i = \dfrac{h}{M}$

$$\text{tag } \alpha = \frac{h}{x + R - M} = \frac{h}{x + R - \dfrac{h}{\text{tag } i}}$$

Pero el ángulo alfa es igual a $\alpha + i = r_e \quad \Rightarrow \quad \alpha = r_e - i$

$$\text{tag}\ (r_e - i) = \frac{h}{x + R - \dfrac{h}{\text{tag}\ i}}\quad (1)$$

Cuando r_e = 90º se obtendrá el valor de x mínimo

$$\text{tag}\ (90º - i) = \frac{h}{x_{min} + R - \dfrac{h}{\text{tag}\ i}} \Rightarrow \frac{1}{\text{tag}\ i} = \frac{h}{x_{min} + R - \dfrac{h}{\text{tag}\ i}} \Rightarrow x_{min} = h\left(\text{tag}\ i + \frac{1}{\text{tag}\ i}\right) - R \Rightarrow$$

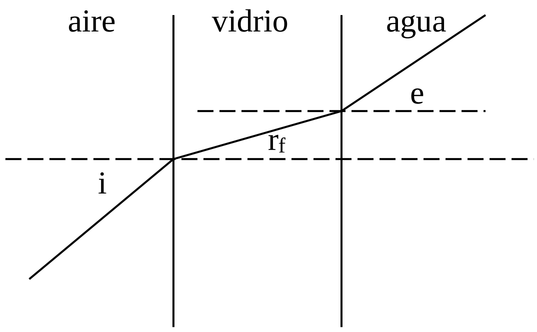
$$x_{min} = R\ \text{sen}\ i\left(\frac{1 + \text{tag}^2 i}{\text{tag}\ i}\right) - R = R\ \text{sen}\ i\left(\frac{1}{\cos^2 i\ \ \text{tag}\ i}\right) - R = R\left(\frac{1}{\cos\ i} - 1\right)$$

El valor del ángulo de incidencia para el que r_e = 90º, se calcula a partir de la ley de Snell $\quad n\ \text{sen}\ i = \text{sen}\ 90 \quad ; \quad \text{sen}\ i = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\ i = \sqrt{1 - \text{sen}^2 i} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$x_{min} = 5 * \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right) = 1{,}708\ \ \text{cm}$$

2.-Sobre la pared lateral de un acuario de vidrio y desde el aire se envía un rayo luminoso con un cierto ángulo de incidencia. Se pide determinar si existe un ángulo de incidencia tal que después de penetrar en el vidrio no lo haga en el agua.
Índice de refracción del vidrio 1,5 y del agua 1,33.

El esquema de la marcha de los rayos es el de la figura

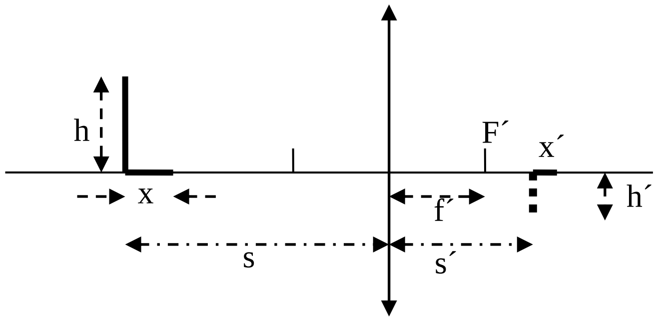


La aplicación de la ley de Snell

$$1 \ \text{sen} \ i = 1{,}5 \ \text{sen} r_f \quad ; \quad 1{,}5 \ \text{sen} r_f = 1{,}33 \ \text{sen} \ e$$

Si queremos que el rayo no penetre en el agua entonces e = 90º, luego el seno del ángulo de incidencia tenía que valer 1,33 y eso no es posible, en consecuencia, cualquiera que sea el ángulo de incidencia el rayo llegará al agua.

3.- Un objeto en forma de L se encuentra a la izquierda de una lente convergente de distancia focal f´. Las dimensión vertical del objeto el h y la horizontal x, tal como se indica en la figura.



El aumento transversal es $\beta = \dfrac{h'}{h}$ y el longitudinal $\alpha = \dfrac{x'}{x}$. Encontrar la relación entre ambos aumentos y en particular cuando x sea muy pequeño comparado con s.

De la figura se deduce que: $\beta = \dfrac{h'}{h} = \dfrac{s'}{s}$

La ecuación de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{s}=\frac{f'+s}{f's} \quad\Rightarrow\quad s'=\frac{f's}{f'+s}$$

$$\beta=\frac{\dfrac{f's}{f'+s}}{s}=\frac{f'}{f'+s}$$

Aplicando de nuevo la ecuación de las lentes delgadas:

$$-\frac{1}{s-x}+\frac{1}{s'+x'}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s'+x'}=\frac{1}{f'}+\frac{1}{s-x}=\frac{f'+s-x}{f'(s-x)} \quad\Rightarrow\quad x'=\frac{f'(s-x)}{f'+s-x}-s' \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'=\frac{f'(s-x)}{f'+s-x}-\frac{f's}{f'+s}=\frac{(f's-f'x)(f'+s)}{(f'+s)(f'+s-x)}=\frac{f'^2s+f's^2-f'^2x-f'xs-f'^2s-f's^2+f'xs}{(f'+s)(f'+s-x)}\Rightarrow$$

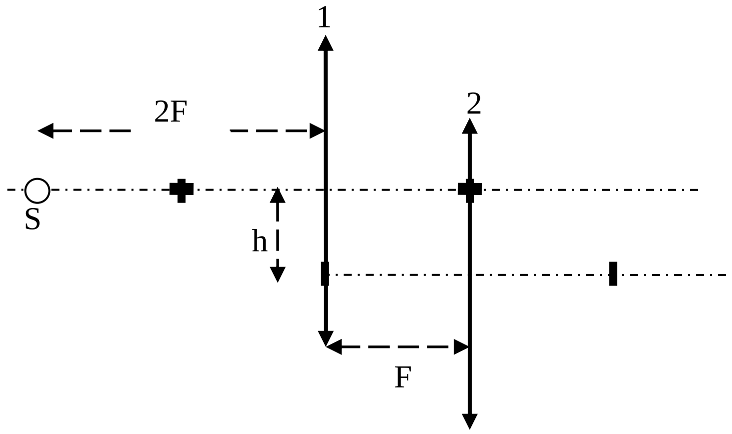
$$x'=\frac{-f'^2x}{(f'+s)(f'+s-x)}$$

$$\alpha=\frac{x'}{x}=\frac{-f'^2}{(f'+s)(f'+s-x)}=\frac{-f'^2(f'+s)}{(f'+s)^2(f'+s-x)}=\frac{-\beta^2}{\dfrac{(f'+s-x)}{(f'+s)}}=\frac{-\beta^2}{1-\dfrac{x}{f'+s}}$$

En el caso de que x sea muy pequeño frente s , la fracción del denominador es un número muy pequeño , y para este caso

$$\alpha=\beta^2$$

4.- Dos lentes convergentes tienen la misma distancia focal F y están situadas a una distancia F una de la otra. La segunda lente está a una altura h por debajo de la primera tal como indica la figura.



En el eje principal de la lente 1 está situado un punto luminoso S a una distancia 2F de dicha lente. Calcular la distancia en línea recta entre S y la imagen S_1 que forman las dos lentes.

Para determinar donde se forma la imagen de S_1 escogemos dos rayos luminosos procedentes de S. Uno que se desplaza por el eje principal de 1 y otro que se dirige desde S a la lente 1 apuntando al lugar donde se encuentra el foco objeto de la lente 2.

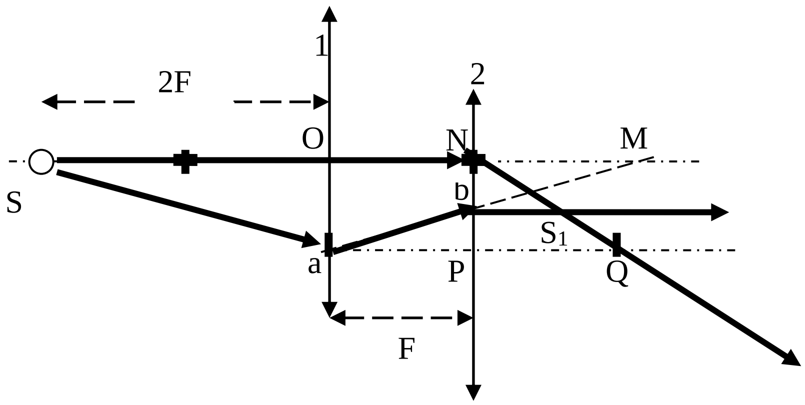
El primer rayo atraviesa la lente 1 sin desviarse y llega a la dos, en ella se refracta y pasa por el foco imagen de la lente 2 ya que es un rayo paralelo a su eje principal.

Si sólo estuviese la lente 1 podremos calcular dónde se forma la imagen de S, aplicando las formulas de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{-2F}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_2}=\frac{1}{F}-\frac{1}{2F} \quad \Rightarrow \quad s_2=2F$$

En la figura ese lugar está señalado con la letra M.

El segundo rayo procede de S y llega a la lente1 en el foco objeto de la lente 2 , se refracta y camina hacia el punto M , pero en su camino se encuentra con la lente 2, para ésta es un rayo que procede del foco objeto y por tanto después de atravesar la lente sale paralelo a su eje principal. En la figura se observa dónde se cortan los dos rayos considerados y ese es el lugar donde se forma la imagen S_1.



Comparando los triángulos semejante aOM y BNM

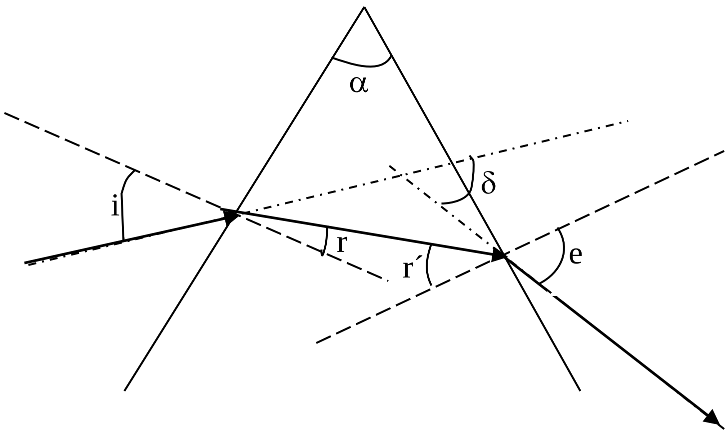
$$\frac{aO}{OM} = \frac{bN}{NM} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{2F} = \frac{bN}{F} \quad \Rightarrow \quad bN = \frac{h}{2}$$

Comparando los triángulos semejantes bNS_1 y PNQ

$$\frac{Nb}{bS_1} = \frac{NP}{PQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{h}{2}}{bS_1} = \frac{h}{F} \quad \Rightarrow \quad bS_1 = \frac{F}{2}$$

$$SS_1 = \sqrt{\left(2F + F + \frac{F}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49F^2 + h^2}$$

5.- Encontrar la relación general entre el ángulo de desviación δ de un prisma, de ángulo α, e índice de refracción n, situado en el aire (n=1) en función de α, i, n, r, r´, e,(ver figura) y a partir de esa ecuación deducir la expresión para el ángulo de desviación mínima.
Determinar el ángulo de incidencia que produce desviación mínima en un prisma de a =60º y n=1,5.



De la figura se deduce que $i - r + e - r' = \delta \quad ; \quad r + r' = \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = i + e - \alpha$

Aplicando la ley de Snell

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r \quad ; \quad n \text{ sen } r' = \text{sen } e$$

$$\text{sen } i + \text{sen } e = 2 \text{ sen}\frac{i+e}{2}\cos\frac{i-e}{2} = n\left(\text{sen } r + \text{sen } r'\right)$$

Sustituyendo de (1)

$$2 \text{ sen}\frac{i+e}{2}\cos\frac{i-e}{2} = n\left(\text{sen } r + \text{sen } r'\right) \Rightarrow 2 \text{ sen}\frac{\delta+\alpha}{2} = \frac{n\left(\text{sen } r + \text{sen } r'\right)}{\cos\frac{i-e}{2}} \quad (2)$$

$$\text{sen } r + \text{sen } r' = 2\text{sen}\frac{r+r'}{2}\cos\frac{r-r'}{2} = 2 \text{ sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{r-r'}{2} \quad (3)$$

Llevando (3) a (2)

$$2 \text{ sen}\frac{\delta+\alpha}{2} = \frac{n \cdot 2 \text{ sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-e}{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\frac{\delta+\alpha}{2} = n \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2}\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-e}{2}}$$

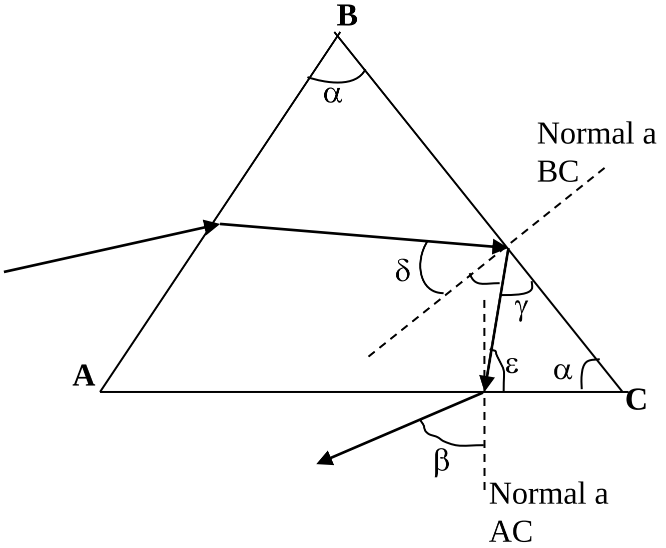
Para que la expresión anterior d sea mínimo el denominador del segundo miembro ha de ser máximo y el máximo valor posible del coseno es la unidad , por tanto eso ocurre cuando i=e,. Además

$$\text{sen } i = n \text{ sen} r \quad ; \quad n \text{ sen} r' = \text{sen } e = \text{sen } i \quad \Rightarrow \quad r = r' \quad \Rightarrow \quad \cos \frac{r - r'}{2} = 1$$

$$\text{sen} \frac{\delta_{min} + \alpha}{2} = n \cdot \text{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{sen} \frac{\delta_{min} + 60^o}{2} = 1{,}5 \cdot \text{sen} \frac{60^o}{2} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \frac{2i - 60 + 60^o}{2} = 48{,}59^o \quad \Rightarrow \quad i = 48{,}59^o$$

6.-Un prisma de vidrio de n =1,5 posee un ángulo α = 60º. Por su cara AB inciden rayos luminosos que llegan a la cara BC, unos se refractan y otros se reflejan. Los que se reflejan llegan a la cara AC y salen al aire formando un cierto ángulo β. Se pide determinar el mayor ángulo β posible.



Los rayos que llegan a la cara BC y se reflejan deben hacerlo con un ángulo δ el cual ha de ser mayor que el ángulo límite, ya que si es menor se refractan en la cara BC.

De la figura se deduce: que el ángulo de incidencia sobre la cara AC vale:
$90\text{-}\varepsilon$ y $\gamma = 90 - \delta$

Según la ley de Snell

$$n \cdot \mathrm{sen}(90 - \varepsilon) = 1 \cdot \mathrm{sen}\beta$$

Para que β sea el mayor ángulo posible es necesario que ε sea el menor posible.

$$\varepsilon + \gamma + \alpha = 180 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 180 - (90 - \delta) - \alpha = 30 + \delta$$

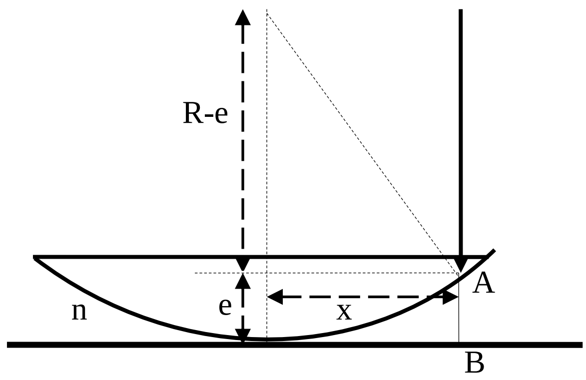
De la última expresión se deduce que el valor mínimo de ε ocurre cuando δ sea mínimo y precisamente el valor mínimo de δ se produce cuando es igual al ángulo límite prisma aire.

$$1{,}5\ \ \mathrm{sen}\,l = 1\ \ \mathrm{sen}90 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}\,l = \frac{1}{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad l = \delta = 41{,}8^{\circ}$$

$$1{,}5 \cdot \mathrm{sen}[90 - (30 + \delta)] = \mathrm{sen}\beta \quad \Rightarrow 1{,}5 \cdot \mathrm{sen}(90 - 71{,}8) = \mathrm{sen}\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 27{,}9^{\circ}$$

7.-El espacio comprendido entre una lente plano-convexa y un vidrio plano (dispositivo para formar anillos de Newton) está lleno de un líquido de índice de refracción n. El radio del tercer anillo brillante observado por reflexión vale 3,32 mm. Determinar el valor de n, sabiendo que el radio de la cara convexa de la lente es 10 m y la luz empleada tiene una longitud de onda de 589 nm.

Los anillos de Newton se forman debido a que el espacio entre la lente y el vidrio crece desde el punto de contacto hacia fuera



Supongamos que el índice de refracción n es mayor que el de la lente y el vidrio plano. Un rayo luminoso que se refleje en A lo hace con un cambio de fase de 180º. El que se refleja en B lo hace sin cambio de fase. La diferencia de caminos ópticos recorridos por ambos rayos es 2ne y producirán una interferencia constructiva si

$$2ne = N\lambda + \frac{1}{2}\lambda \qquad \text{siendo, } N = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \quad (1)$$

Si n fuese menor que el índice de refracción de la lente en A no se produciría cambio de fase pero sí en B, por tanto la expresión anterior es válida para ambos casos.
De la figura se deduce que:

$$R^2 = (R-e)^2 + x^2 = R^2 + e^2 - 2eR + x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2eR - e^2$$

Teniendo en cuenta que el radio de la lente R es mucho mayor que e, podemos escribir:

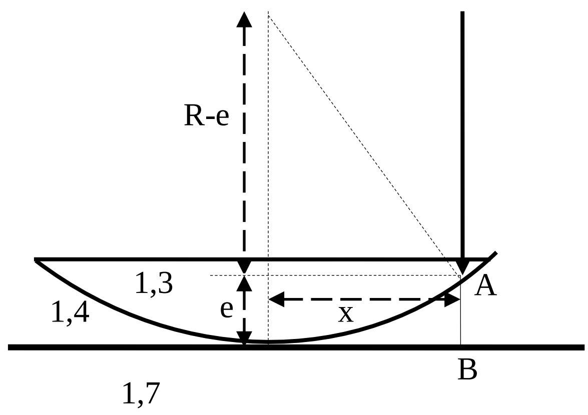
$$e = \frac{x^2}{2R}$$

Ecuación que llevada a (1)

$$2n\frac{x^2}{2R} = N\lambda + \frac{1}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)\lambda R}{n}}$$

$$3{,}32^2 = \frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)589.10^{-6}\cdot 10.10^3}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 1{,}33$$

8.-El espacio comprendido entre una lente plano-convexa y un vidrio plano (dispositivo para formar anillos de Newton) está lleno de un líquido de índice de refracción 1,4. La lente tiene un índice de 1,3 y el vidrio donde se apoya de 1,7. El quinto anillo brillante visto por reflexión vale 2,83 mm ; determinar la longitud de onda de la luz.
Si en el dispositivo anterior se elimina el líquido de índice de refracción 1,4 y se sustituye por aire n=1, y se emplea la misma luz anterior, calcular el radio del quinto anillo



El rayo que se refleja en A sufre un cambio de fase de 180º y el que se refleja en B también, es como avanzar una longitud de onda.
Se producirán franjas brillantes cuando

$$2ne= m\lambda$$

siendo m un entero que vale 1,2....

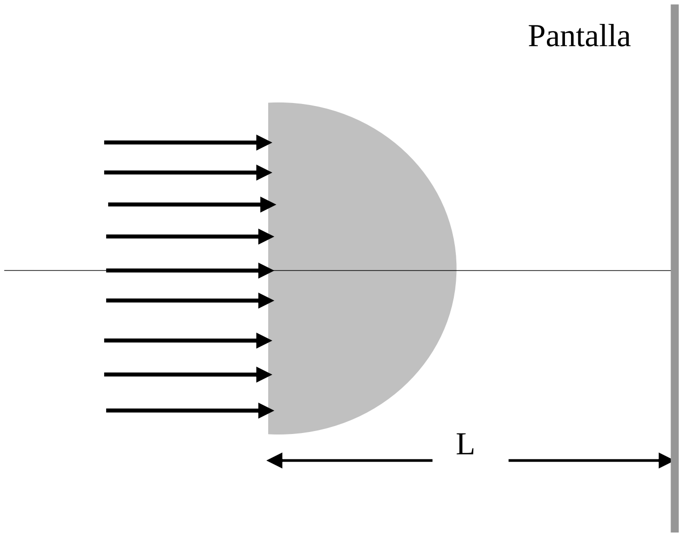
De la figura se deduce (ver problema 7), teniendo en cuenta que e<< R , $e = \frac{x^2}{2R}$

$$\frac{2nx^2}{2R} = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{nx^2}{mR} = \frac{1{,}4 \cdot 2{,}83^2}{5 * 4.10^3} = 5{,}61.10^{-4}\,\text{mm}$$

La segunda parte del problema es la misma que el anterior problema 7, ya que se produce un cambio de fase de 180º en B.

$$x = \sqrt{\frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda R}{n}} = \sqrt{\frac{\left(4 + \frac{1}{2}\right)5{,}61.10^{-4} \cdot 4.10^3}{1}} = 3{,}18 \quad \text{mm}$$

9.-Sobre una semiesfera de vidrio, de índice de refracción n y radio r, se hace incidir un haz de rayos luminosos en la forma que indica la figura inferior



Se pide determinar el radio de la mancha luminosa que aparece en la pantalla en función de L, r y n.

Los rayos penetran en la semiesfera y llegan a la superficie esférica con distintos ángulos. Los que lleguen con ángulo menor que el límite salen al exterior de la esfera y llegan a la pantalla, lo que superen el ángulo límite no pueden salir al exterior y por tanto no alcanzan la pantalla.
En la figura 1 el ángulo α es el ángulo límite al que corresponde un refractado de 90º, el rayo correspondiente es tangente a la superficie esférica. El $\delta>\alpha$ se refleja.

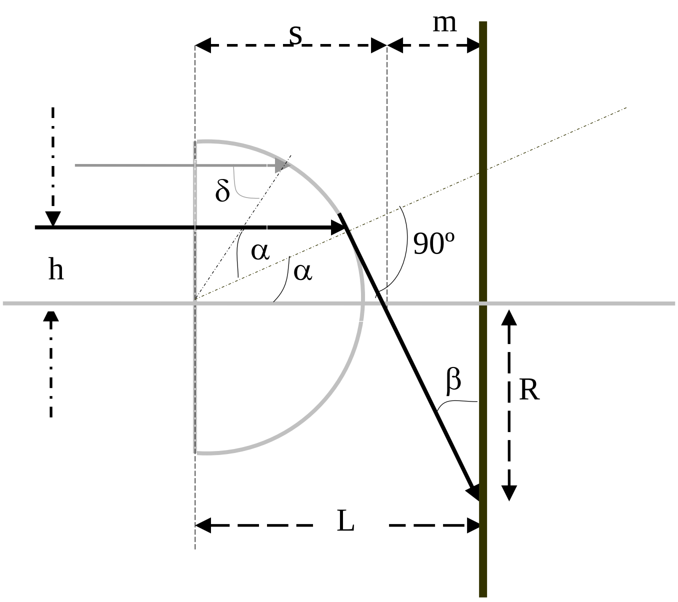


Fig.1

Por ser α el ángulo límite se cumple que:

$$n\ \text{sen}\alpha = 1\ \text{sen}\ 90 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \cos\ \alpha = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{tag}\ \alpha = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

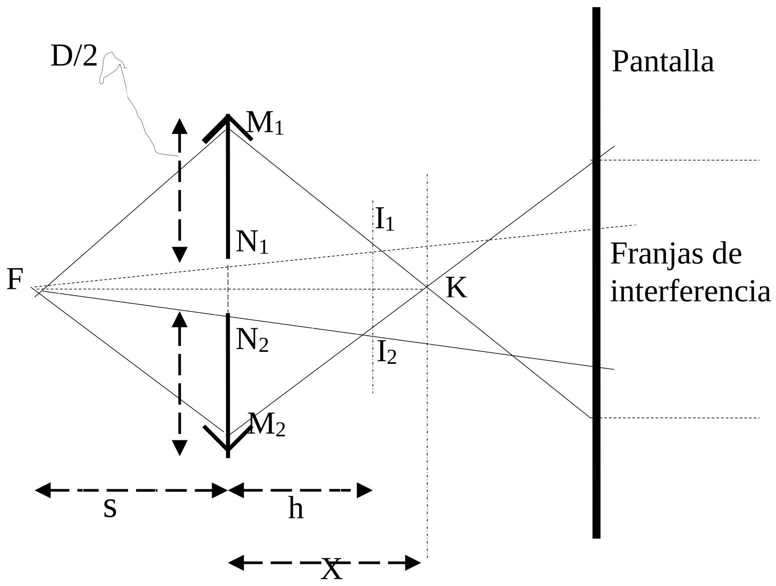
De la figura 1 se deduce que el ángulo α es igual al β, ya que sus lados son entre sí perpendiculares, además se cumple:

$$\text{sen}\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r\ \text{sen}\ \alpha \quad ; \quad \text{tag}\alpha = \text{tag}\beta = \frac{m}{R} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \quad \Rightarrow \quad R = m\sqrt{n^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R = (L-s)\sqrt{n^2-1} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow s = \frac{nr}{\sqrt{n^2-1}}$$

$$R = \left(L - \frac{nr}{\sqrt{n^2-1}} \right)\sqrt{n^2-1} = L\sqrt{n^2-1} - nr$$

10.- Una lente convergente de distancia focal 50 cm y diámetro D = 5 cm, se corta por la mitad y ambas mitades se separan una distancia de 5 mm. De esta manera se construye una bilente de Billet que permite obtener interferencias de la luz. La figura inferior muestra esquemáticamente el proceso. F es un foco luminoso situado a s = 100 cm de la lente, y cada una de las partes de la lente forma una imagen en I_1 e I_2, los cuales son focos coherentes: a partir del punto K interfieren los dos haces de luz los cuales al llegar a la pantalla forman figuras de interferencia. Determinar la distancia de K a la lente



Cada una de las mitades de la lente forma una imagen real, éstas son I_1 e I_2.La distancia N_1N_2 = d = 5 mm es muy pequeña, por lo que calculamos las posiciones de I_1 e I_2 mediante la fórmula de una lente delgada.

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \quad -\frac{1}{-100}+\frac{1}{h}=\frac{1}{50} \Rightarrow \quad \frac{1}{h}=\frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad h=100 \ \text{ cm}$$

Para calcular la distancia en vertical I_1I_2 comparamos los triángulos semejantes FN_1N_2 y FI_1I_2

$$\frac{d}{s}=\frac{I_1I_2}{s+h} \Rightarrow I_1I_2=\frac{d(s+h)}{s}=\frac{0{,}5\cdot 200}{100}=1 \ \text{ cm}$$

Para calcular la distancia X comparamos los triángulos semejantes KM_1M_2 y KI_1I_2.

$$\frac{M_1M_2}{X}=\frac{I_1I_2}{X-h} \Rightarrow \quad \frac{5+0{,}5}{X}=\frac{1}{X-100} \Rightarrow \quad 5{,}5X-550=X \Rightarrow \quad X=122 \ \text{ cm}$$

11.-Un prisma recto isósceles tiene sus caras perpendiculares plateadas. Si un rayo de luz incide sobre la cara hipotenusa con un ángulo arbitrario. Demostrar que el rayo incidente y el emergente son paralelos.

La figura inferior indica la marcha de la luz .La figura 1, a propósito, es errónea, pues admitimos que todavía no hemos demostrado lo que piden en el problema.

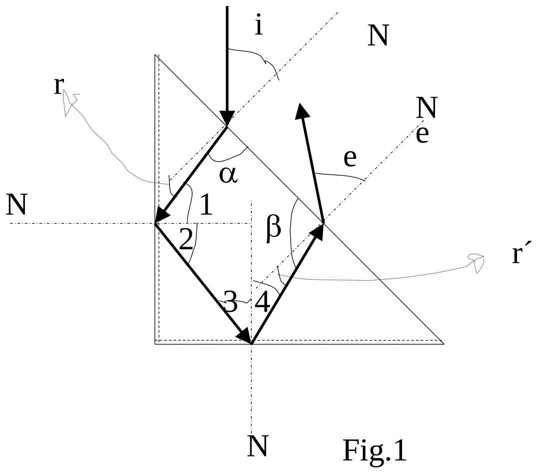


Fig.1

Designamos las siguientes magnitudes.
i ángulo de incidencia sobre la hipotenusa
r ángulo de refracción
n_1 índice del medio exterior al prisma
n_2 índice de refracción del prisma
1 y 2 ángulos de incidencia y reflexión sobre la primera cara plateada
3 y 4 ángulos de incidencia y reflexión sobre la segunda cara plateada.
e, ángulo de emergencia de la luz
Cualquier normal N es perpendicular a la cara y por tanto el ángulo que forma con ella es de 90º
Si demostramos que el ángulo r es igual al r´, entonces se deduce, a partir de la ley de Snell,

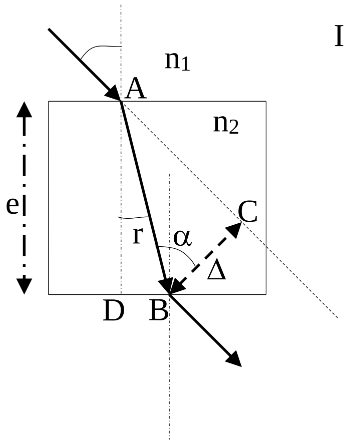
$$\left.\begin{aligned} n_1 \operatorname{sen} i &= n_2 \operatorname{sen} r \\ n_2 \operatorname{sen} r' &= n_1 \operatorname{sen} e \end{aligned}\right\}$$

que i = e y por tanto los rayos incidentes y emergentes son paralelos.
Por las leyes de la reflexión se cumple que $\hat{1} = \hat{2}$ y $\hat{3} = \hat{4}$
De la observación de la figura 1 se deduce que $\hat{2} + \hat{3} = 90^{o}$ y junto con la relaciones anteriores $\hat{1} + \hat{4} = 90^{o}$. Sumando se llega a $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180^{o}$.
Los rayos de luz dentro del prisma forman un polígono convexo de cuatro lados, cuyos ángulos interiores suman 4 ángulos rectos

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \alpha + \beta = 360^{o} \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = 180$$

Volviendo a la figura 1 se deduce $\alpha + r = 90^{o}$ y $\beta - r' = 90^{o}$
Combinado con la ecuación anterior $(90 - r) + (90 + r') = 180 \;\Rightarrow\; r = r'$

12.-Un rayo de luz incide con un ángulo i sobre una lámina de caras paralelas de espesor e con índice de refracción n_2. El medio que rodea a la lámina tiene un índice de refracción n_1. El rayo emergente se desplaza lateralmente Δ, respecto del incidente, tal como indica la figura inferior.



Demostrar que $\boldsymbol{\Delta = e\ \mathrm{sen}\,i\left(1-\dfrac{n_1\ \cos i}{\sqrt{n_2^2-n_1^2\ \mathrm{sen}^2 i}}\right)}$

De acuerdo con la ley de Snell $n_1\ \mathrm{sen}\,i = n_2\ \mathrm{sen}\,r$ (1)

En el triángulo ABC, $\cos\alpha = \dfrac{\Delta}{AB}$; en el triángulo ADB , $\mathrm{tag}\,r = \dfrac{DB}{e}$

$$AB = \sqrt{e^2+DB^2} = \sqrt{e^2+e^2\mathrm{tag}^2 r}$$

En el triángulo ADB

$$\mathrm{sen}(i-r) = \frac{\Delta}{AB} \quad\Rightarrow\quad \Delta = \mathrm{sen}(i-r)\cdot e\sqrt{1+\mathrm{tag}^2\,r}$$

$$\Delta = (\mathrm{sen}\,i\ \cos r - \cos i\ \mathrm{sen}\,r)\cdot e\cdot\sqrt{1+\mathrm{tag}^2 r} = \left(\mathrm{sen}\,i\ \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 r} - \cos i\ \mathrm{sen}\,r\right)e\cdot\sqrt{1+\mathrm{tag}^2 r}$$

De la ecuación (1) $\mathrm{sen}\,r = \dfrac{n_1\,\mathrm{sen}\,i}{n_2}$

$$\sqrt{1+\mathrm{tag}^2 r} = \sqrt{1+\frac{\quad}{\cos^2 r}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}^2 r+\cos^2 r}{\cos^2 r}} = \frac{1}{\cos r}$$

Llevando estas dos ecuaciones a Δ

$$\Delta = \left(\operatorname{sen} i \sqrt{1 - \left(\frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}{n_2^2} \right)} - \cos i \, \frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2} \right) e \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}{n_2^2}}} = e \operatorname{sen} i - e \cos i \, \frac{\frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2}}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}{n_2^2}}} \Rightarrow$$

$$\Delta = e \operatorname{sen} i - e \cos i \, \frac{\frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2}}{\frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}}{n_2}} = e \operatorname{sen} i - e \cos i \, \frac{n_1 \operatorname{sen} i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}} = e \operatorname{sen} i \left(1 - \frac{n_1 \cos i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}} \right)$$

13.-Un sistema óptico consta de dos lentes de la misma distancia focal, una convergente y la otra divergente, separadas entre sí una distancia a y con el mismo eje óptico. Si desde un objeto muy lejano llega la luz al sistema incidiendo primero en la lente divergente se forma una imagen, pero si la luz incide primero sobre la lente convergente la imagen aparece desplazada 20 cm. Calcular la distancia focal de las lentes.

Como la luz proviene de un objeto muy lejano la distancia a la lente divergente es infinita y la imagen que forma esta lente del objeto estará en la distancia focal imagen de la lente divergente (recuérdese que esta lente tiene las distancias focales objeto e imagen cambiadas) Esta imagen es objeto para la lente convergente y distará de ella una distancia $\left|-f'\right|+a = f'+a$, siendo f' la distancia focal de la lente divergente.

Aplicando la ley de las lentes delgadas a la lente convergente

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow -\frac{1}{-(f'+a)}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{(f'+a)} \quad \Rightarrow \quad s'=\frac{f'(f'+a)}{a}$$

Si la luz incide desde el infinito sobre la lente convergente, esta lente formará una imagen a su derecha a una distancia f´, esta imagen es objeto para la lente divergente y distará de ella a-f´. Aplicando para la lente divergente la ley de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow -\frac{1}{-(a-f')}+\frac{1}{s''}=-\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \frac{1}{s''}=-\frac{1}{f'}-\frac{1}{(a-f')} \quad \Rightarrow \quad s''=\frac{f'(f'-a)}{a}$$

De acuerdo con el enunciado del problema

$$s'-s''=\frac{f'(f'+a)-f'(f'-a)}{a}=2f'=20 \quad \Rightarrow \quad f'=10\,\text{cm}$$

14.- Sobre una película transparente de espesor 5,2.10^{-7} m incide luz blanca con un ángulo de 31º respecto de la normal. El índice de refracción de la película es 1,35. Determinar la longitud de onda de la luz, en la zona del espectro visible (380-780 nm), que no aparece en la luz reflejada.

En la figura 1 se observa que el rayo AB penetra en la película mientras que el rayo DE se refleja. Ambos rayos interfieren debido a que hay diferencia en el camino óptico recorrido por ellos.

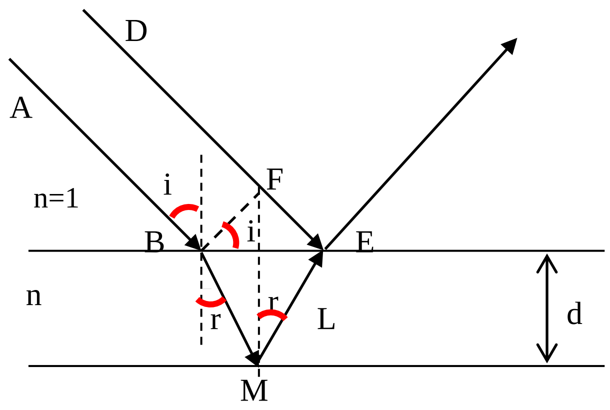


Fig.1

La diferencia de caminos recorrido por los dos rayos es: $2nL - FE + \frac{\lambda}{2}$. En la expresión anterior aparece el termino de media longitud de onda debido a que el rayo DE se refleja en un medio de mayor índice de refracción y eso supone una inversión de fase por lo que es preciso sumar esa media longitud de onda. Se producirá una interferencia destructiva si la diferencia de caminos ópticos es un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

$$2nL - FE + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

De la figura 1 se deduce:

$$FE = BE\,\mathrm{sen}\,i \quad ; \quad \mathrm{tag}\,r = \frac{\frac{BE}{2}}{d} \Rightarrow BE = 2d\,\mathrm{tag}\,r \quad \Rightarrow FE = 2d\,\mathrm{tag}\,r \cdot \mathrm{sen}\,i == 2d\frac{\mathrm{sen}\,r}{\cos r}\mathrm{sen}\,i$$

$$\mathrm{sen}\,r = \frac{\frac{BE}{2}}{L} \quad \Rightarrow L = \frac{BE}{2\,\mathrm{sen}\,r} = \frac{2d\,\mathrm{tag}\,r}{2\mathrm{sen}\,r} = \frac{d}{\cos r} = \frac{d}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 r}}$$

Según la ley de Snell: $1\cdot \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r \Rightarrow \operatorname{sen} r = \dfrac{\operatorname{sen} i}{n}$, llevando esta ecuación a las dos anteriores:

$$FE = 2d\frac{\frac{\operatorname{sen} i}{n}}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}}\cdot \operatorname{sen} i = \frac{2d\cdot \operatorname{sen}^2 i}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}$$

$$L == \frac{d}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}} = \frac{d\,n}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}$$

$$2nL - FE + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2n\frac{d\,n}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}} - \frac{2d\operatorname{sen}^2 i}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}} = \frac{\lambda}{2}(2k+1-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2d\left(n^2-\operatorname{sen}^2 i\right)}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2d\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}{k} = \frac{2\cdot 5{,}2.10^{-7}\sqrt{1{,}35^2-\operatorname{sen}^2 31}}{k} = \frac{1{,}30.10^{-6}}{k}$$

Si en la ecuación anterior damos hacemos k=2, resulta: λ =6,50.10^{-7} m = 650 nm
y si hacemos k =3 , resulta : λ =4,33.10^{-7} m = 433 nm

15.-La punta de un cono con un ángulo 2α se examina con una lente convergente de distancia focal imagen f´, situado a la distancia a. El eje principal de la lente coincide con el eje de simetría del cono. Calcular el ángulo bajo el cual se ve el del cono a través de la lente.

En la figura 1se hace una imagen esquemática del problema

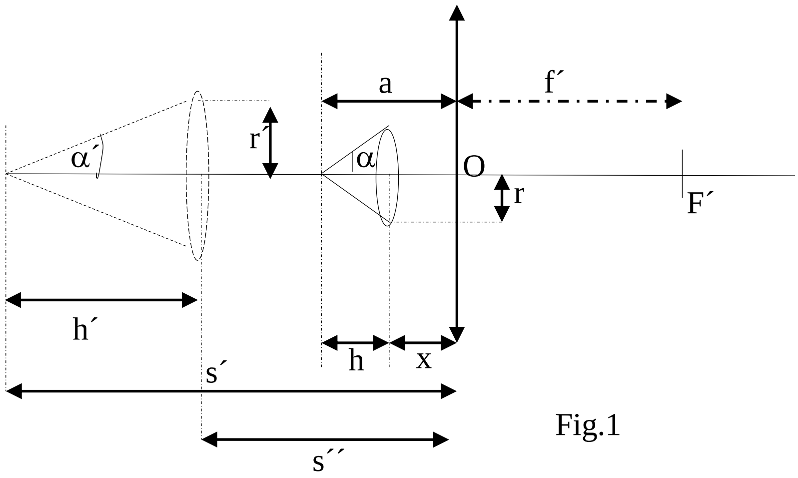


Fig.1

La altura del cono se designa por h y el radio del círculo por r. El centro de la base del cono dista, en valor absoluto, x de la lente, siendo x= a-h La imagen de la punta del cono dista, en valor absoluto de la lente, s´ y el centro de la base s´´. Por r´ se designa al radio de la imagen del cono y por h´ su altura.
Utilizamos como criterio de signos que el punto O es el origen de las medidas y las distancias de O a la izquierda son negativas y a la derecha positivas, según este criterio la ecuación de las lentes delgadas se escribe:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$$

Imagen de la punta del cono

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}\Rightarrow \quad \frac{1}{f'}+\frac{1}{a}=\frac{1}{s'}\Rightarrow \quad s'=\frac{f'a}{a+f'}$$

Imagen del centro de la base del cono

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{s''}=\frac{1}{f'}\Rightarrow \quad \frac{1}{f'}+\frac{1}{x}=\frac{1}{s''}\Rightarrow \quad s''=\frac{f'x}{x+f'}$$

$$h' = s' - s'' = \frac{f'a}{a+f'} - \frac{f'x}{x+f'} = \frac{f'ax + f'^2 a - f'ax - f'^2 x}{(a+f')(x+f')} = \frac{f'^2 (a-x)}{(a+f')(x+f)}$$

$$\frac{r'}{s''} = \frac{r}{x} \Rightarrow r' = \frac{r\,s''}{x} = \frac{r\,f'}{x+f'}$$

La tangente del ángulo α´ vale:

$$\operatorname{tag}\alpha' = \frac{r'}{h'} = \frac{\dfrac{r\,f'}{x+f'}}{\dfrac{f'^2 (a-x)}{(a+f')(x+f')}} = \frac{r\,f'(a+f')(x+f')}{f'^2 (a-x)(x+f')} = \frac{r\,f'(a+f')}{f'^2 (a-x)} = \frac{r(a+f')}{f'\ (a-x)}$$

Sustituimos x por a-h

$$\operatorname{tag}\alpha' = \frac{r'}{h'} = \frac{r(a+f')}{f'\ (a-x)} = \frac{r(a+f')}{f(a-a+h)} = \frac{r(a+f')}{f'h} \quad \Rightarrow \qquad \operatorname{tag}\alpha' = \left(\frac{a}{f'} + 1\right)\operatorname{tag}\alpha'$$

16.-Calcular la distancia entre los máximos de las franjas de interferencia producidas por una fuente de luz de longitud de onda 550 nm, colocada a b=20 cm de un biprisma de Fresnel, de índice de refracción n=1,46 y ángulo α = 2º. La distancia del prisma a la pantalla es de D = 2m.

En la figura 1 se ha hecho un esquema (no a escala) en el que se destaca la marcha de los rayos desde los focos virtuales S_1 y S_2. La distancia S_1S_2 = a. En la pantalla se ha elegido un punto arbitrario A. Si la diferencia de marcha d_2-d_1 es un múltiplo entero de la longitud de onda, en A se producirá un máximo.

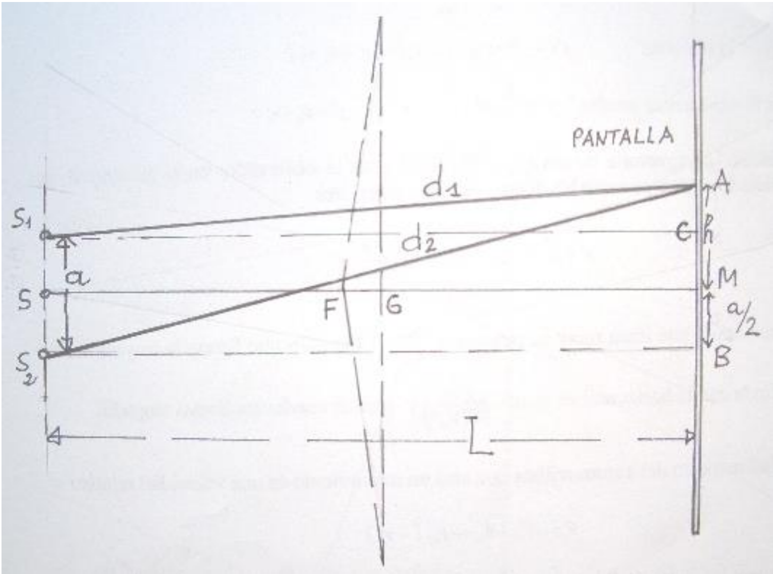


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$d_2^2 = L^2 + \left(h + \frac{a}{2}\right)^2 \;;\; d_1^2 = L^2 + \left(h - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow d_2^2 - d_1^2 = a\,h \Rightarrow (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2\,a\,h \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d_2 - d_1 = \frac{2\,a\,h}{(d_2 + d_1)} = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{m\lambda(d_2 + d_1)}{2\,a}$$

En la ecuación anterior se puede sustituir d_2+d_1 por 2 L=2 (D+b)

$$h = \frac{m\lambda(D + b))}{a} \quad (1)$$

Para obtener h es preciso conoce a, esto es, la distancia entre los focos virtuales S_1 y S_2.

En la figura 2 se ha hecho un esquema en la que se contempla la mitad superior de un biprisma de Fresnel. Para poder hacer el dibujo, el ángulo del prisma se ha hecho de 20º en lugar de los 2º que dice el problema.

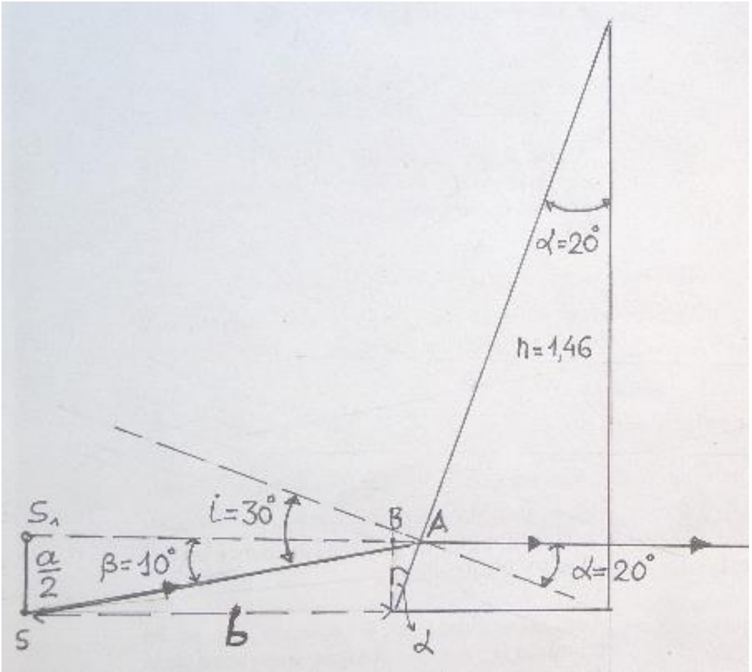


Fig.2

Queremos que el ángulo de refracción r en la primera cara del prisma sea 20º igual al ángulo del prisma.

$$1 \cdot \operatorname{sen} i = 1{,}46 \cdot \operatorname{sen} 20^{\circ} \quad \Rightarrow \quad i = 30^{\circ}$$

Teniendo en cuenta que en un prisma $\alpha = r + r' \Rightarrow \; r' = 0^{\circ}$ .Por tanto el rayo penetra en la dirección normal de la segunda cara y su prolongación en S_1..De la figura 2 se deduce:

$$\beta = i - \alpha = 30 - 20 = 10^{\circ} \;\; ; \;\; \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(i - \alpha) = \operatorname{sen}10^{\circ} = \frac{\frac{a}{2}}{SA} \approx \frac{\frac{a}{2}}{b}$$

Dado que el biprisma de Fresnel se caracteriza porque el ángulo alfa es muy pequeño, en el problema 2º, podemos escribir:

$$1 \cdot i = n\,\alpha \;\Rightarrow\; \beta = i - \alpha = n\,\alpha - \alpha = \alpha(n-1) \Rightarrow \beta = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \alpha(n-1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; a = 2(n-1)\alpha\, b$$

Llevando el valor de a a la ecuación (1)

$$h = \frac{m\lambda(D+b))}{2(n-1)\alpha b} = \frac{1 \cdot 550.10^{-9} \cdot (2+0{,}2)}{2 \cdot (1{,}46-1) \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14}{180} \cdot 0{,}2} = 1{,}88.10^{-4}\,\mathrm{m}$$

17.- Un haz paralelo de electrones que ha sido acelerado mediante un diferencia de potencial U =25 V, incide normalmente sobre un diafragma con dos rendijas estrechas distantes entre sí, d= 50 μm. Detrás del diafragma y a una distancia D = 1 m se coloca una pantalla. Se pide calcular la distancia entre dos máximos adyacentes del cuadro de difracción.
Datos : Constante de Planck = 6,6.10^{-34} Js; masa del electrón 9,1.10^{-31} kg, carga del electrón 1,6.10^{-19} C

Según la teoría de De Broglie las partículas pueden exhibir comportamiento ondulatorio siendo la longitud de onda asociada:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

h es la constante de Planck , m la masa de la partícula y v su velocidad.

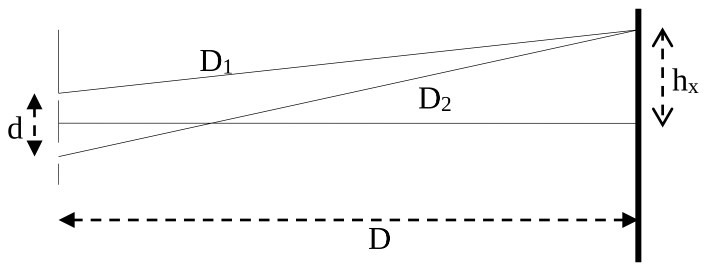
La energía que adquieren los electrones cuando son acelerados es

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\,U \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,q\,U}{m}}$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2\,q\,U}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2\,m\,q\,U}}$$

En la figura siguiente se representa la marcha de los electrones después de atravesar las dos rendijas.



D_1 y D_2 son las distancias recorridas por los electrones según que atraviesen una u otra rendija, h_x es la distancia desde el centro de la pantalla hasta la posición de un máximo. Se cumple:

$$D_2 - D_1 = x\lambda$$

x es un número entero.

$$D_1^2 = D^2 + \left(h_x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad ; \quad D_2^2 = D^2 + \left(h_x + \frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \quad D_2^2 - D_1^2 = 2\,d\,h_x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D_2 + D_1)(D_2 - D_1) = 2\,d\,h_x \quad \Rightarrow \quad D_2 - D_1 = \frac{2\,d\,h_x}{D_2 + D_1} = x\,\lambda$$

La suma de las distancias D_2+D_1 es aproximadamente igual a 2D.

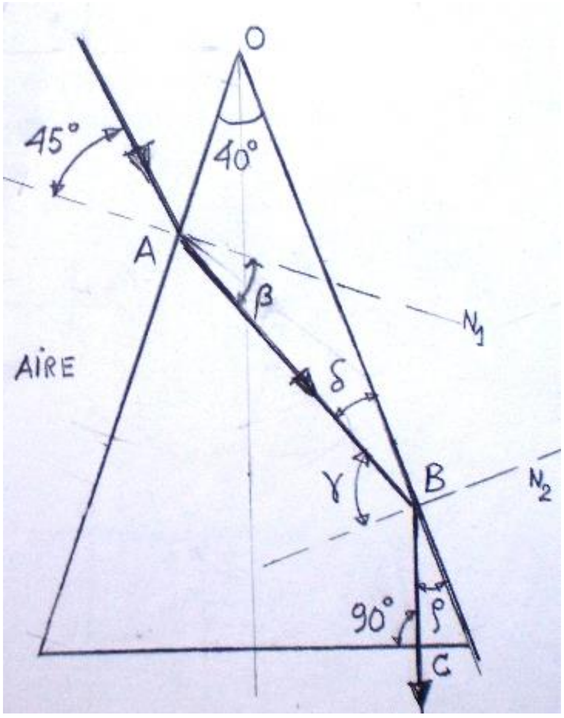
$$h_x = \frac{x\lambda D}{d}$$

El máximo siguiente se producirá a una distancia $h_x = \frac{x\lambda D}{d}$. La distancia entre esos dos máximos es:

$$h_{x+1} - h_x = \Delta x = \frac{\lambda D}{d}(x+1-x) = \frac{\lambda D}{d} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2mqU}}}{d} = \frac{6{,}6.10^{-34}}{50.10^{-6}\sqrt{2\cdot 9{,}1.10^{-31}\cdot 1{,}6.10^{-19}\cdot 25}}$$

$$\Delta x = 4{,}9.10^{-6}\,\mathrm{m} = 4{,}9\,\mu\mathrm{m}$$

18. En la figura inferior se indica la marcha de un rayo monocromático de luz que incide sobre un prisma isósceles.



Determinar el índice de refracción del mencionado prisma.

Aplicamos la ley de Snell

$$1 \cdot \operatorname{sen} 45 = n \operatorname{sen}\beta \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2n}$$

La bisectriz del ángulo del prisma es paralela al rayo BC, por lo que $\rho = 20^{\circ}$

$$\gamma + \delta = 90^{\circ} \quad \text{y} \quad \gamma + \rho = 90^{\circ} \quad \Rightarrow \delta = \rho = 20^{\circ}$$

Del triángulo OAB se deduce

$$40 + (90 + \beta) + \delta = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 50 - \delta = 30^{\circ}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2n} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{2}$$

19. La distancia entre el objeto y la imagen en una lente convergente es 12,5 cm. El objeto tiene un tamaño de 5 mm siendo el aumento lateral β=-1,5. Determinar las distancias s y s´ de la lente al objeto y a la imagen y la distancia focal de la lente.

De la interpretación del aumento lateral se deduce que la imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto, por consiguiente el objeto está situado a una distancia de la lente mayor que la focal.

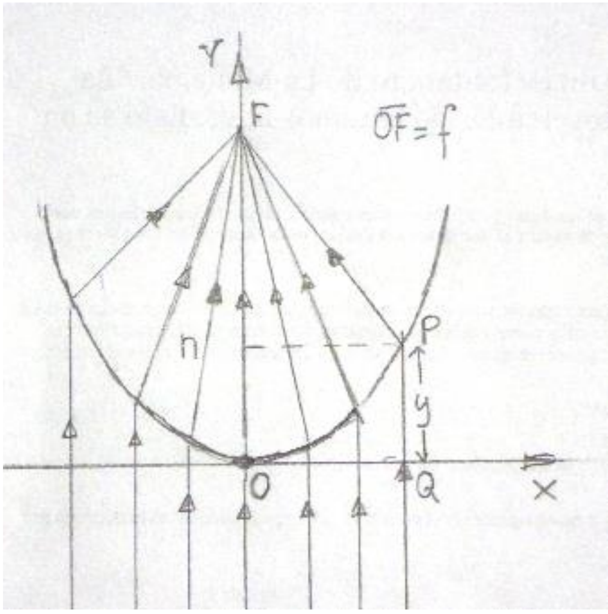
$$\beta = -1{,}5 = \frac{y´}{y} = \frac{s´}{s} \Rightarrow s´ = -1{,}5 \cdot s \quad -s + s´ = 12{,}5 \ \Rightarrow -s - 1{,}5s = 12{,}5 \quad \Rightarrow \quad s = -5\,\mathrm{cm}$$

$$\Rightarrow \ s´ = 12{,}5 + s = 12{,}5 - 5 = 7{,}5\,\mathrm{cm}$$

Según la ley de la lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s´} = \frac{1}{f´} \ \Rightarrow \ -\frac{1}{-5} + \frac{1}{7{,}5} = \frac{1}{f´} = \frac{7{,}5 + 5}{37{,}5} \ \Rightarrow \ f´ = 3\,\mathrm{cm}$$

20.-Un haz luminoso paralelo incide desde el vacío sobre una superficie que separa el vacío de una zona con índice de refracción n. El haz penetra en la zona de índice n y se concentra en un punto F, el cual dista f del punto O. a) Calcular la ecuación de la superficie. b) Dibujar la curva para n=1,5.



a) Designamos con c la velocidad de la luz en el vacío y con v la en el medio siendo n=c/v.

El rayo OF tarda en llegar al punto f un tiempo $t_1 = \frac{f}{v} = \frac{nf}{c}$

El rayo QPF, cuya distancia OQ designamos con x, emplea un tiempo

$$t_2 = \frac{QP}{c} + \frac{PF}{v} = \frac{y}{c} + \frac{\sqrt{(f-y)^2 + x^2}}{v} = \frac{y}{c} + \frac{n\sqrt{(f-y)^2 + x^2}}{c}$$

Igualando ambos tiempos:

$$nf = y + n\sqrt{(f-y)^2 + x^2}$$

Operamos con la siguiente ecuación

$$n^2f^2 + y^2 - 2f\,n\,y = n^2f^2 + n^2y^2 - 2n^2f\,y + x^2n^2 \Rightarrow y^2\left(1-n^2\right) - 2f\,n\,y(1-n) = x^2n^2$$

$$\Rightarrow y^2(1+n) - 2f\,n\,y = \frac{x^2n^2}{1-n} \Rightarrow y^2 - \frac{2f\,n\,y}{1+n} = \frac{x^2n^2}{(1-n)(1+n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{f\,n}{1+n}\right)^2 - \frac{f^2n^2y^2}{(1+n)^2} = \frac{x^2n^2}{(1-n)(1+n)}$$

Designamos: $\frac{f\,n}{1+n} = b$

$$(y-b)^2 - b^2 = \frac{x^2 n^2}{(1-n)(1+n)} \Rightarrow \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = \frac{x^2 n^2}{(1-n)(1+n)b^2} = \frac{x^2 n^2}{(1-n)(1+n)\frac{f^2 n^2}{(1+n)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = \frac{x^2}{(1-n)\frac{f^2}{(1+n)}} \Rightarrow \frac{x^2}{f^2 \frac{n-1}{n+1}} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

Designamos $a = f\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ y la ecuación de la superficie en el plano XY es:

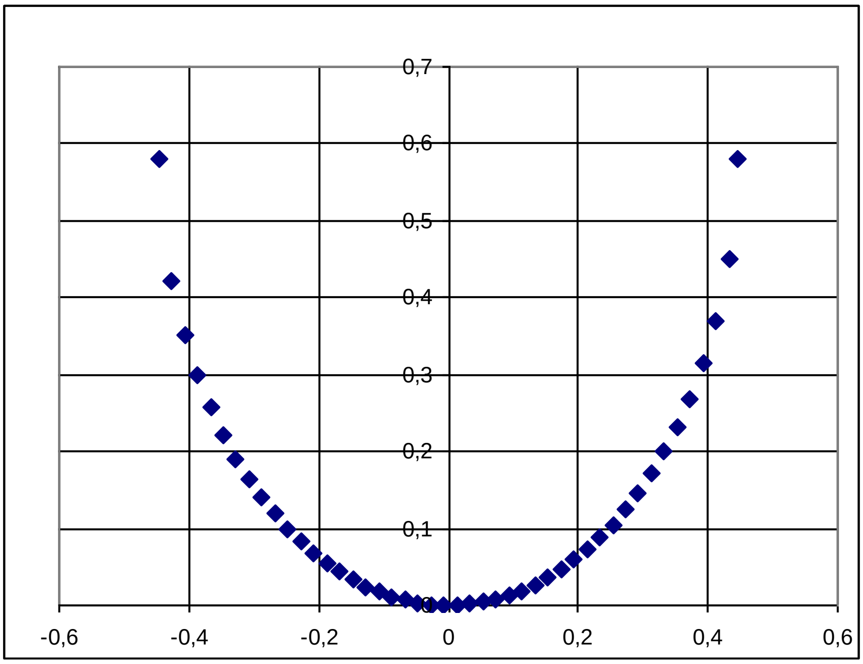
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

que corresponde a una elipse.

b) Cuando n=1,5 resulta:

$$a = f\sqrt{\frac{0{,}5}{2{,}5}} = \frac{f}{\sqrt{5}} \;\; ; \;\; b = \frac{1{,}5\,f}{2{,}5} = 0{,}6\,f$$

Y la ecuación $\frac{5x^2}{f^2} + \frac{(y-0{,}6\,f)^2}{0{,}36} = 1$.Si hacemos f = 1 la curva es la de la figura 1



21.- La distancia focal de una lente delgada biconvexa sumergida en un líquido A, índice de refracción n_1, es f_1 y sumergida en un líquido B, índice de refracción n_2, es f_2. a) Calcular el índice de refracción de la lente y su distancia focal en el aire en función de los datos anteriores.
b) Aplicar las ecuaciones obtenidas cuando: A = agua, índice de refracción, n_1= 1,33, f_1= 1,10 m ; B = disulfuro de carbono, índice de refracción, n_2=1,63 , f_2=10,10 m.

Designamos con n al índice de refracción de la lente y con f a su distancia focal en el aire.
Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas en los distintos medios, siendo R_1 y R_2 los radios de la lente biconvexa.

Aire $$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (1)$$

Líquido A $$\frac{1}{f_1}=\left(\frac{n-n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

Líquido B $$\frac{1}{f_2}=\left(\frac{n-n_2}{n_2}\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce

$$\frac{n_1}{f_1(n-n_1)}=\frac{n_2}{f_2(n-n_2)} \Rightarrow f_2n_1n-f_2n_1n_2=f_1n_2n-f_1n_1n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(f_2n_1-f_1n_2)=n_1n_2(f_2-f_1) \Rightarrow n=\frac{n_1n_2(f_2-f_1)}{f_2n_1-f_1n_2} \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$\frac{1}{f(n-1)}=\frac{n_1}{f_1(n-n_1)} \Rightarrow f_1n-f_1n_1=f\,n\,n_1-f\,n_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f=\frac{f_1n-f_1n_1}{n_1(n-1)} \Rightarrow \quad (5)$$

De la ecuación (5) despejamos n:

$$f\,n\,n_1-f\,n_1=f_1n-f_1n_1 \Rightarrow n(f\,n_1-f_1)=f\,n_1-f_1n_1 \Rightarrow n=\frac{f\,n_1-f_1n_1}{f\,n_1-f_1} \quad (6)$$

Igualamos las ecuaciones (4) y (6)

$$\frac{n_1 n_2 (f_2 - f_1)}{f_2 n_1 - f_1 n_2} = \frac{f\,n_1 - f_1 n_1}{f\,n_1 - f_1} \Rightarrow n_1 n_2 (f_2 - f_1)\cdot(f\,n_1 - f_1) = (f\,n_1 - f_1 n_1)\cdot(f_2 n_1 - f_1 n_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,n_1^2 n_2\,f_2 - n_1 n_2\,f_2 f_1 - f\,n_1^2 n_2\,f_1 + n_1 n_2 f_1^2 = f\,n_1^2 f_2 - f\,n_1 n_2 f_1 - n_1^2 f_1 f_2 + n_1 n_2 f_1^2 \Rightarrow$$

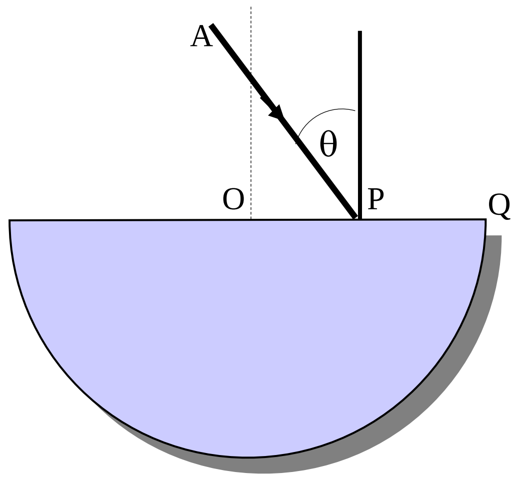
$$\Rightarrow f\left(n_1 n_2 f_2 - n_1 n_2 f_1 - n_1 f_2 + n_2 f_1\right) = f_1 f_2 (n_2 - n_1) \Rightarrow \quad f = \frac{f_1 f_2 (n_2 - n_1)}{n_1 n_2 (f_2 - f_1) + n_2 f_1 - n_1 f_2} \quad (7)$$

b)

$$n = \frac{1{,}33 \cdot 1{,}63 \cdot (10{,}1 - 1{,}1)}{10{,}1 \cdot 1{,}33 - 1{,}1 \cdot 1{,}63} = 1{,}68$$

$$f = \frac{1{,}1 \cdot 10{,}1 \cdot (1{,}63 - 1{,}33)}{1{,}33 \cdot 1{,}63 \cdot (10{,}1 - 1{,}1) + 1{,}63 \cdot 1{,}1 - 1{,}33 \cdot 10{,}1} = 0{,}42\ \mathrm{m} = 42\,\mathrm{cm}$$

22.- El índice de refracción de una lente semicilíndrica de radio OQ= R vale n=1,5. Sobre ella incide en P(OP=0,5R) un rayo luminoso AP, procedente del aire, formando un ángulo θ con la vertical. Este ángulo varía entre 0º y 90º.



Se pide a) la gráfica de θ, frente a β, siendo beta, el ángulo que forma el rayo con la normal a la cara curva de la lente, cuando éste pasa de la lente al aire. b) Repetir el proceso anterior cuando OP sea igual a 0,75 R.

En la figura 1 se representa la marcha de los rayos, habiéndose elegido un ángulo θ cualquiera, comprendido entre 0º y 90º

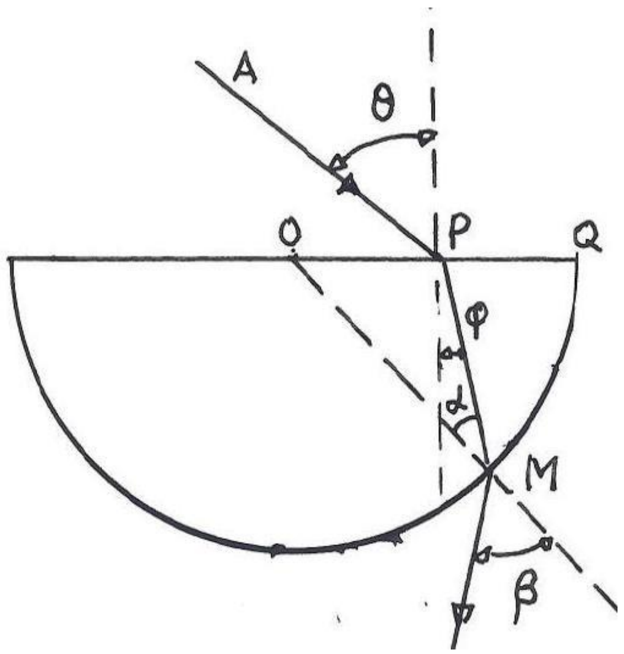


Fig.1

Aplicamos la ley de Snell entre el ángulo θ y φ.

$$1 \cdot \operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\varphi \quad (1)$$

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo OPM

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{OP} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{R}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{R} \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\alpha = \cos\varphi = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi} \;\Rightarrow 4\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{2} \quad (2)$$

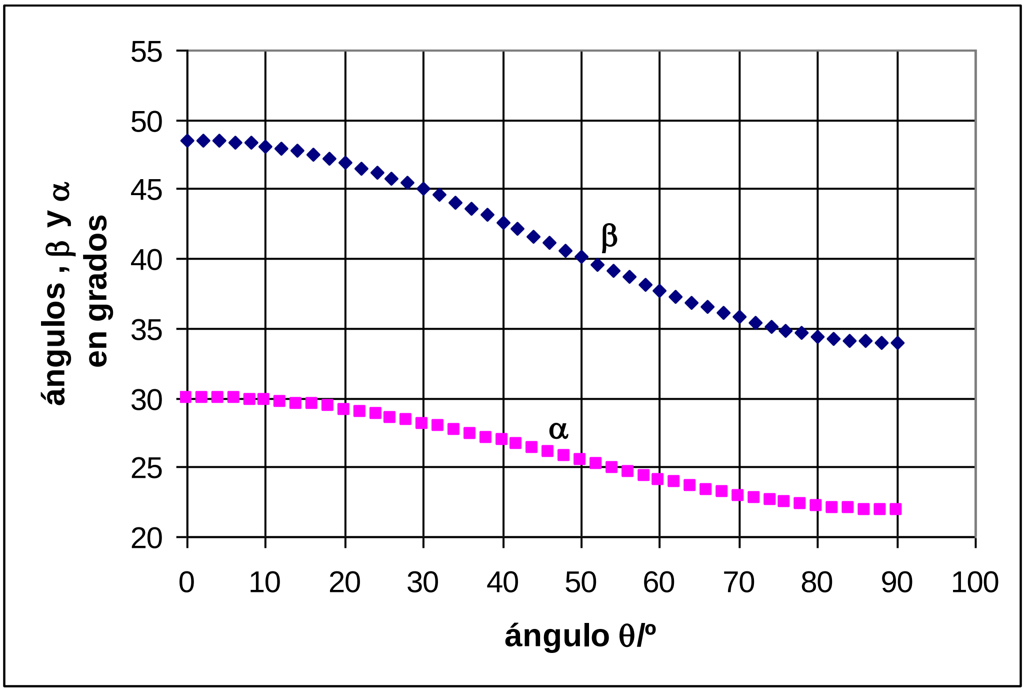
La ley de Snell entre los ángulos α y β conduce a:

$$n \operatorname{sen}\alpha = 1 \cdot \operatorname{sen}\beta \quad (3)$$

A partir de las ecuaciones (1), (2) y (3)

$$\operatorname{sen}\beta = n\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{2} = n\frac{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{n^2}}}{2} = \frac{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\theta}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arcosen}\left(\frac{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2\theta}}{2}\right) \quad (4)$$

En la hoja de cálculo se dan valores a θ y n=1,5 y se obtiene la siguiente gráfica:



El ángulo límite de la lente al aire es:

$$n \operatorname{sen} l_m = 1.\operatorname{sen}90 \Rightarrow \quad \operatorname{sen} l_m = \frac{1}{1{,}5} \Rightarrow \quad l_m = 41{,}8^{\circ}$$

Observe que en esta gráfica el ángulo α es siempre inferior al límite para todos los valores de θ, por eso, en todo el intervalo se encuentran valores de β. En otras palabras, para cualquier valor de θ siempre aparece rayo saliendo de la línea curva de la lente.

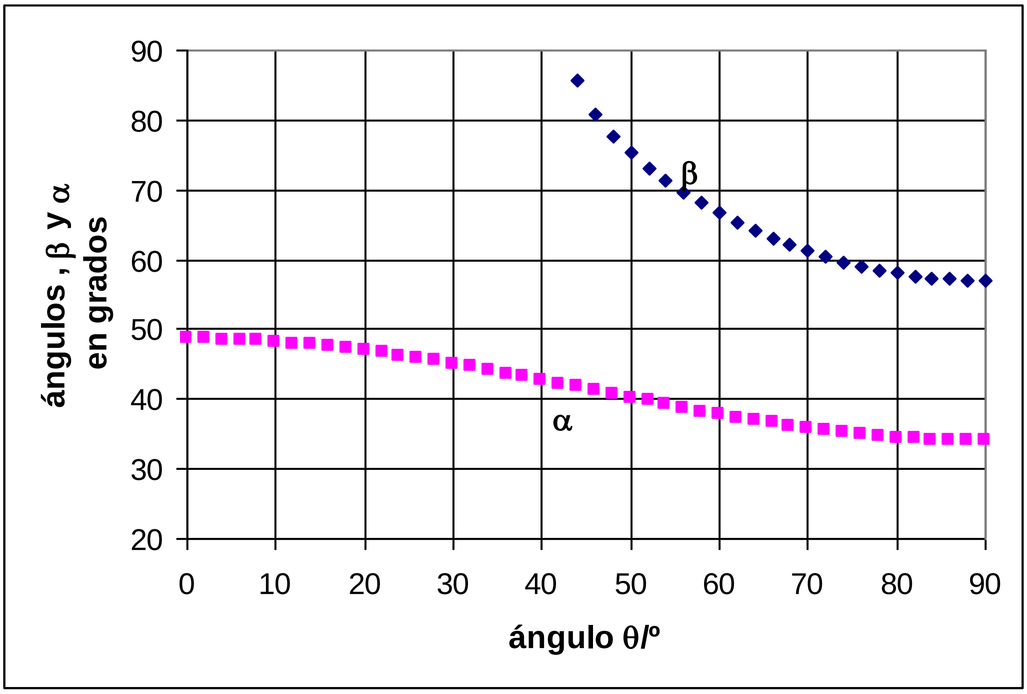
Si ahora OP=0,75 R

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{OP}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{3R}{4}}=\frac{\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{R}\Rightarrow\quad\frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha=\cos\varphi=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}\Rightarrow\frac{16}{9}\operatorname{sen}^2\alpha=1-\operatorname{sen}^2\varphi\Rightarrow\quad\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{9\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)}}{4}\quad(2)$$

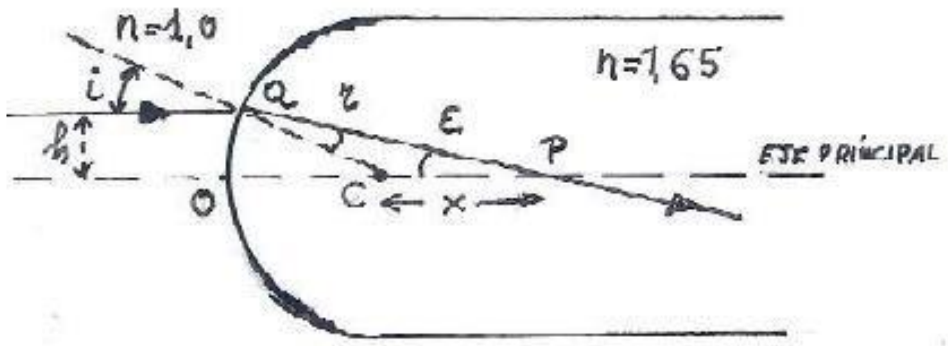
$$\operatorname{sen}\beta=n\frac{\sqrt{9\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)}}{4}=n\frac{\sqrt{9\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{n^2}\right)}}{4}=\frac{\sqrt{9\left(n^2-\operatorname{sen}^2\theta\right)}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta=\operatorname{arcosen}\frac{\sqrt{9\left(n^2-\operatorname{sen}^2\theta\right)}}{4}\quad(4)$$



En este caso resulta que el ángulo α es, para ciertos valores del ángulo θ, superior al límite, por eso, no siempre existe rayo que salga por la cara curva, como ocurría en el caso anterior. Existe rayo β a partir de que α sea inferior a 41,8º.

23.- Una superficie esférica de radio OC=R=0,1 m separa dos medios transparentes (dioptrio esférico). Uno es aire y el otro una sustancia de índice de refracción n=1,65.
Desde el aire se envían una serie de rayos paralelos al eje principal y por encima de él; esos rayos penetran en el medio de índice n y cortan al eje principal en un punto P que dista x del centro de la superficie esférica C.
a) Calcular la relación que existe entre x y la altura h de los rayos.
b) Representar x (eje Y) frente a h (eje X)



a) La ley de Snell establece para un rayo de altura arbitraria h, que: $1 \cdot \operatorname{sen} i = n \cdot \operatorname{sen} r$

De la figura del enunciado se deduce que el ángulo OCQ = i, y por tanto: $\operatorname{sen} i = \frac{h}{R}$.

De ambas ecuaciones:

$$\operatorname{sen} r = \frac{h}{nR}$$

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo PQC : $\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{R} = \frac{\operatorname{sen} r}{x} \Rightarrow x = \frac{R \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen}\varepsilon}$

De la figura del enunciado deducimos que: $\varepsilon + r = i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = i - r$

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}(i-r) = \operatorname{sen} i \cos r - \cos i \operatorname{sen} r = \frac{h}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{n^2R^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \cdot \frac{h}{nR} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varepsilon = \frac{h}{R}\sqrt{\frac{n^2R^2 - h^2}{n^2R^2}} - \frac{h}{nR}\sqrt{\frac{R^2-h^2}{R^2}} = \frac{h}{nR^2}\left(\sqrt{n^2R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2}\right)$$

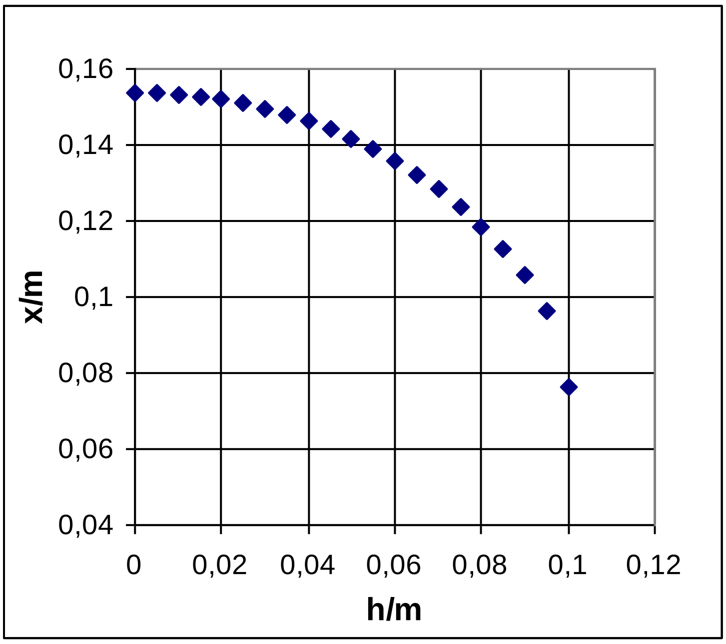
Sustituyendo en la ecuación que contiene x, resulta:

$$x = \frac{R\,\frac{h}{nR}}{\frac{h}{nR^2}\left(\sqrt{n^2R^2 - h^2} - \sqrt{R^2-h^2}\right)} = \frac{R^2}{\sqrt{n^2R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2}} \quad (1)$$

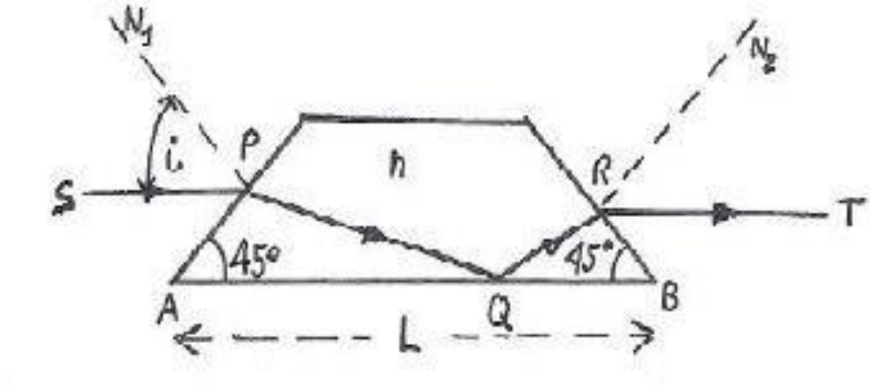
b) Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (1)

$$x = \frac{0{,}1^2}{\sqrt{1{,}65^2 \cdot 0{,}1^2 - h^2} - \sqrt{0{,}1^2 - h^2}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}0272 - h^2} - \sqrt{0{,}01 - h^2}}$$

Los valores de h están comprendido entre cero y R=0,1 m La gráfica es:



24.- Sobre la cara lateral de un prisma Dove se envía un rayo horizontal SP que sale paralelo por la cara opuesta RT, según se indica en la figura.



Se pide calcular la distancia recorrida por el rayo dentro del prisma, esto es, PQ+QR.
La longitud de la base del prisma es L y su índice de refracción n. El rayo SP se desplaza por el aire.

El ángulo i =45º según se deduce de la figura 1.

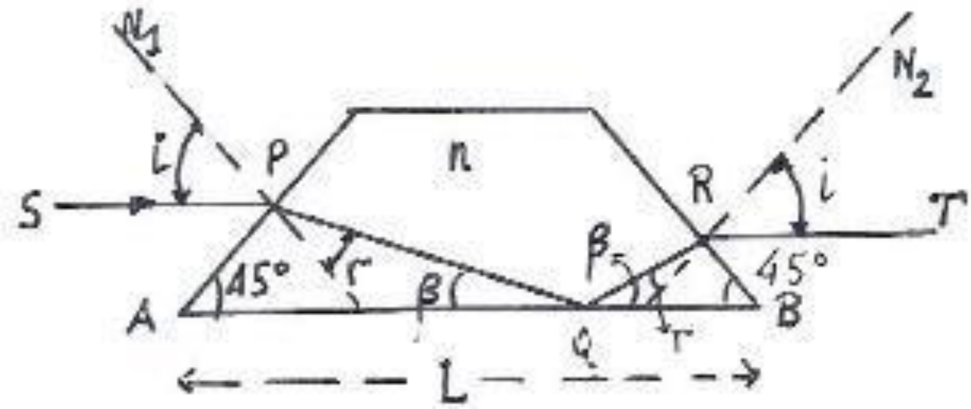


Fig.1

Aplicamos la ley de Snell al rayo incidente:

$$1 \cdot \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r \Rightarrow \operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen} i}{n} \quad \text{siendo} \quad i > r$$

Aplicamos el teorema de los senos al triángulo APQ

$$\frac{\operatorname{sen}(90+r)}{AQ}=\frac{\operatorname{sen}45}{PQ} \quad \Rightarrow \quad PQ=\frac{AQ\cdot \operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}(90+r)}$$

Aplicamos el teorema de los senos al triángulo Q RB

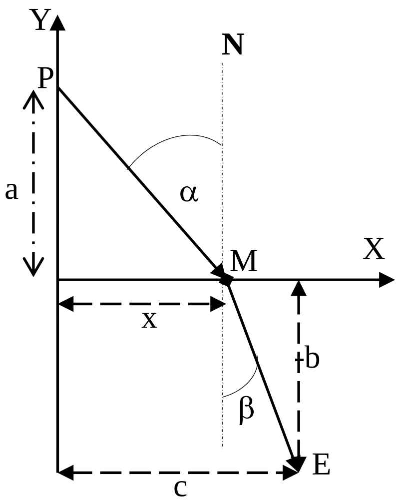
$$\frac{\operatorname{sen}(90+r)}{QB}=\frac{\operatorname{sen}45}{QR} \quad \Rightarrow \quad QR=\frac{QB\cdot \operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}(90+r)}$$

Sumamos las dos últimas ecuaciones:

$$PQ+QR=\frac{AQ\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}(90+r)}+\frac{QB\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}(90+r)}=\frac{\operatorname{sen}45(AQ+QB)}{\operatorname{sen}(90+r)}=\frac{L\operatorname{sen}45}{\cos r}=\frac{L\operatorname{sen}45}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 r}}$$

$$\Rightarrow PQ+QR=\frac{L\ \operatorname{sen}45}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}}=\frac{n\,L\operatorname{sen}45}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}=\frac{n\,L\operatorname{sen}45}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 45}}=\frac{n\,L\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n^2-\frac{1}{2}}}=\frac{n\,L}{\sqrt{2n^2-1}}$$

25.- Desde el punto P de coordenadas (o,a) sale un rayo luminoso que se dirige hacia el eje X, el cual actúa de separación entre dos medios, siendo n_1 el índice de refracción para y>0 , y n_2 el índice de refracción para y<0: $n_1>n_2$ (ver figura inferior). El rayo llega al punto E de coordenadas (c,-b). A partir del principio de Fermat deducir la ley de Snell, esto es, la relación entre los ángulos α y β que sigue la luz.



La luz se propaga en línea recta en los dos medios pero con distinta velocidad. Designamos con v_1 la velocidad en el medio superior y con v_2 en el medio inferior. De entre todas las trayectorias posibles entre P y E se ha representado una de ellas, que pasa por un punto M al que asignamos de coordenadas (x, 0). El principio de Fermat establece que la luz sigue el camino para el que el tiempo de recorrido es el mínimo posible.

El tiempo en ir de P a E es:

$$t = \frac{PM}{v_1} + \frac{ME}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}$$

En la ecuación anterior la variable es x y para hallar el valor mínimo de t derivamos la función respecto de x e igualamos a cero.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{2(c-x)(-1)}{2\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

A partir de la figura del enunciado se deduce que:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{x}{a} \Rightarrow \ x = a\operatorname{tag}\alpha \ \ ; \ \ \operatorname{tag}\beta = \frac{c-x}{b} \Rightarrow \ c-x = b\operatorname{tag}\beta$$

Sustituyendo estos valores

$$\frac{1}{v_1}\frac{a\ \text{tag}\,\alpha}{\sqrt{a^2+a^2\text{tag}^2\alpha}}=\frac{1}{v_2}\frac{b\ \text{tag}\,\beta}{\sqrt{b^2+b^2\text{tag}^2\beta}}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\text{tag}\,\alpha\sqrt{1+\text{tag}^2\beta}}{\text{tag}\,\beta\sqrt{1+\text{tag}^2\alpha}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\dfrac{\sqrt{1+\text{tag}^2\beta}}{\text{tag}\,\beta}}{\dfrac{\sqrt{1+\text{tag}^2\alpha}}{\text{tag}\,\alpha}}=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\text{tag}^2\beta}+1}}{\sqrt{\dfrac{1}{\text{tag}^2\alpha}+1}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\cos^2\beta}{\text{sen}^2\beta}+1}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}+1}}=\frac{\dfrac{1}{\text{sen}\,\beta}}{\dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}}\Rightarrow\quad v_2\text{sen}\,\alpha=v_1\text{sen}\,\beta$$

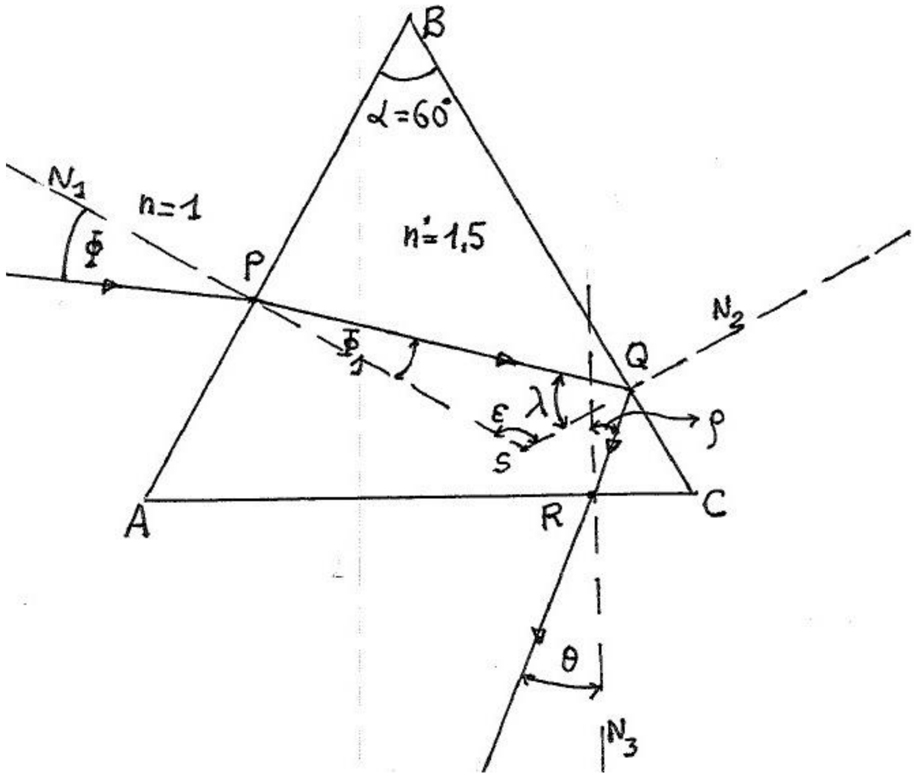
Teniendo en cuenta la definición de índice de refracción de un medio, resulta:

$$n_1=\frac{c}{v_1};\quad n_2=\frac{c}{v_2}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{c/n_2}{c/n_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{n_1}{n_2}=\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}\quad\Rightarrow\quad n_1\text{sen}\,\alpha=n_2\text{sen}\,\beta$$

El ángulo α se denomina de incidencia y se representa por i, el ángulo β es el de refracción y se representa por r

$$n_1\text{sen}\,i=n_2\,\text{sen}\,r$$

26.-La figura inferior representa un prisma de ángulo α =60º e índice de refracción n´=1,5. Un rayo luminoso, desde el aire(n=1,) incide en P, se refleja en Q y sale por la cara AC formando con la normal N_3 un cierto ángulo θ.
1.- Determinar cuál es el valor máximo que puede tener el ángulo θ.
2.- Si la longitud de la arista del prisma es L, calcular cuánto vale la distancia que recorre el rayo luminoso en el interior del prisma cuando θ es máximo.



1.-La primera condición supone que el ángulo λ tiene que ser superior o igual al ángulo límite para que se pueda reflejar. Cumpliéndose la ecuación, $n' \cdot \operatorname{sen}\lambda_1 = n \cdot \operatorname{sen} 90º$

$$1{,}5\operatorname{sen}\lambda_1 = 1 \cdot \operatorname{sen} 90º \quad \Rightarrow \quad \lambda_L = 41{,}8º$$

En el triángulo PBQ de la figura se cumple, teniendo en cuenta que N_1 y N_2 son las normales a las caras AB y BC.

$$90 - \Phi_1 + \alpha + 90 - \lambda = 180º \quad \Rightarrow \quad \alpha = \Phi_1 + \lambda \qquad (1)$$

En el triángulo RQC

$$90 - \rho + 90 - \lambda + \alpha = 180º \quad \Rightarrow \quad \alpha = \rho + \lambda \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que: $\rho = \Phi_1$ (3)

Según la ley de Snell para el rayo QR tenemos:

$$1{,}5 \cdot \operatorname{sen}\rho = 1 \cdot \operatorname{sen}\theta \quad (4)$$

Según el enunciado θ ha de ser máximo, lo cual nos lleva a decir que ρ es máximo y según (3) Φ_1 máximo. De acuerdo con (1), λ debe ser mínimo. Para que haya reflexión en la cara BC el ángulo límite marca ese mínimo, por tanto,

$$\lambda_L = 41{,}8^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \rho = 60 - 41{,}8 = 18{,}2^{\circ}\ .$$

Aplicando la ley de Snell

$$1{,}5 \cdot \operatorname{sen}18{,}2 = 1 \cdot \operatorname{sen}\theta_M \Rightarrow \quad \theta_M = 27{,}9^{\circ}$$

2.- Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo PBQ: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{PQ} = \dfrac{\operatorname{sen}(90 - \Phi_1)}{BQ}$

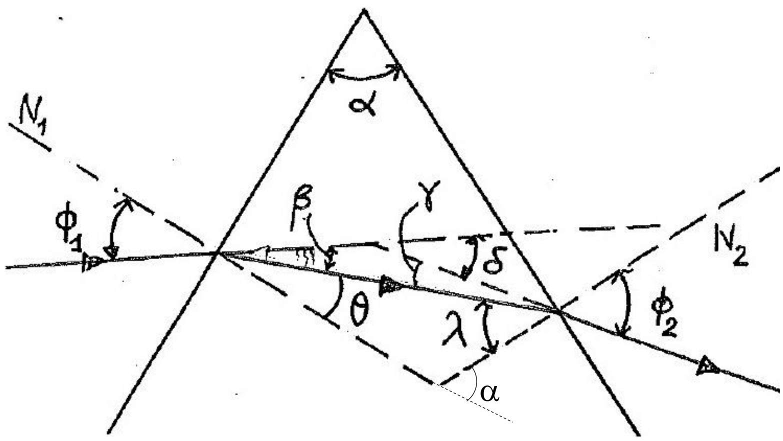
Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo RQC: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{QR} = \dfrac{\operatorname{sen}(90 - \rho)}{QC}$

De estas dos últimas ecuaciones:

$$PQ + QR = BQ\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(90 - \Phi_1)} + QC\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(90 - \rho)}, \quad \text{como } \rho = \Phi_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad PQ + QR = (BQ + QC)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(90 - \rho)} = L\frac{\operatorname{sen}60^{\circ}}{\operatorname{sen}71{,}8} = 0{,}91\,L$$

27.- En la figura se representa un prisma de ángulo α, e índice de refracción n, y la marcha de un rayo luminoso que incide desde el aire n = 1, en la cara de la izquierda con un ángulo Φ_1, siendo δ el ángulo de desviación.



Comprobar que en la marcha del rayo se cumple la ecuación siguiente:

$$\frac{sen\frac{\delta+\alpha}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}}=\frac{n\ \ cos\frac{\theta-\lambda}{2}}{cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}$$

De la figura se deducen las siguientes ecuaciones, sin más que observar que el ángulo exterior en un triángulo, es igual a la suma de los interiores no adyacentes:

$$\alpha=\theta+\lambda\ ;\ \delta=\beta+\gamma\ ;\ \beta=\Phi_1-\theta\ ;\ \gamma=\Phi_2-\lambda\quad\Rightarrow\ \delta+\alpha=\theta+\lambda+\beta+\gamma\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\delta+\alpha=\theta+\lambda+\Phi_1-\theta+\Phi_2-\lambda\qquad\Rightarrow\quad\delta+\alpha=\Phi_1+\Phi_2$$

La ley de Snell nos conduce a.

$$1\cdot \mathrm{sen}\Phi_1=n\,\mathrm{sen}\theta\ ;\quad n\,\mathrm{sen}\lambda=1\cdot\mathrm{sen}\Phi_2\quad(1)$$

$$\frac{\mathrm{sen}\frac{\delta+\alpha}{2}}{\mathrm{sen}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\mathrm{sen}\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}}{\mathrm{sen}\frac{\theta+\lambda}{2}}\quad(2)$$

Recurrimos a la ecuación trigonométrica: $\mathrm{sen}C+\mathrm{sen}D=2\mathrm{sen}\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$$\operatorname{sen}\Phi_1+\operatorname{sen}\Phi_2=2\operatorname{sen}\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\cdot\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}=\frac{\operatorname{sen}\Phi_1+\operatorname{sen}\Phi_2}{2\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda=2\operatorname{sen}\frac{\theta+\lambda}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\lambda}{2}\quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\frac{\theta+\lambda}{2}=\frac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}$$

Llevamos estas dos últimas ecuaciones a la (2) y sustituimos la relación (1)

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\delta+\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\Phi_1+\operatorname{sen}\Phi_2}{2\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}}=\frac{\dfrac{n\operatorname{sen}\theta+n\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}}=\frac{n\quad\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}{\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}$$

Cuando el ángulo d es el mínimo se cumple que :

$$\theta=\lambda\ ;\ \ \Phi_1=\Phi_2\quad\Rightarrow\quad\frac{\operatorname{sen}\frac{\delta_{mi}+\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}=n$$

La ecuación anterior se utiliza para determinar el índice de refracción del un prisma, de ángulo α , para ello se mide el ángulo de desviación mínima.

28.- Una lente delgada biconvexa tiene de distancia focal imagen f´. Determinar la mínima distancia que existe entre un objeto real y su imagen real.

La ecuación de una lente delgada es:

$$\frac{1}{f´}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s´} \quad (1)$$

Esta ecuación lleva aparejado el siguiente convenio de signos. La distancia focal imagen f´ es positiva, la distancia de la lente al objeto, s, es negativa y la distancia de la lente a la imagen real, s´ es positiva.

Designamos con d la distancia entre el objeto y su imagen real, y como una distancia es un valor positivo y s, es negativo, para que siempre se cumpla tal condición deberá ser:

$$d=-s+s´ \quad \Rightarrow \quad s´=d+s \quad (2)$$

Sustituimos (2) en (1).

$$\frac{1}{f´}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s´}=\frac{-1}{s}+\frac{1}{d+s}=\frac{-(d+s)+s}{s(d+s)}=\frac{-d}{s(d+s)}\Rightarrow \quad -d\,f´=s(d+s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d(f´+s)=-s^2 \Rightarrow \qquad d=-\frac{s^2}{f´+s}$$

Como nos piden la mínima distancia derivamos d respecto de s e igualamos a cero $d´=-\left[\frac{(f´+s)\cdot 2s-s^2}{(f´+s)^2}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad 2(f´+s)-s=0 \quad \Rightarrow \quad s=-2f´$

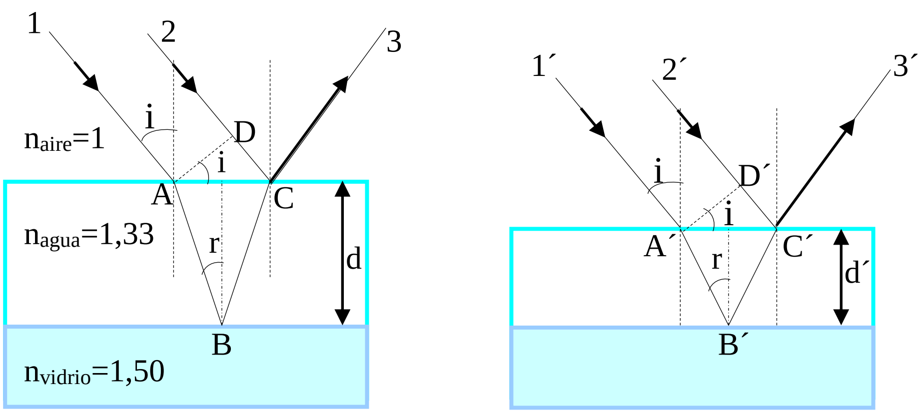
Sustituimos el valor encontrado para s en la ecuación (1).

$$\frac{1}{f´}=-\frac{1}{-2f´}+\frac{1}{s´} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f´}-\frac{1}{2f´}=\frac{1}{s´} \quad \Rightarrow \quad s´=2f´$$

La distancia mínima entre el objeto real y la imagen real es d = 4f´.

29-. Sobre la superficie de un vidrio de índice de refracción 1,50 se encuentra una capa uniforme de agua (n=1,33). Un haz luminoso de λ=680 nm, incide con un ángulo de 30º sobre el agua. Se observa un máximo en la interferencia por reflexión Debido a la evaporación del agua y después de transcurridos 15 minutos se vuelve a detectar un máximo. Calcular la velocidad con que disminuye el grosor de la película.

Designamos con d el espesor de la capa de agua cuando se observa el primer máximo y con d´ cuando se observa el segundo máximo. En la figura 1 se representa la marcha de los rayos. El rayo 2 se refleja en una superficie de mayor índice de refracción por lo que hay un cambio de fase, el rayo refractado 1 también se refleja con un cambio de fase, por tanto, el efecto del cambio de fase se anula. La interferencia se produce entre el reflejado 3 y el refractado procedente de 1 que se ha reflejado en B.



(a) Fig 1 (b)

La diferencia de caminos ópticos recorridos por los rayos (ver fig.1a) es:

Por producirse un máximo: $$n_{H2O}(AB+BC)-n_{aire}DC=k\lambda \qquad (1)$$

De la figura se deduce:

$$AB=BC=\frac{d}{\cos r}\Rightarrow \quad AC=2d\,\mathrm{tag}\,r \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\,i=\frac{DC}{AC}\Rightarrow \quad DC=2d\,\mathrm{tag}\,r\cdot \mathrm{sen}\,i$$

La ecuación (1) recordando que n_{aire}=1; queda ahora:

$$n_{H2O}\frac{2d}{\cos r}-2d\,\mathrm{tag}\,r\cdot \mathrm{sen}\,i=k\lambda \quad (2)$$

Aplicamos la ley de Snell:

$$1\cdot \operatorname{sen} i = n_{H2O}\operatorname{sen} r = n_{H2O}\sqrt{1-\cos^2 r} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 i = n^2_{H2O}\left(1-\cos^2 r\right) \Rightarrow \cos r = \sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2_{H2O}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tag} r = \frac{\operatorname{sen} r}{\cos r} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} i}{n_{H2O}}}{\sqrt{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2_{H2O}}}} = \frac{\operatorname{sen} i}{\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}}$$

Llevado lo anterior a (2), resulta.

$$n_{H2O}\frac{2d}{\sqrt{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2_{H2O}}}} - 2d\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow \frac{2d\, n^2_{H2O}}{\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}} - 2d\frac{\operatorname{sen}^2 i}{\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2d}{\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}}\left(n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i\right) = k\lambda \Rightarrow \quad 2d\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i} = k\lambda \Rightarrow \quad d = \frac{k\lambda}{2\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}}$$

Aplicando el mismo razonamiento a la figura 1b:

$$d' = \frac{k'\lambda}{2\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}}$$

La velocidad de evaporación es:

$$\frac{d-d'}{\Delta t} = \frac{\lambda(k - k')}{2\Delta t\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}} = \frac{\lambda}{2\Delta t\sqrt{n^2_{H2O}-\operatorname{sen}^2 i}} = \frac{680}{2\cdot 15\cdot 60\sqrt{1{,}33^2-\operatorname{sen}^2 30}} = 0{,}307\ \frac{nm}{s}$$

30.- Una lente semiesférica tiene un radio R = 7,5 cm y un índice de refracción n=1,5. A una distancia de 5 cm de la cara plana se sitúa un objeto de 2 cm de altura. Calcular la distancia a la que se forma su imagen, su tamaño y su naturaleza.

Al ser una lente semiesférica debe considerarse como una lente gruesa. Debemos calcular en la posición de los focos y de los planos principales. Tratándose de una lente semiesférica, y dado que trabajamos en la zona paraxial el plano imagen H´ es tangente a la esfera por su parte convexa, más adelante comprobaremos esta afirmación.
La ecuación que da la distancia focal imagen en una lente gruesa es:

$$\frac{1}{f´} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2 e}{n\, r_1 r_2}$$

r_1 y r_2 son los radios de las caras de la lente, e el espesor y n el índice de refracción.

Aplicando la fórmula anterior a la lente del problema

$$\frac{1}{f´} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-7{,}5}\right) + \frac{(1{,}5-1)^2 \cdot 7{,}5}{1{,}5 \cdot \infty \cdot (-7{,}5)} = \frac{0{,}5}{7{,}5} \Rightarrow f´ = +15\,\text{cm}$$

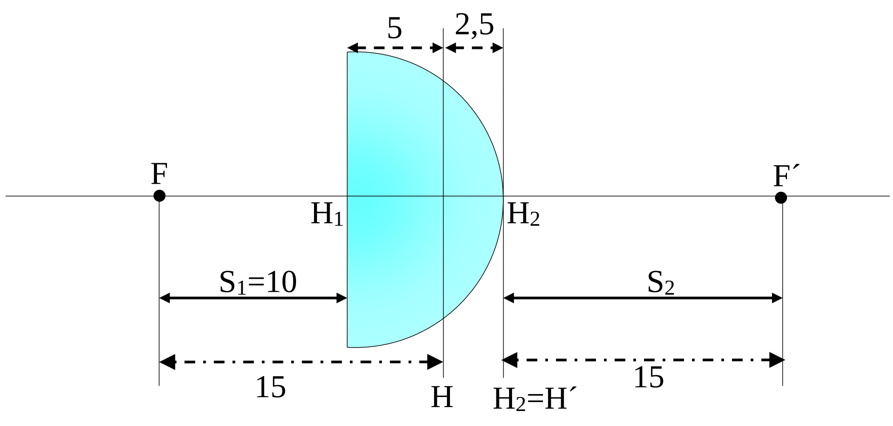
La distancia focal objeto es –f=15 cm, ya que los medios de entrada y salida de la lente es el mismo, esto es, el aire con n=1.

Calculamos la distancia que existe desde el foco objeto a la cara plana de la lente:

e

$$H_1F = s_1 = -f´ - \frac{(n-1)}{n}\,\frac{e \cdot f´}{r_2} = -15 - \frac{0{,}5}{1{,}5} \cdot \frac{7{,}5 \cdot 15}{-7{,}5} = -10\,\text{cm}$$

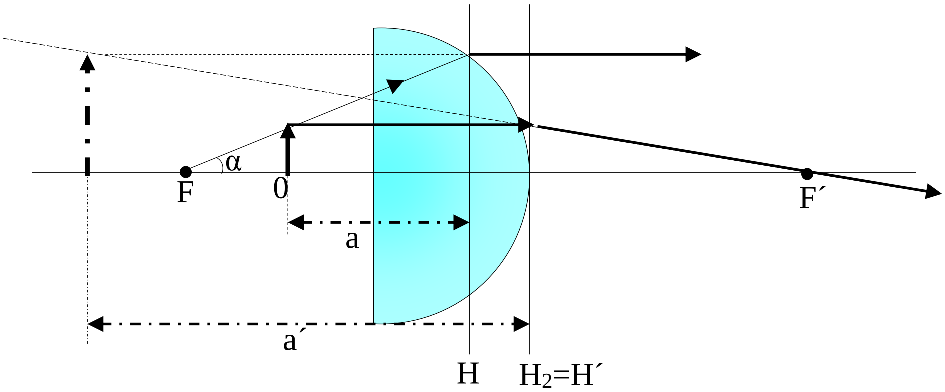
El plano principal H está a una distancia de 5 cm de la cara plana y por ello la distancia entre los planos principales es 2,5 cm. En la figura se han indicado los valores absolutos de las distancias. Los puntos H_1 y H_2 son los centros de figura.



s_2 designa la distancia entre H_2 y F´.

$$= H_2F' = s_2 = +f' - \frac{n-1}{n}\,\frac{e\,f'}{r_1} = +15 - \frac{0{,}5}{1{,}5}\cdot\frac{7{,}5\cdot 15}{\infty} = 15\,\mathrm{cm}$$

Este valor coincide con la distancia focal imagen H´F, luego para las lentes semiesféricas el plano principal imagen es tangente a la lente por la parte convexa, tal como afirmamos antes.



En la figura anterior, se ha colocado el objeto (una flecha derecha) a una distancia de 5 cm de la cara plana de la lente, por tanto, está a una distancia en valor absoluto de 10 cm del plano principal imagen.

Para construir gráficamente la imagen del objeto se trazan dos rayos procedentes del objeto, uno paralelo al eje FF´ llega a los planos principales y pasa por el foco imagen F´, otro como si procediera del foco objeto llega a los planos principales y sale paralelo a FF´. En la figura se ve que el haz es divergente, por lo que la imagen será virtual y se formará en las prolongaciones de los rayos hacia atrás, tal como indica la figura.
Si designamos con a, la distancia del plano principal objeto al objeto y con a´ la distancia del plano principal imagen a la imagen, tenemos:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{-10}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{15'} \;\Rightarrow\; \frac{1}{a'}=\frac{1}{15}-\frac{1}{10}=\frac{-5}{150} \;\Rightarrow\; a'=-30\,\mathrm{cm}$$

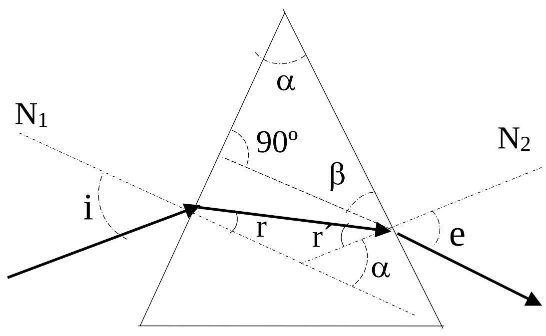
Para determinar el tamaño de la imagen, se deduce de la figura anterior:

$$\mathrm{tag}\,\alpha = \frac{\text{tamaño objeto}}{FO} = \frac{\text{tamaño imagen}}{FH} \Rightarrow \frac{+2\,\mathrm{cm}}{-5\,\mathrm{cm}} = \frac{y'}{-15} \Rightarrow y' = +6\,\mathrm{cm}$$

La imagen es virtual, derecha y tres veces mayor que el objeto.

31.-(349)- El índice de refracción de un prisma se designa con n. a) Calcular la relación que existe entre el ángulo α del prisma y el ángulo de incidencia i, para que se cumpla que la prolongación del rayo emergente e, sea perpendicular a la cara primera del prisma.
b) Si n=1,4 determinar a partir de qué valor de i no se puede cumplir la condición anterior.

a) En la figura se ha hecho un esquema del problema.



N1 y N_2 son las normales a las caras del prisma.

Las ecuaciones de la ley de la refracción para el prisma son:

$$1 \cdot \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r \quad (1) \;\; ; \;\; n \operatorname{sen} r' = \operatorname{sen} e \quad (2) \;\; ; \quad \alpha = r + r' \quad (3)$$

Para este problema se cumplen las siguientes ecuaciones que se deducen del dibujo.

$$\alpha + \beta = 90º \;\; ; \;\; e + \beta = 90º \quad \Rightarrow \;\; \alpha + 90º - e = 90º \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = e \; (4)$$

De (3) despejamos r´ y sustituimos en (2) y utilizamos también la igualdad (4)

$$n \operatorname{sen}(\alpha - r) = \operatorname{sen}\alpha \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\alpha \cos r - \cos\alpha \operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 r} - \cos\alpha \operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n} \; (5)$$

Sustituimos sen r de (1) en (5)

$$\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}-\cos\alpha\frac{\operatorname{sen} i}{n}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}{n}-\frac{1}{n}\right)=\cos\alpha\frac{\operatorname{sen} i}{n}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \operatorname{tag}\alpha=\frac{\frac{\operatorname{sen} i}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}{n}-\frac{1}{n}}=\frac{\operatorname{sen} i}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}-1}\quad (6)$$

b) El ángulo de un prisma no puede ser mayor de 90º, por consiguiente la tangente de α es siempre positiva. La condición pedida es que el denominador de (6) sea negativo.

$$\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}-1<0\Rightarrow n^2-\operatorname{sen}^2 i<1\Rightarrow 1{,}4^2-\operatorname{sen}^2 i<1\Rightarrow 0{,}96-\operatorname{sen}^2 i<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}96<\operatorname{sen}^2 i\Rightarrow 0{,}98<\operatorname{sen} i$$

El ángulo i cuyo seno es 0,98 vale 78,46º, para ángulos mayores que el anterior no se puede cumplir la condición propuesta en el problema.

32.-(370.-Dos lentes delgadas una convergente y otra divergente son coaxiales, tienen la misma distancia focal en valor absoluto y están separadas una distancia e. En el eje y a la izquierda de la lente convergente está colocado un objeto siendo s_{o1} la distancia de la lente convergente al objeto. La imagen proporcionada por el sistema se forma en el infinito. Calcular el valor de s_{o1} en función de la distancia focal de la lente convergente y de e. Hacer un esquema de la marcha de los rayos si la distancia focal de la lente convergente es +10 cm= 10 cm y e = 5 cm.

Designamos con f_1 a la distancia focal imagen de la lente convergente y f_2 a la distancia focal imagen de la lente divergente Se cumple que $f_1=-f_2$

Aplicamos la formula de las lentes delgadas: $-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f}$

$$-\frac{1}{s_{o1}}+\frac{1}{s_{i1}}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{s_{i1}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{s_{o1}}=\frac{s_{o1}+f_1}{f_1\cdot s_{o1}} \Rightarrow s_{i1}=\frac{f_1\cdot s_{o1}}{s_{o1}+f_1}$$

La imagen proporcionada por la lente convergente es objeto virtual para la lente divergente..La distancia desde la lente divergente al objeto virtual es en valor absoluto s_{i1}-e.

Aplicamos de nuevo la ley de las lentes delgadas

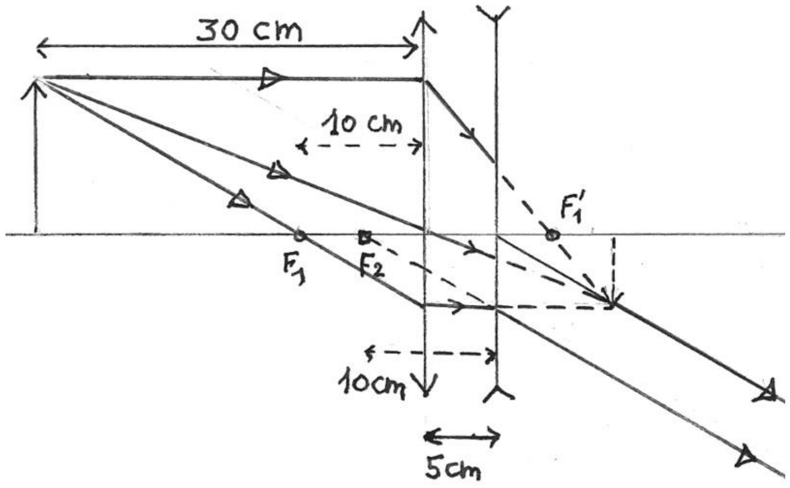
$$-\frac{1}{s_{i1}-e}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow -\frac{1}{\frac{f_1\cdot s_{o1}}{f_1+s_{o1}}-e}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow -\frac{f_1+s_{o1}}{f_1\cdot s_{o1}-e(f_1+s_{o1})}=-\frac{1}{f_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1^2+f_1s_{o1}=f_1\cdot s_{o1}-e(f_1+s_{o1}) \Rightarrow f_1^2=-ef_1-es_{o1} \Rightarrow \quad s_{o1}=-\frac{f_1(f_1+e)}{e}$$

Para los datos numéricos del problema, tenemos:

$$s_{o1}=-\frac{10(10+5)}{5}=-30 \text{ cm}$$

Para la construcción de la imagen tomamos tres rayos que parten del objeto y que si no estuviese la lente divergente formarían una imagen que en la figura aparece con línea discontinua. Esta imagen llamada virtual es el objeto para la lente divergente y que construimos con un rayo que pasa por su centro óptico y otro que le llega paralelo al eje principal y que su prolongación pasa por el foco objeto de la citada lente divergente. Los dos rayos son paralelos y la imagen se formaría en el infinito.


30 cm
10 cm
F'1
F1
F2
10cm
5cm