1.- La longitud de onda promedio del filamento de una bombilla es 12.10^{-5} cm. Calcular el número de fotones emitidos por unidad de tiempo, si la potencia de la bombilla es 200 W.

La energía asociada a un fotón es

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

Si N representa el número de fotones emitidos por unidad de tiempo NE es igual a la potencia de la bombilla

$$Nh\frac{c}{\lambda} = 200 \Rightarrow N = \frac{200\lambda}{hc} = \frac{200 * 12.10^{-7}}{6{,}6.10^{-34} * 3.10^{9}} = 1{,}2.10^{20}\ \frac{\text{fotones}}{\text{s}}$$

2.- En la fisión de un núcleo de $^{235}_{92}U$ se liberan aproximadamente 185 MeV de energía. Un reactor nuclear funciona con este isótopo y genera una potencia de 100 MW. Calcular los kilos de este isótopo que se desintegran en un año de funcionamiento del reactor.

La energía desarrollada por el reactor en un año es:

$$100\,\frac{MJ}{s}\cdot 365\,\frac{dias}{año}\cdot 86400\,\frac{s}{dia}=3{,}154.10^{9}\,\frac{MJ}{año}$$

Un mol de isótopos son N_A = 6,02 10^{23} isótopos individuales y su masa es 235 g = 0,235 kg. La energía generada por esa masa es:

$$185\cdot 6{,}02.10^{23}\,MeV=185\cdot 6{,}02.10^{23}\cdot 10^{6}\,eV\cdot 1{,}6.10^{-19}\,\frac{J}{eV}=1{,}782.10^{13}\,J=1{,}782.10^{7}\,MJ$$

$$\frac{1{,}782.10^{7}\,MJ}{0{,}235kg}=\frac{3{,}154.10^{9}}{x}\quad\Rightarrow\quad x=41{,}6\ \ kg$$

3.-El filamento de una bombilla, 220 V , 100 W, tiene una longitud L y un diámetro D=0,1 mm y su resistividad ρ= 5,5.10^{-8} Ωm. Después de que la bombilla permanece encendida durante largo tiempo, adquiere una temperatura constante. Si se admite que todo el calor producido en el filamento se radia al exterior, estimar el valor de esa temperatura. Considérese que el filamento se comporta como un cuerpo negro.

Dato constante de Stefan-Botlzmann, $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \dfrac{W}{m^2 K^4}$

Cuando se alcanza el estado estacionario la energía térmica producida en la unidad de tiempo es igual a la emitida en forma de radiación por la superficie del filamento.

La potencia térmica es P = IΔV y la radiada $\sigma T^4 \cdot S = \sigma T^4 \cdot \pi D L$

$$P = \sigma T^4 \cdot \pi D L \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma\ \pi D L}}\ (1)$$

Para calcular L

$$P = I\ \Delta V = \frac{\Delta V^2}{R} = \Delta V^2 \cdot \frac{\pi D^2}{\rho\ 4L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\Delta V^2 \pi D^2}{4P\rho}$$

Llevando la última relación a (1)

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma\ \pi D \dfrac{\Delta V^2 \pi D^2}{4P\rho}}} = \sqrt[4]{\frac{4P^2\rho}{\sigma\ \pi^2\ \Delta V^2 D^3}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 100^2 \cdot 5{,}5.10^{-8}}{5{,}67.10^{-8} \cdot 3{,}14^2 \cdot 220^2 \cdot \left(0{,}1.10^{-3}\right)^3}} = 534\ \ K$$

4.-La partícula Λ^o decae mediante la transformación

$$\Lambda^o \rightarrow p + \pi^-$$

Si Λ^o se encuentra en reposo, determinar la energía cinética del pión.

Datos : Masas de las partículas

Λ^o = 1116 MeV/c^2 ; p = 938,3 MeV/c^2 ; π^- = 139,6 MeV/c^2

Si la partícula Λ^o se encuentra en reposo quiere decir que la cantidad de movimiento del protón sumada a la del pión ha de ser cero, por tanto, ambas partículas tienen el mismo momento y se dirigen en la misma dirección y en sentido opuesto. Hacemos uso de la relación relativista

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 = E_o^2 + p^2c^2$$

Aplicándola al protón y al pión

$$\left(E^2 - E_o^2\right)_p = \left(p^2c^2\right)_p \quad ; \quad \left(E^2 - E_o^2\right)_\pi = \left(p^2c^2\right)_\pi$$

Al ser los momentos iguales

$$\left(E^2 - E_o^2\right)_p = \left(E^2 - E_o^2\right)_\pi \quad \Rightarrow \quad E_p^2 - E_\pi^2 = \left(E_o^2\right)_p - \left(E_o^2\right)_\pi = (938{,}3)^2 - (139{,}3)^2 \quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$\left(E_o\right)_\Lambda = E_p + E_\pi \quad \Rightarrow \quad E_p = \left(E_o\right)_\Lambda - E_\pi = 1116 - E_\pi$$

Llevando esta ecuación a la (1)

$$\left(1116 - E_\pi\right)^2 - E_\pi^2 = \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1116^2 + E_\pi^2 - 2\cdot 1116 E_\pi - E_\pi^2 = \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$E_\pi = \frac{1116^2 - \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right)}{2\cdot 1116} = \left(E_c\right)_\pi + \left(E_\pi^o\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left(E_c\right)_\pi = \frac{1116^2 - \left(938{,}3^2 - 139{,}6^2\right)}{2\cdot 1116} - 139{,}6 = 33 \ \text{MeV}$$

5.- Un observador O´ tiene una velocidad 0,8c respecto de un observador O. Ajustan sus relojes de modo que t=t´=0 cuando x=x´=0. El observador O determina que un primer suceso ocurre en x=50 m y t =2.10^-7^ s. Un segundo suceso ocurre para el observador O´ en x´ =10 m y t´= 2.10^-7^ s. Se pide a) El tiempo determinado por O´ para el primer suceso b) El intervalo de tiempo entre los dos sucesos para el observador O, c) La separación espacial de los dos sucesos para ambos observadores

Escribimos las ecuaciones de transformación de Lorentz

$$x=\gamma\left(x'+vt'\right)\ (1) \qquad ; \qquad t=\gamma\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)\ (2)$$

$$x'=\gamma\left(x-vt\right)\ (3) \qquad ; \qquad t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)\ (4)$$

Calculamos el valor de γ , $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-0,64}}=1,67$

Para el suceso 1 y el observador O , $x_1(O)=50$ m , $t_1(O)=2.10^{-7}$ s

Para el suceso 2 y el observador O

$$x_2(O)=1,67\cdot\left(10+0,8\cdot 3.10^8\cdot 2.10^{-7}\right)=96,9\ \text{ m}$$
$$t_2(O)=1,67\cdot\left(2.10^{-7}+\frac{0,8}{3.10^8}\cdot 10\right)=3,79.10^{-7}\text{s}$$

Para el suceso 1 y el observador O´

$$x_1(O')=1,67\cdot\left(50-0,8\cdot 3.10^8\cdot 2.10^{-7}\right)=3,34\ \text{ m}$$
$$t_1(O')=1,67\cdot\left(2.10^{-7}-\frac{0,8}{3.10^8}\cdot 50\right)=1,11.10^{-7}\text{s}$$

Para el suceso 2 y el observador O´ , $x_2(O')=10$ m , $t_2(O')=2.10^{-7}$ s

a) $t_1(O')=1,11.10^{-7}$ s

b) $\Delta t(O)=t_2(O)-t_1(O)=3,79.10^{-7}-2.10^{-7}=1,79.10^{-7}$ s

c) $\Delta x(O)=x_2(O)-x_1(O)=96,9-50=46,9$ m

$\Delta x(O')=x_2(O')-x_1(O')=10-3,34=6,7$ m

6.-En un dispositivo para determinar la composición isotópica de los iones potasio $^{39}K^{+}$ y $^{41}K^{+}$, primero se aceleran en un campo eléctrico y luego van a parar a un campo magnético B perpendicular a la dirección de su movimiento. La tensión que crea el campo eléctrico es U_o aun cuando este valor puede oscilar en $\pm \Delta U$. Determinar el cociente $\frac{\Delta U}{U_o}$ para que los haces de los iones potasio no se superpongan.

Dado que la tensión toma los valores extremos $U_o + \Delta U$ y $U_o - \Delta U$ los radios de los iones potasio están comprendidos entre los siguientes valores

$$U_o + \Delta U = \frac{1}{2} m_{39} v_{M39}^2 \Rightarrow v_{M39} = \sqrt{\frac{2(U_o + \Delta U)}{m_{39}}} \quad ; \quad qBv_{M39} = \frac{mv_{M39}^2}{R_{M39}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{39}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m39} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{39}}}{Bq}$$

M significa el radio mayor y m el menor .Para el íón de potasio 41

$$\Rightarrow R_{M41} = \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{41}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{41}}}{Bq}$$

Para que no se superpongan los haces de los iones, el límite lo indica que coincidan el radio mayor del ión 39 con el radio menor del ión 41.

$$\Rightarrow R_{M39} = \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{39}}}{Bq} \quad ; \quad R_{m41} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2(U_o + \Delta U)m_{39}}}{Bq} = \frac{\sqrt{2(U_o - \Delta U)m_{41}}}{Bq} \Rightarrow (U_o + \Delta U)m_{39} = (U_o - \Delta U)m_{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(U_o + \Delta U)}{(U_o - \Delta U)} = \frac{m_{41}}{m_{39}} = \frac{41}{39} \Rightarrow 39U_0 + 39\Delta 9 = 41U_0 - 41\Delta 1 \Rightarrow 80\Delta 0 = 2U_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U}{U_o} = \frac{1}{40}$$

Dado el valor del límite, la relación para lo que no hay superposición es $\frac{\Delta U}{U_o} < \frac{1}{40}$

7.- En un sistema de referencia S dos sucesos están separados por Δt=8,0 s y $\Delta x = 2.10^9$ m. ¿Existe un sistema de referencia S´ para el que los dos sucesos sean simultáneos? ¿Existe un sistema S´´ en que los dos sucesos ocurran en el mismo punto del espacio?, en tal caso ¿cuál sería su separación temporal?

Designamos con v a la velocidad del sistema S´ y con A y B los dos sucesos y aplicamos una de las transformaciones de Lorentz a cada suceso.

$$t'_A = \frac{t_A - x_A \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t'_B = \frac{t_B - x_B \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad t'_B - t'_A = 0 = \frac{(t_A - t_B) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - \frac{v}{9.10^{16}} \cdot 2.10^9 = 0 \quad \Rightarrow 72.10^{16} = 2.10^9 v \quad \Rightarrow v = 3{,}6.10^8 \frac{m}{s}$$

Dado que v supera la velocidad de la luz, el sistema S´ no puede existir.

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad x'_B = \frac{x_B - vt_B}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad x'_B - x'_A = 0 = \frac{(x_A - x_B) - v(t_A - t_B)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{x_A - x_B}{t_A - t_B} = \frac{2.10^9}{8{,}0} = 2{,}5.10^8 \frac{m}{s}$$

La velocidad de S´ es inferior a la de la luz y por tanto el sistema puede existir.

$$t'_A = \frac{t_A - x_A \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t'_B = \frac{t_B - x_B \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \quad t'_B - t'_A = \frac{(t_A - t_B) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t'_B - t'_A = \frac{8{,}0 - \frac{2{,}5.10^8}{9.10^{16}} \cdot 2.10^9}{\sqrt{1-\left(\frac{2{,}5.10^8}{3{,}0.10^8}\right)^2}} = 4{,}4 \text{ s}$$

Este problema se puede resolver más rápidamente utilizando el invariante s.

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta l^2$$

Aplicando la relación anterior para el sistema S y para el sistema S´ en el que $\Delta t' = 0$

$$\left(3.10^8 \cdot 8{,}0\right)^2 - \left(2.10^9\right)^2 = -(\Delta l')^2 \quad \Rightarrow \quad -1{,}76.10^{18} = (\Delta l')^2$$

Este sistema no existe.

Apliquemos para el sistema S´´ en el que $\Delta l' = 0$

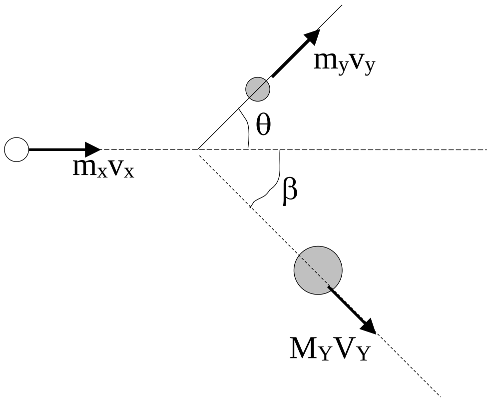
$$1{,}76.10^{18} = (c\,\Delta t')^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \sqrt{\frac{1{,}76.10^{18}}{9.10^{16}}} = 4{,}4 \text{ s}$$

8.-Calcular el valor de Q para la reacción nuclear $^{14}N(\alpha,p)^{17}O$***, sabiendo que la energía inicial de la partícula incidente vale 4,00 MeV y el protón formó con la dirección de la partícula incidente un ángulo de 60º con una energía cinética de 2,09 MeV.***

Vamos a deducir la formula general utilizando la nomenclatura más habitual para una reacción nuclear

$$x + X \rightarrow y + Y$$

La partícula incidente es x, el núcleo que hace de blanco es X (admitimos como ocurre con frecuencia que está en reposo), y, es la partícula resultante de la reacción e Y es el nuevo núcleo formado. T_x , T_y y T_Y son las energías cinéticas clásicas .
El proceso puede representarse gráficamente



Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$m_x v_x = m_y v_y \cos\theta + M_Y V_Y \cos\beta$$
$$m_y v_y \operatorname{sen}\theta = M_Y V_Y \operatorname{sen}\beta$$

Eliminamos el término que contiene el ángulo β.

$$m_x^2 v_x^2 + m_y^2 v_y^2 \cos^2\theta - 2m_x m_y v_x v_y \cos\theta = M_Y^2 V_Y^2 \cos^2\beta$$

$$m_y^2 v_y^2 \operatorname{sen}^2\theta = M_Y^2 V_Y^2 \operatorname{sen}^2\beta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_Y^2 V_Y^2 = m_x^2 v_x^2 + m_y^2 v_y^2 - 2m_x m_y v_x v_y \cos\theta$$

Introducimos en la ecuación anterior las energías cinéticas en sentido clásico.

$$T_x = \frac{1}{2} m_x v_x^2 \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{2T_x}{m_x}} \ ; \ T_y = \frac{1}{2} m_y v_y^2 \Rightarrow v_y = \sqrt{\frac{2T_y}{m_x}} \ ; \ T_x = \frac{1}{2} M_Y V_Y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_Y = \sqrt{\frac{2T_Y}{M_Y}}$$

$$M_Y^2 \frac{2T_Y}{M_Y} = m_x^2 \frac{2T_x}{m_x} + m_y^2 \frac{2T_y}{m_y} - 2m_x m_y \sqrt{\frac{2T_x}{m_x}} \cdot \sqrt{\frac{2T_y}{m_y}} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2M_Y T_Y = 2m_x T_x + 2m_y T_y - 4\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_Y = T_x \frac{m_x}{M_Y} + T_y \frac{m_y}{M_Y} - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_y}$$

El valor de Q para las reacciones nucleares es:

$$Q = T_Y + T_y - T_x = T_x \frac{m_x}{M_Y} + T_y \frac{m_y}{M_Y} - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y} + T_y - T_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = T_y \left(1 + \frac{m_y}{M_Y}\right) - T_x \left(1 - \frac{m_x}{M_Y}\right) - \frac{2\sqrt{m_x m_y T_x T_y} \cos\theta}{M_Y} \qquad (1)$$

Cuando se aplica esta ecuación se utilizan los valores de los números másicos en lugar de las masas nucleares, ya que el error que puede cometerse es pequeño y se facilitan los cálculos.
En el problema propuesto x es la partícula alfa, y es el protón e Y es el núcleo de oxígeno. Basta sustituir los valores numéricos en la ecuación (1) para hallar Q

$$Q = 2{,}09\left(1 + \frac{1}{17}\right) - 4{,}00\left(1 - \frac{4}{17}\right) - 2\sqrt{\frac{4}{17} \cdot \frac{1}{17} \cdot 4{,}00 \cdot 2{,}09} \cdot \cos 60^{\text{o}} = -1{,}2 \ \text{MeV}$$

9.-Unos protones con energía cinética 1,0 MeV bombardean un blanco de litio en reposo dando como resultado una reacción nuclear en la que se producen dos partículas alfa, las cuales forman con la dirección de los protones ángulos iguales. Calcular la energía de las partículas alfa y el ángulo que forman entre sí.
Datos: masa del protón=1,007825 u, masa de la partícula alfa = 4,00260 u , masa del núcleo de litio = 7,0160048 u, velocidad de la luz c= 2,998.10^{8} m/s, 1 u = 1,66.10^{-27} kg, carga del electrón 1,60.10^{-19} C.

El valor de Q para una reacción nuclear se puede expresar mediante la diferencia de masas. La reacción nuclear propuesta es la siguiente

$$p+{}^{7}\mathrm{Li} \rightarrow 2\ {}^{4}\mathrm{He}$$

$$Q=\left[\left(M_{\text{protón}}+M_{\text{Litio}}\right)-2\,\text{Masa}\,\alpha\right]c^2=\left(1{,}007825+7{,}00160048-2\cdot 4{,}002603\right)c^2$$

$$Q=-0{,}0186\ \mathrm{u.}\left(2{,}998.10^{8}\right)^2=-0{,}0186\mathrm{u}\cdot\frac{1{,}66.10^{-27}\,\mathrm{kg}}{1\mathrm{u}}\cdot\left(2{,}998.10^{8}\right)^2=-2{,}78.10^{-12}\,\mathrm{J}$$

$$Q=-2{,}78.10^{-12}\,\mathrm{J}\cdot\frac{1\mathrm{eV}}{1{,}60.10^{-19}\,\mathrm{J}}=-1{,}74.10^{7}\,\mathrm{eV}=-17{,}4\ \mathrm{MeV}$$

También Q es la diferencia de energías

$$-17{,}4=T_{\text{protón}}-2T_{\alpha}\ \Rightarrow\ -18{,}4=-2\cdot T_{\alpha}\ \ \Rightarrow T_{\alpha}=9{,}2\,\mathrm{MeV}$$

Aplicamos el principio de la conservación de la cantidad de movimiento

$$m_p v_p=2m_\alpha v_\alpha\cos\theta\ \ \Rightarrow\ \ m_p\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1}{m_p}}=2\,m_\alpha\cdot\sqrt{\frac{2.9{,}2}{m_\alpha}}\cos\theta\ \Rightarrow\ \ 2m_p=8\cdot 9{,}2\,m_\alpha\cos^2\theta$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{m_p}{4\cdot 9{,}2\cdot m_\alpha}}=\sqrt{\frac{1{,}007825}{4\cdot 9{,}2\cdot 4{,}002603}}=0{,}083\ \Rightarrow\ \theta=85{,}3^{\circ}$$

El ángulo que forman entre sí las dos partículas alfa es: 2*85,3 =170,5º

10.-Un mesón π^{+} en reposo se desintegró en un muón μ^{+} y un neutrino. Determinar la energía cinética del muón y del neutrino.
Datos .Masas de las partículas: π^{+} =139,6 MeV/c²; μ^{+} =105,7 MeV/c²; neutrino =0.

Teniendo en cuenta que el mesón se desintegra desde el reposo, las otras dos partículas deben salir en direcciones opuestas y con el mismo momento lineal, al cual designamos con p.
La conservación de la energía nos dice que

$$E_\pi = E_\mu + E_\nu$$

Teniendo presente la relación relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, escribimos:

$$m_\pi c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_\mu^2 c^4} + pc \Rightarrow \left(m_\pi c^2 - pc\right)^2 = p^2c^2 + m_\mu^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_\pi^2 c^4 + p^2c^2 - 2m_\pi pc^3 = p^2c^2 + m_\mu^2 c^4 \Rightarrow m_\pi^2 c^4 - 2m_\pi pc^3 = m_\mu^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{c\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)}{2m_\pi}$$

La energía del neutrino es:

$$E_\nu = pc = \frac{c^2\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)}{2m_\pi} = \frac{c^2\left[\left(139{,}6\ \frac{\text{MeV}}{c^2}\right)^2 - \left(105{,}7\ \frac{\text{MeV}}{c^2}\right)^2\right]}{2\cdot 139{,}6\ \frac{\text{MeV}}{c^2}}$$

$$E_\nu = \frac{139{,}6^2 - 105{,}7^2}{279{,}2}\ \frac{\frac{(\text{MeV})^2}{c^2}}{\frac{\text{MeV}}{c^2}} = 29{,}8\ \text{MeV}$$

La energía del muón es:

$$E_\mu = E_\pi - 29{,}8 \Rightarrow m_\mu c^2 + T_\mu = m_\pi c^2 - 29{,}8 \Rightarrow T_\mu = c^2\left(m_\pi - m_\mu\right) - 29{,}8$$

$$T_\mu = 139{,}6 - 105{,}7 - 29{,}8 = 4{,}1\ \text{MeV}$$

11.-Determinar la energía umbral necesaria para crear un antiprotón mediante la reacción: $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.

Realizar el mismo cálculo para la reacción: $p + p \rightarrow p + p + \pi^{o}$

Datos: Masa del protón y antiprotón = 938,26 MeV/c²; masa del pión = 135,0 MeV/c².

En estas reacciones entre partículas un protón actúa como proyectil dotado de energía cinética y momento y el otro está en reposo. En el sistema de referencia del protón en reposo la energía inicial es:

$$E_L = m_p c^2 + T + m_p c^2$$

Siendo m_p la masa del protón en reposo y T la energía cinética del protón que actúa como proyectil.

En el sistema de referencia del centro de masas los dos protones tienen momento nulo y dado que se pide la energía umbral (mínima) los cuatro protones deben estar en reposo siendo su energía

$$E_{cm} = 4 m_p c^2$$

Hacemos uso del invariante relativista $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, donde E y p son la energía y el impulso totales antes de la colisión y m la masa en reposo de las partículas que se forman

$$E_L^2 - p^2 c^2 = E_{cm}^2 \Rightarrow \left(2 m_p c^2 + T\right)^2 - p^2 c^2 = 16 m_p^2 c^4 \quad (1)$$

La energía del protón que actúa como proyectil

$$E_p^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4 \Rightarrow p^2 c^2 = E_p^2 - m_p^2 c^4 \Rightarrow p^2 c^2 = \left(m_p c^2 + T\right)^2 - m_p^2 c^4$$

Combinando esta ecuación con la (1), resulta:

$$\left(2 m_p c^2 + T^2\right)^2 - \left[\left(m_p c^2 + T\right)^2 - m_p^2 c^4\right] = 16\, m_p^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 m_p^2 c^4 + T^2 + 4 T m_p c^2 - \left(m_p^2 c^4 + T^2 + 2 T m_p c^2 - m_p^2 c^4\right) = 16\, m_p^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 T m_p c^2 = 12\, m_p^2 c^4 \Rightarrow \quad T = 6\, m_p c^2 = 6 \cdot 938{,}26 \frac{\text{MeV}}{c^2} \cdot c^2 = 5{,}63.10^{3}\,\text{MeV}$$

Para la segunda reacción el procedimiento a seguir es el mismo

Ahora $E_{cm} = \left(2 m_p + m_\pi\right) c^2$

$$4m_p^2c^4 + T^2 + 4Tm_pc^2 - \left(m_p^2c^4 + T^2 + 2Tm_pc^2 - m_p^2c^4\right) = \left(2m_p + m_\pi\right)^2 c^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4m_p^2c^4 + 2Tm_pc^2 = \left(2m_p + m_\pi\right)^2 c^4 \Rightarrow 2Tm_p = \left(2m_p + m_\pi\right)^2 c^2 - 4m_p^2c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{4m_p^2 + m_\pi^2 + 4m_pm_\pi - 4m_p^2}{2m_p} \cdot c^2 = \frac{m_\pi\left(m_\pi + 4m_p\right)}{2m_p} \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{135{,}0\left(135{,}0 + 4 \cdot 938{,}26\right)}{2 \cdot 938{,}26} = 280\ \text{MeV}$$

12.- Una partícula tiene una masa en reposo m₀. Se somete a una fuerza constante de módulo F. Encontrar las ecuaciones que relacionan con el tiempo su velocidad y posición, sabiendo que cuando t=0, v=0, y s= 0.

Utilizamos la ecuación

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow \int F\,dt = \int d\left(\frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow$$

$$F\,t = \frac{m_0\, v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + Cte$$

Cuando t= , v=0 , luego Cte =0

$$F^2\, t^2 = \frac{m_o^2 v^2 c}{c^2 - v^2} \Rightarrow F^2\, t^2\, c^2 - F^2\, t^2\, v^2 = m_o^2 v^2 c \Rightarrow m_o^2 v^2 c + F^2\, t^2\, v^2 = F^2\, t^2\, c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v = \frac{F\,c\,t}{\sqrt{m_o^2 c + F^2\, t^2}}$$

Cuando t tiende a infinito, $m_o^2 c << F^2 t^2$ y $v \to c$

Para calcular la posición de la partícula respecto a la posición inicial usamos la expresión $v = \frac{ds}{dt}$.

$$s = \int v\,dt = \int \frac{F\,c\,t}{\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2\, t^2}} dt$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$m_o^2\, c^2 + F^2\, t^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad 2F^2 t = 2\,u\,du$$

Sustituyendo en la integral

$$s = \int \frac{F\,c\,\frac{u\,du}{F^2}}{u} = \frac{c}{F} u + Cte = \frac{c}{F}\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2 t^2} + Cte$$

Cuando t=0 , s=0

$$0 = \frac{c}{F}\sqrt{m_o^2\, c^2} + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{m_o\, c^2}{F}$$

$$s = \frac{c}{F}\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2 t^2} - \frac{m_o^2\, c^2}{F} = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m_o^2\, c^2 + F^2 t^2} - m_o^2\, c\right)$$

13.- a) Un fotón de energía E choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo m_o y es absorbido ¿Cuál es la velocidad de la partícula compuesta resultante?

b) Una partícula de masa en reposo m_o se desplaza a una velocidad de $v = \frac{4}{5}c$, choca con una partícula semejante que está en reposo y se forma una partícula compuesta.¿Cuál es la masa en reposo de la partícula compuesta y cuál su velocidad?

a) Designamos con v a la velocidad de la partícula compuesta y con M´ a su masa.

El principio de conservación de la energía nos dice:

Energía antes del choque: $E + m_o c^2$; Energía después del choque: $M'c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$E + m_o c^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

El principio de la conservación de la cantidad de movimiento nos dice:

Antes del choque: $\frac{E}{c} + 0$; después del choque $M'v = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\frac{E}{c} = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2)

$$\frac{E + m_o c^2}{c^2} = \frac{E}{c\,v} \Rightarrow v = \frac{E\,c}{E + m_o c^2} = \frac{c}{1 + \frac{m_o c^2}{E}}$$

b) Designamos con M a la masa de la partícula compuesta y con u a su velocidad.
Por ser un choque inelástico existe conservación de la cantidad de movimiento.

$$\frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = M'u = \frac{M_o u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad (3)$$

La conservación de la masa

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_o=\frac{M_o}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\quad (4)$$

De (3) y (4)

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_o=\frac{m_o v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+1=\frac{v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad\Rightarrow\quad \frac{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v}{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{v}{u}\quad\Rightarrow\quad 1+\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\frac{v}{u}\quad\Rightarrow\quad 1+\frac{3}{5}=\frac{v}{u}\;\Rightarrow \frac{8}{5}=\frac{\frac{4}{5}c}{u}\quad\Rightarrow\quad u=\frac{c}{2}$$

Llevando el valor de u a la ecuación (4) resulta:

$$\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}+m_0=\frac{M_o}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\;\Rightarrow\;\frac{5m_o}{3}+m_o=\frac{2M_o}{\sqrt{3}}\;\Rightarrow\;\frac{8m_o}{3}=\frac{2M_o}{\sqrt{3}}\;\Rightarrow\; M_o=\frac{4m_o\sqrt{3}}{3}$$

14.-A las doce del mediodía un cohete espacial pasa frente a la Tierra con una velocidad 0,8c. Los observadores de la nave y de la Tierra están de acuerdo en que efectivamente es mediodía.
a) A las 12h 30 min., según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra fija con relación a la Tierra y cuyos relojes señalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?
b) ¿A qué distancia de la Tierra (en coordenadas terrestres) se encuentra la estación?
c) A las 12 h 30 min., hora de la nave, se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuándo (en tiempo de la Tierra) recibe ésta la señal?
d) La estación terrestre contesta inmediatamente.¿Cuando se recibirá la respuesta (hora de la nave)?

Designamos con S al sistema ligado a la Tierra y con S´ el ligado a la nave, por tanto, S´ se desplaza con velocidad 0,8 c respecto de S.

a) Utilizamos la relación

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{30\,\text{min}}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 50\,\text{min.}$$

Δt es el intervalo temporal para el sistema S, luego la hora en la estación y en la Tierra es: 12h 50 min.

b) La posición de la estación espacial es la misma que ocupa la nave a las 12h 50 min. Dado que su velocidad es 0,8c, la distancia vale:

$$d = 0{,}8c \cdot (50 \cdot 60\,\text{s}) = 0{,}8 \cdot 3.10^8 \cdot 3000 = 7{,}2.10^{11}\text{m}$$

c) La señal viaja a la velocidad de la luz y ha de recorrer la distancia $7{,}2.10^{11}$ m.

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{7{,}2.10^{11}}{3.10^8} = 2400\,\text{s} = 40\,\text{min}$$

Desde las 12 h 50 min han pasado 40 minutos más, por tanto la hora en la Tierra es.1h 30 min.

d) Calculamos la distancia D, de la nave respecto de la Tierra cuando ésta emite la señal de respuesta hacia la nave.

$$\Delta x = 0{,}8\,c \cdot 2400\text{s} = 5{,}76.10^{11}\text{m} \quad \Rightarrow \quad D = 7{,}2.10^{11} + 5{,}76.10^{11} = 1{,}296.10^{12}\ \text{m}$$

Calculamos la hora que marca en ese instante el reloj de la nave.

$$40\min = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 24\min \quad \Rightarrow \quad 12h\,30\min + 24\min = 12h\,54\min$$

Designamos con t_f el intervalo de tiempo (en tiempo terrestre) que necesita la señal emitida por la Tierra en llegar a la nave y con d la distancia que recorre la nave en ese tiempo

$$d = 0{,}8c \cdot t_f$$

Cuando la señal alcance la nave, dicha señal habrá recorrido una distancia D+d.

$$D + d = c \cdot t_f \Rightarrow 1{,}296.10^{12} + 0{,}8 \cdot 3.10^8 \cdot t_f = 3.10^8 t_f \quad \Rightarrow \quad t_f = 21600s = 6\,\text{horas}$$

El intervalo de 6 horas está medido con los relojes de la Tierra, con los de la nave son:

$$6\,\text{horas} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-0{,}8^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 3{,}6\,\text{horas} = 3\,\text{horas} + 36\min$$

El reloj de la nave marcará

$$12h\,54\min + 3\text{horas}\,36\min = 4h\,30\min$$

15.-Un radioisótopo del fósforo tiene un periodo de semidesintegración T =14,3 días y se forma en un reactor nuclear a velocidad constante q= 2,7.10^9^ núcleos/s . Determinar cómo varía la actividad de la muestra con el tiempo.

En el instante inicial no existe nada del isótopo; la cantidad del mismo aumenta a medida que pasa el tiempo, ese aumento lo provoca la producción del reactor nuclear pero al mismo tiempo ocurre que parte del radioisótopo desaparece como consecuencia de que es radiactivo.
Designamos con N el número de núcleos de fósforo que existen en un tiempo t. La velocidad de crecimiento del número de átomos está dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{dN}{dt} = q - \lambda N = q - \frac{T}{\ln 2}$$

El primer término de la ecuación da la velocidad de formación del radioisótopo y el segundo la velocidad de desaparición.

La ecuación diferencial anterior se resuelve multiplicándola por el término $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}\frac{dN}{dt} + \lambda N e^{\lambda t} = q e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(N e^{\lambda t}\right) = q e^{\lambda t}$$

La solución de la ecuación es:

$$N e^{\lambda t} = \frac{q}{\lambda} e^{\lambda t} + Cte$$

La constante de integración se halla teniendo en cuanta que para t=0 , N=0

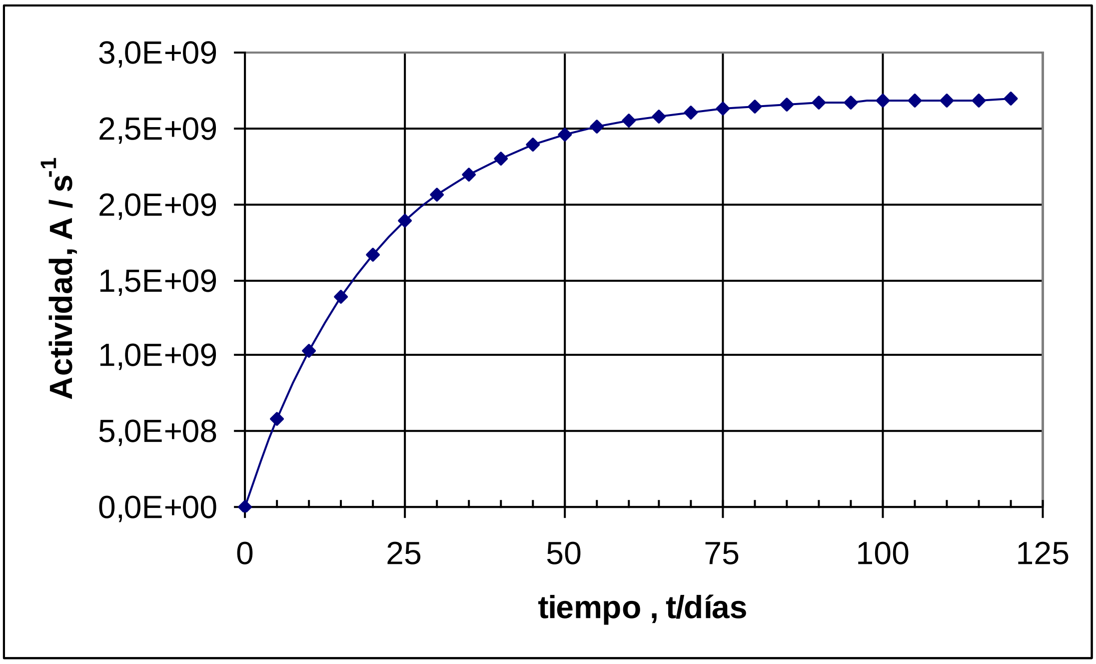
$$0 = \frac{q}{\lambda} + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = -\frac{q}{\lambda}$$

$$N e^{\lambda t} = \frac{q}{\lambda} e^{\lambda t} - \frac{q}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{q}{\lambda} - \frac{q}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

La actividad de a muestra es λN .

$$A = q\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = q\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T}t}\right)$$

La ecuación anterior nos dice que cuando t=0 la actividad es nula y cuando el tiempo es muy grande, infinito, se obtiene una actividad igual a q. Si representamos la actividad frente al tiempo obtendremos una curva cuya asíntota es q.



3,0E+09
2,5E+09
2,0E+09
1,5E+09
1,0E+09
5,0E+08
0,0E+00
Actividad, A / s^-1
0
25
50
75
100
125
tiempo , t/días

16.- El ²³²U se desintegra emitiendo una partícula alfa y pasando a ²²⁸Th. Calcular la energía cinética de la partícula alfa.
Datos. Masas en reposo: ^{232}U= 232,0372 u ; ^{228}Th=228,0288 u
Partícula alfa = 4,0026 u ; 1 u = 1,66.10^{-27} kg.

Admitimos que el uranio se encuentra en reposo. La conservación de la energía nos dice.

$$E_U = E_{Th} + E_\alpha \ (1)$$

El principio de conservación de la cantidad de movimiento: $m_{Th} v_{Th} = m_\alpha v_\alpha$ (2)

La energía cinética del torio, según la mecánica clásica, es: $T_{Th} = \frac{1}{2} m_{Th} v_{Th}^2$ (3)

Despejamos v_{Th} de la ecuación (2) y sustituimos en (3)

$$T_{Th} = \frac{1}{2} m_{Th} \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_{Th}^2} = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \frac{m_\alpha}{m_{Th}} = T_\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{m_{Th}}$$

De (1) se deduce:

$$m_{U(o)}c^2 = m_{Th(0)}c^2 + T_{Th} + m_{\alpha(o)}c^2 + T_\alpha = m_{Th(0)}c^2 + T_\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{m_{Th}} + m_{\alpha(o)}c^2 + T_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2\left(m_{U(o)} - m_{Th(0)} - m_{\alpha(o)}\right) = T_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}\right) \Rightarrow T_\alpha = \frac{c^2\left(m_{U(0)} - m_{Th(0)} - m_{\alpha(o)}\right)}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{Th}}}$$

$$T_\alpha = \frac{\left(3{,}0.10^8\right)^2 (232{,}0372 - 228{,}0288 - 4{,}0026)\cdot 1{,}66.10^{-27}}{1 + \frac{4{,}0026}{228{,}0288}} = 8{,}52.10^{-13}\ \mathrm{J}$$

Expresando la energía en MeV.

$$T_\alpha = 8{,}52.10^{-13}\ \mathrm{J} \cdot \frac{\mathrm{eV}}{1{,}6.10^{-19}\mathrm{J}} \cdot \frac{\mathrm{MeV}}{10^6\ \mathrm{eV}} = 5{,}33\ \mathrm{MeV}$$

El problema se ha resuelto utilizando conceptos relativistas combinados con expresiones de la mecánica clásica. Vamos ahora a resolverlo utilizando exclusivamente la teoría de la relatividad y ello nos permitirá comparar los resultados.

Partimos de la ecuación (1), y recurrimos a la ecuación relativista

$$E_{Th}^2 = p_{Th}^2 c^2 + m_{Th(o)}^2 c^4 \ ; \ E_\alpha^2 = p_\alpha^2 c^2 + m_{\alpha(o)}^2 c^4 \quad (4)$$

Como $|\mathbf{p}_{Th}| = |\mathbf{p}_\alpha|$, despejamos de (4) los valores del impulso y los igualamos

$$E_{Th}^2 - m_{Th(o)}^2 c^4 = E_\alpha^2 - m_{\alpha(o)}^2 c^4 \Rightarrow E_{Th} = \sqrt{E_\alpha^2 + c^4\left(m_{Th(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2\right)}$$

A partir de la ecuación (1)

$$m_{U(o)} c^2 - E_\alpha = \sqrt{E_\alpha^2 + c^4\left(m_{Th(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_{U(o)}^2 c^4 + E_\alpha^2 - 2m_{U(o)} c^2 E_\alpha = E_\alpha^2 + c^4\left(m_{Th(o)}^2 - m_{\alpha(o)}^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\alpha = T_\alpha + m_{\alpha(o)} c^2 = \frac{c^2\left(m_{U(o)}^2 - m_{Th(o)}^2 + m_{\alpha(o)}^2\right)}{2m_{U(o)}} \Rightarrow$$

$$T_\alpha = \frac{c^2\left(m_{U(o)}^2 - m_{Th(o)}^2 + m_{\alpha(o)}^2\right)}{2m_{U(o)}} - m_{\alpha(o)} c^2$$

$$T_\alpha = \frac{\left(3{,}0.10^8\right)^2\left(232{,}0372^2 - 228{,}0288^2 + 4{,}0026^2\right).1{,}66.10^{-27}}{2\cdot 232{,}0372} - 4{,}0026\cdot\left(3{,}0.10^8\right)^2\cdot 1{,}66.10^{-27}$$

$$T_\alpha = 8{,}52.10^{-13}\ \mathrm{J}$$

El resultado es el mismo, lo que comprueba que cuando las velocidades no son próximas a la de la luz se pueden aplicar conceptos de la mecánica clásica.

17..-En un sistema de referencia K, una partícula posee una energía total de 5 GeV y una cantidad de movimiento 3 GeV/c, (es decir pc = 3 GeV). a) ¿Cuál es la energía de esta partícula en un sistema K´ en el cual la cantidad de movimiento es 2 GeV/c. b) ¿Cuál es su masa en reposo, expresada en uma? c) ¿Cuál es la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia?

a) Utilizamos el invariante de relatividad

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 \Rightarrow 5^2 - 3^2 = E'^2 - 2^2 \Rightarrow E' = \sqrt{20}\,\text{GeV}$$

b) Refiriéndonos al sistema K podemos escribir

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ;\ pc = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{m_o c^2}{E} = \frac{m_o v c}{p} \Rightarrow v = \frac{pc}{E} = \frac{3}{5}c\ \frac{m}{s}$$

Conocida la velocidad de la partícula en el sistema K, sustituimos ese valor en la ecuación de la energía

$$5.10^9 \cdot 1{,}6.10^{-19} = \frac{m_o c^3}{\sqrt{c^2 - \frac{9c^2}{25}}} = \frac{5\,m_o c^2}{4} \Rightarrow m_o = \frac{10^9 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot 4}{\left(3.10^8\right)^2} = 7{,}11.10^{-27}\ \text{kg}$$

Dado que nos piden la masa en uma recordemos que un uma es la doceava parte de la masa de un átomo de ^{12}C.

$$1\ \text{uma} = \frac{1}{12} \cdot \text{masa}\,^{12}C = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}}{6{,}02.10^{23}} = 1{,}66.10^{-27}\ \text{kg}$$

$$\frac{1\,\text{uma}}{1{,}66.10^{-27}\,\text{kg}} = \frac{x}{7{,}11.10^{-27}\,\text{kg}} \Rightarrow x = 4{,}3\ \text{uma}$$

c) Designamos con V la velocidad con que se desplaza el sistema K´ respecto del K. Sabemos que la velocidad de la partícula en el sistema K es 3/5 c. Calculamos ahora la velocidad de esa partícula medida en el sistema K´

$$v' = \frac{p'c}{E'} = \frac{2}{\sqrt{20}}c$$

Utilizando la ecuación relativista de la transformación de la velocidad de un sistema a otro, siendo V la velocidad con que el sistema K´ se mueve respecto del K, y –V es la velocidad con que el observador situado en K se mueve respecto de K´

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \Rightarrow v' = \frac{(v - V)c^2}{c^2 - vV} \Rightarrow v' c^2 - v' vV = v c^2 - V c^2 \Rightarrow V\left(c^2 - v' v\right) = c^2 (v - v')$$

$$V = \frac{c^2 (v - v')}{c^2 - v' v} = \frac{c^2\left(\frac{3}{5}c - \frac{2}{\sqrt{20}}c\right)}{c^2 - \frac{3}{5}c \cdot \frac{2}{\sqrt{20}}c} = \frac{c\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{\sqrt{20}}\right)}{1 - \frac{6}{22{,}4}} = 0{,}21\,c$$

18.- a) Calcular la velocidad de retroceso de un átomo de sodio después de absorber un fotón de longitud de onda λ= 589 nm b) Calcular la velocidad promedio de los átomos de sodio cuando se encuentran a una temperatura de T= 300 K c) Determinar el número de fotones que se requieren para que la velocidad de un átomo de sodio a la temperatura de 300K disminuya a 10 cm/s.

Datos: Masa del átomo de sodio = 23 uma
Constante de Planck= 6,63.10⁻³⁴ Js
Unidad de masa atómica = 1,66.10⁻²⁷ kg
Constante de Boltzmann = 1,38.10⁻²³ J/K

a) Cuando el átomo de sodio absorbe un fotón se conserva la cantidad de movimiento antes y después del proceso

$$p_{fotón} = p_{átomo} \Rightarrow \frac{E}{c} = m\,v \Rightarrow \frac{h\,\nu}{c} = mv \Rightarrow v = \frac{h\,\nu}{m\,c} = \frac{h\frac{c}{\lambda}}{mc} = \frac{h}{m\,\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{6{,}63.10^{-34}}{23\cdot 1{,}66.10^{-27}\cdot 589.10^{-9}} = 2{,}95.10^{-2}\ \frac{m}{s}$$

b)

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\,v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3k\,T}{m}} = \sqrt{\frac{3\cdot 1.38.10^{-23}\cdot 300}{23\cdot 1{,}66.10^{-27}}} = 570\,\frac{m}{s}$$

c) Un fotón es capaz de hacer variar la velocidad de un átomo de sodio en $2{,}95.10^{-2}$ m. Para disminuir la velocidad de un átomo desde 570 m/s a 10 cm/ s necesitamos x fotones

$$\frac{1\,fotón}{2{,}95.10^{-2}} = \frac{x}{570 - 2{,}95.10^{-2}} \Rightarrow x = \frac{570 - 2{,}95.10^{-2}}{2{,}95.10^{-2}} = 1{,}93.10^{4}$$

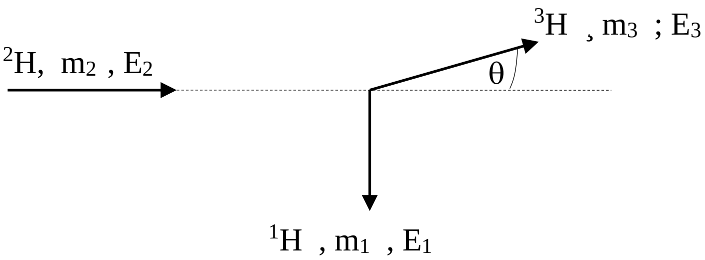
19.- Deuterones ^2H, con energía E_2 y masa m_2 , se dirigen contra un blanco formado por deuterones en reposo, dando lugar a la siguiente reacción nuclear:

$$^2H + {}^2H \Rightarrow {}^1H + {}^3H$$

Los protones, de masa m_1 y energía E_1 , forman un ángulo de 90º con la dirección inicial de los deuterones. Calcular la masa m_3 del tritio a partir de los siguientes datos:

m_1=1,007825 uma ; $\frac{E_1}{c^2} = 1{,}011547$ uma ; $\frac{E_2}{c^2} = 2{,}016043$ uma ;
m_2=2,014102 uma ; velocidad de la luz c=2,99792.10^8 m/s
1 uma = 1,660538.10^{-27} kg ; 1 MeV= 1,602176.10^{-13} J

Designamos con θ el ángulo que forman los núcleos de tritio con la dirección original de los deuterones



Aplicamos los principios de conservación de la energía y del impulso

$$E_2 + m_2 c^2 = E_1 + E_3 \quad (1)$$
$$p_3 \cos\theta = p_1$$
$$p_3 \,\mathrm{sen}\,\theta = p_2$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$ (2)

Ahora vamos a buscar una relación entre la energía de una partícula y su impulso

$$E = mc^2 \;;\; p = mv \Rightarrow v = \frac{pc^2}{E}; p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_o \frac{pc^2}{E}}{\sqrt{1-\frac{p^2c^4}{E^2c^2}}} = \frac{m_0 pc^2}{\sqrt{E^2 - p^2c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{E^2 - p^2 c^2}} \quad \Rightarrow \quad E^2 - p^2c^2 = m_o^2 c^4 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{E^2 - m_o^2 c^4}{c^2} \quad (3)$$

Aplicamos la ecuación (3) en (2) y luego aplicamos la ecuación (1):

$$E_3^2 - m_3^2 c^4 = E_1^2 - m_1^2 c^4 + E_2^2 - m_2^2 c^4 \Rightarrow m_3 = \sqrt{\frac{E_3^2 - E_1^2 + m_1^2 c^4 - E_2^2 + m_2^2 c^4}{c^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 = \sqrt{\frac{\left(E_2 + m_2 c^2 - E_1\right)^2 - E_1^2 + m_1^2 c^4 - E_2^2 + m_2^2 c^4}{c^4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_3 = \sqrt{\frac{\left(E_2 + m_2 c^2 - E_1\right)^2 - \left(E_1^2 + E_2^2\right)}{c^4} + m_1^2 + m_2^2}$$

$$\frac{E_2}{c^2} - \frac{E_1}{c^2} = 2{,}016041 - 1{,}011547 = 1{,}004494 \Rightarrow$$

$$E_2 - E_1 = 1{,}004494 \text{ uma} \cdot 1{,}660538.10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot \left(2{,}99792.10^{8}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1{,}49912.10^{10}\,\text{J}$$

$$m_2 c^2 = 2{,}014102 \text{ uma} \cdot 1{,}660538.10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot \left(2{,}99792.10^{8}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3{,}00587.10^{-10}\,\text{J}$$

$$E_2 + m_2 c^2 - E_1 = 4{,}50499.10^{-10}\,\text{J} \Rightarrow \left(E_2 + m_2 c^2 - E_1\right)^2 = 2{,}02949.10^{-19}\,\text{J}^2$$

$$E_1 = 1{,}011547 \text{ uma} \cdot 1{,}660538.10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot \left(2{,}99792.10^{8}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1{,}50965.10^{-10}\,\text{J}$$

$$E_2 = 2{,}016043 \text{ uma} \cdot 1{,}660538.10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}} \cdot \left(2{,}99792.10^{8}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3{,}00877.10^{-10}\,\text{J}$$

$$E_1^2 + E_2^2 = \left(1{,}50965.10^{-10}\right)^2 + \left(3{,}00877.10^{-10}\right)^2 = 1{,}13317.10^{-19}\,\text{J}^2$$

$$\frac{\left(E_2 + m_2 c^2 - E_1\right)^2 - \left(E_1^2 + E_2^2\right)}{c^4} = \frac{\left(2{,}02949 - 1{,}13317\right).10^{-19}}{\left(2{,}99792.10^{8}\right)^4} = 1{,}10964.10^{-53}\,\text{kg}^2$$

$$m_1^2 = \left(1{,}007825 \text{ uma}.1{,}660538.10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}}\right)^2 = 2{,}80071.10^{-54}\,\text{kg}^2$$

$$m_2^2 = \left(2{,}014102 \text{ uma}.1{,}660538.10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{uma}}\right)^2 = 1{,}11856.10^{-53}\,\text{kg}^2$$

$$m_1^2 + m_2^2 = 1{,}39863.10^{-53}\,\text{kg}^2$$

$$m_3 = \sqrt{1{,}10964.10^{-53} + 1{,}39863.10^{-53}} = 5{,}00826.10^{-27}\,\text{kg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 = 5{,}00826.10^{-27}\,\text{kg} \cdot \frac{\text{uma}}{1{,}660538.10^{-27}\,\text{kg}} = 3{,}01605 \text{ uma}$$

20.- La luz emplea aproximadamente 10^5 años en recorrer de extremo a extremo nuestra galaxia. La mayor energía de las partículas conocidas es del orden de 10^{-19} eV. ¿Cuánto tiempo tardará un protón con esa energía en recorrer la galaxia si el tiempo se mide en el sistema en reposo a) de la galaxia, b) de la partícula?
Datos. Masa del protón $1{,}67.10^{-27}$ kg ; 1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J

Según la teoría de la relatividad la energía cinética del protón es:

$$E_C = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_o\right)c^2 \Rightarrow \frac{E_c}{m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{E_c + m_0c^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_0c^2}{E_c + m_0c^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{1{,}67.10^{-27}\cdot\left(3.10^8\right)^2}{10^{-19}\cdot 1{,}6.10^{-19} + 1{,}67.10^{-27}\cdot\left(3.10^8\right)^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}503.10^{-10}}{1{,}6 + 1{,}503.10^{-10}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 9{,}39.10^{-11} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} \approx 1 \Rightarrow v \approx c$$

La velocidad del protón es muy próxima a la velocidad de la luz y por tanto desde el sistema S en el que nuestra galaxia está en reposo el tiempo medido en S es 10^5 años.
En la figura 1, S es el sistema en el que nuestra galaxia está en reposo y S´ es el sistema en el que el protón está en reposo.

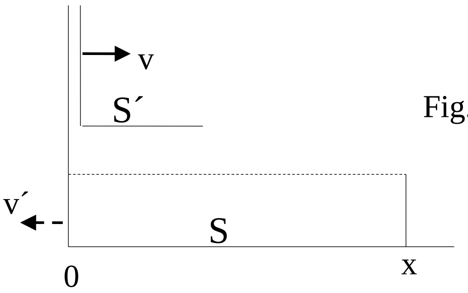


Fig.1

Para S la distancia ox = D es decir la distancia que la luz tarda 10^5 años en recorrerla y v es la velocidad que mide S del protón que es muy próxima a la velocidad de la luz.
Desde S´ , el sistema S se mueve con velocidad v´, igual en módulo a v, pero al medir la distancia ox = D el valor que encuentra, según la teoría de a relatividad es :

$$D´= D\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = D\cdot 9{,}39.10^{-11}$$

El tiempo que se mide desde S´ en recorrer la distancia D´ es:

$$t´ = \frac{D \cdot 9{,}39.10^{-11}}{v´} = \frac{10^5 \cdot 3.10^8 \cdot 86400 \cdot 365 \cdot 9{,}39.10^{-11}}{3.10^8} = 296\,\mathrm{s} \approx 5 \text{ minutos}$$

21.- Un átomo de masa M se encuentra en reposo, en él se produce un salto electrónico desde una órbita más externa a una más interna con un cambio de energía ΔE y se emite un fotón. A) Se pide determinar la energía de retroceso del átomo. B) Calcular la frecuencia del fotón emitido por un átomo de hidrógeno en un salto electrónico desde el nivel n=5 al nivel en que el átomo queda en su estado fundamental.
Datos. Masa aproximada del átomo de hidrógeno 1 uma
Energía del átomo de hidrógeno E=-13,6/n^2 eV
Constante de Planck = 6,63.10^{-34} Js

a) Designamos con E_f la energía del fotón y con E_a la del átomo. En el proceso se conserva la energía y la cantidad de movimiento.

$$\Delta E = E_a + E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + E_f \qquad (1)$$

$$p_a = p_f \Rightarrow Mv = \frac{E_f}{c} \Rightarrow E_f = Mvc \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mvc \Rightarrow v^2 + 2vc - \frac{2\Delta E}{M} \Rightarrow v = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 + 8\frac{\Delta E}{M}}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2 + 2\frac{\Delta E}{M}}$$

La solución es tomar el signo positivo $v = -c + \sqrt{c^2 + 2\frac{\Delta E}{M}}$ (3)

b) La energía del átomo de hidrógeno para el nivel n=5 es E=-13,6/25=-0,54 eV

$$\Delta E = -0{,}54 - (-13{,}6) = 13{,}06\ eV = 13{,}06\ eV \cdot \frac{1{,}6.10^{-19}\,J}{eV} = 2{,}09.10^{-18}\,J$$

$$2\frac{2{,}09.10^{-18}}{1 \cdot 1{,}66.10^{-27}} = 2{,}52.10^{9}\ \frac{m^2}{s^2}\ ; c^2 = 9.10^{16}\ \frac{m^2}{s^2}$$

De los valores se deduce que: $c^2 >> 2\frac{\Delta E}{M}$ y como consecuencia de ello $v \approx 0$. La energía ΔE se la lleva el fotón

$$\Delta E = h\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2{,}09.10^{-18}}{6{,}63.10^{-34}} = 3{,}2.10^{15}\,Hz$$

22.-Una partícula de masa en reposo m(o)₁ se desplaza con una velocidad +v₁ constante paralela al eje X de un sistema de referencia S. En este mismo sistema se encuentra, enfrente de la partícula anterior, otra de masa en reposo m(o)₂ con velocidad nula. Aplicando la teoría de la relatividad

a) Calcular la cantidad de movimiento de ambas partículas en el sistema S.

b) Calcular la energía de cada partícula respecto del sistema S

c) Calcular la velocidad del centro de masa del sistema formado por las dos partículas respecto de S

d) Calcular las velocidades de las partículas respecto del centro de masas.

e) Calcular las cantidades de movimiento de ambas partículas respecto del sistema ligado al centro de masas.

Utilizar las relaciones siguientes: $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma \ ; \quad \frac{m(o)_2}{m(o)_1}=\mu$

a) La cantidad de movimiento en la teoría de la relatividad es: $\vec{p}=\gamma m \vec{v}$, siendo m la masa en reposo de la partícula

$$\vec{p}_1=\gamma\, m(o)_1\, \vec{v}_1 \ ; \quad \vec{p}_2=\gamma\, m(o)_2\, \vec{v}_2=0$$

b) La ecuación de la energía según la teoría de la relatividad: $E=\gamma\, mc^2$. Para la partícula 2 que esta en reposo $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}=1$

$$E_1=\gamma\, m(o)_1 c^2 \ ; \quad E_2=\gamma\, m(o)_2 c^2=m(o)_2 c^2$$

c) Recurrimos a la ecuación de la velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_{CM}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Las masas que figuran en la ecuación anterior son las masas medidas en el sistema S

$$\vec{v}_{CM}=\frac{\gamma\, m(o)_1\, \vec{v}_1+\gamma\, m(o)_2\, \vec{v}_2}{\gamma\, m(o)_1+m(o)_2}=\frac{\gamma\, m(o)_1\, \vec{v}_1}{\gamma\, m(o)_1+m(o)_2}=\frac{\gamma\, \vec{v}_1}{\gamma+\frac{m(o)_2}{m(o)_1}}=\frac{\gamma\, \vec{v}_1}{\gamma+\mu}$$

d) La ecuación relativista que relaciona las velocidades medidas en dos sistemas es:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Aplicando la ecuación anterior, tenemos:

$$(v_1)_{CM} = \frac{v_1 - v_{CM}}{1 - \frac{v_1 v_{CM}}{c^2}} = \frac{v_1 - \frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}}{1 - \frac{v_1 \frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}}{c^2}} = \frac{\frac{v_1 \mu}{\gamma + \mu}}{1 - \frac{v_1^2 \gamma}{c^2(\gamma + \mu)}} = \frac{\frac{v_1 \mu}{\gamma + \mu}}{\frac{c^2(\gamma + \mu) - v_1^2 \gamma}{c^2(\gamma + \mu)}} = \frac{v_1 \mu c^2}{\gamma\left(c^2 - v_1^2\right) + \mu c^2}$$

Tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{c^2 - v_1^2} = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 - v_1^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}$$

Sustituyendo en $(v_1)_{CM}$

$$(v_1)_{CM} = \frac{v_1 \mu c^2}{\gamma \frac{c^2}{\gamma^2} + \mu c^2} = \frac{v_1 \mu}{\frac{1}{\gamma} + \mu} = \frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma}$$

Para la masa m_2.

$$(v_2)_{CM} = \frac{v_2 - v_{CM}}{1 - \frac{v_2 v_{CM}}{c^2}} = -\frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}$$

e) Aplicando la ecuación relativista de la cantidad de movimiento en su aspecto modular

$$(p_1)_{CM} = \gamma\ m(o)_1 \cdot (v_1)_{CM} = \frac{m(o)_1}{\sqrt{1 - \frac{\left[(v_1)_{CM}\right]^2}{c^2}}} \cdot (v_1)_{CM} = \frac{c\ m(o)_1}{\sqrt{c^2 - \left[\frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma}\right]^2}} \cdot \frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_1)_{CM} = \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2(1 + \mu \gamma)^2 - (v_1 \mu \gamma)^2}} = \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + c^2 \mu^2 \gamma^2 + 2 c^2 \mu \gamma - \mu^2 \gamma^2 v_1^2}} =$$

$$= \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + \mu^2 \gamma^2 \left(c^2 - v_1^2\right) + 2 c^2 \mu \gamma}} = \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + \mu^2 \gamma^2 \frac{c^2}{\gamma^2} + 2 c^2 \mu \gamma}} \Rightarrow$$

$$\left(p_1\right)_{CM} = \frac{m(o)_1\, v_1\, \mu\, \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}$$

Dado que la cantidad de movimiento es un vector podemos escribir

$$\left(\vec{p}_1\right)_{CM} = \frac{m(o)_1\, \mu\, \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}\, \vec{v}_1 \quad ; \quad \left(\vec{p}_2\right)_{CM} = -\frac{m(o)_2\; \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\mu\gamma}}\, \vec{v}_1$$

Como $m(o)_2 = \mu\, m(o)_1$, resulta que: $\left(\vec{p}_1\right)_{CM} + \left(\vec{p}_2\right)_{CM} = 0$.

23.-Desde un sistema de referencia S que se considera en reposo se lanza una onda electromagnética plana la cual incide normalmente sobre un espejo plano situado en reposo en un sistema de referencia S´. El sistema S´ se dirige con velocidad constante relativista v hacia el sistema S. La onda se refleja en el espejo.¿Cuál es la frecuencia de esa onda que mide un observador situado en el sistema S?
Deducir la frecuencia en el caso de que v sea mucho menor que la velocidad de la luz.
Ayuda : La fórmula del efecto Doppler relativista es:

$$\omega = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\,\omega_o \quad ; \; \beta = \frac{v}{c}$$

La onda emitida desde S con frecuencia ω_o es recibida en el espejo situado en S´. Como S´ se acerca hacia el sistema S, un observador situado en S´, mediría una frecuencia angular mayor que ω_o. Según la expresión del efecto Doppler.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\;\omega_o \quad ; \quad \omega_1 > \omega_o$$

La onda de frecuencia ω_1 es reflejada en el espejo y se dirige hacia el sistema S donde un observador situado en ese sistema mide una frecuencia mayor, dado que la fuente emisora se acerca a él.

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_1$$

Sustituyendo en la última ecuación ω_1 resulta:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\;\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\;\omega_o = \frac{1+\beta}{1-\beta}\,\omega_o \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)(1+\beta)}\,\omega_o = \frac{1+\beta^2+2\beta}{1-\beta^2}\,\omega_o \quad \Rightarrow \quad \omega_2 \approx (1+2\beta)\;\omega_o$$

24.- Un pulso de un láser que dura T segundos con una energía E, incide sobre una superficie plana. Una mitad de los fotones son reflejados en la dirección incidente y la otra mitad son absorbidos. El haz provoca en la superficie una mancha circular de radio r. Calcular la presión media que sufre la superficie. Realizar el cálculo si E = 1 J , r=0,5 mm y T = 1 ms.

Designamos con N al número de fotones que contiene el pulso del láser. La energía por cada uno de los fotones es: $E_f = \frac{E}{N}$. El momento que cada fotón posee es igual a $p_f = \frac{E_f}{c}$. La variación de la cantidad de movimiento que experimenta cada uno de los fotones que se refleja es: $2p_f = 2\frac{E_f}{c}$.La variación de la cantidad de movimiento de cada uno de los fotones que se absorbe es: $\frac{E_f}{c}$.

La variación de la cantidad de movimiento de todos los fotones dividido por el tiempo en que se produce esa variación es igual a la fuerza que se ejerce sobre la superficie $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. A su vez la presión media sobre la superficie es: $\langle P \rangle = \frac{F}{S}$

$$F = \frac{2\frac{NE_f}{c} + \frac{NE_f}{c}}{T} \text{ y además } F = < p > \cdot S \Rightarrow \text{ como } NE_f = E, \text{resulta}$$

$$<, P >= \frac{3E}{\pi r^2 c T} \Rightarrow < P >= \frac{3 \cdot 1\ J}{\pi (0{,}5.10^{-3})^2 m^2 \cdot 3.10^8 \frac{m}{s} \cdot 1.10^{-3} s} = 12{,}7 \frac{N}{m^2} = 12{,}7\ Pa$$

25.- El recorrido libre medio de una partícula alfa en el aire viene dado por la ecuación empírica

$$R = 10^{-23}\, v_i^3$$

R en metros y velocidad inicial en m/s.
Deducir la relación entre el recorrido libre medio y la energía cinética inicial de la partícula. Representar gráficamente R (eje Y) frente a la energía cinética (eje X).
Durante el recorrido la partícula alfa produce pares de iones siendo la energía de formación de dicho par 34 eV. Calcular el número de pares de iones formados durante todo el recorrido de una partícula alfa de 7 MeV y el número formado cuando solamente haya recorrido la mitad inicial.
Datos. Masa de la partícula alfa = 4 uma

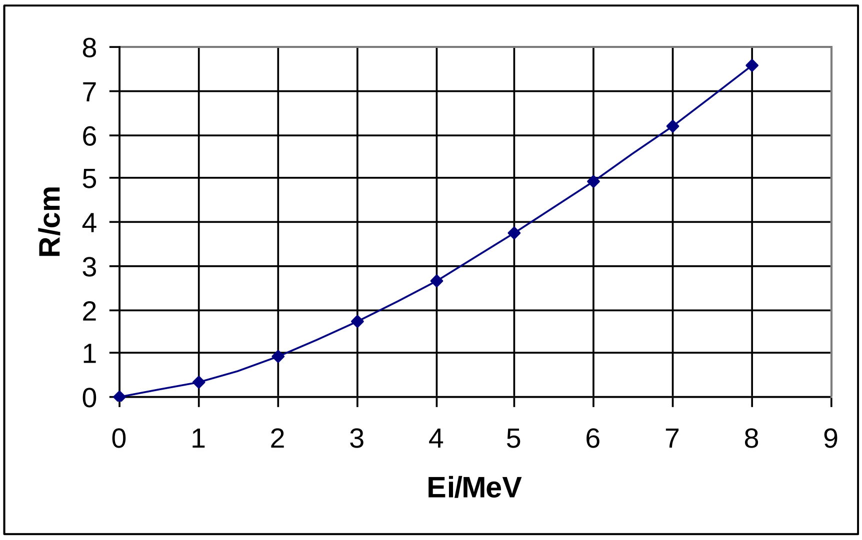
La energía cinética inicial es: $E_i = \frac{1}{2} m_\alpha v_i^2 \quad \Rightarrow \quad v_i = \left(\frac{2E_i}{m_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$

Sustituyendo en R:

$$R = 10^{-23}\left(\frac{2E_i}{m_\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{10^{-23}\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{\left(4\cdot 1{,}66.10^{-27}\right)^{\frac{3}{2}}} E_i^{\frac{3}{2}} = 5{,}23.10^{16} E_i^{\frac{3}{2}} \ (1)$$

R en metro y E_i en julios.

En la gráfica se han representado R en cm y la energía cinética en MeV.



Designamos con N a los pares de iones que forma la partícula en su recorrido, admitiendo que toda su energía se emplea en formar dichos pares.

$$N.34. = 7.10^6 \quad \Rightarrow \quad N = 2{,}1.10^5$$

Designamos con N´ los pares de iones que se forman cuando la partícula alfa de 7 MeV solamente ha recorrido la primera mitad.

La energía inicial –energía gastada en formar los pares = Energía final a mitad del recorrido
De la ecuación (1)

$$\frac{R}{5{,}23.10^{16}} = E^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E = \left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}} - N'\cdot 34\cdot 1{,}6.10^{-19} = \left(\frac{R}{2\cdot 5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow N' = \frac{\left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{R}{2\cdot 5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}}}{5{,}44.10^{-18}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N' = \frac{\left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{5{,}44.10^{-18}} = \frac{E_i\cdot 0{,}37}{5{,}44.10^{-18}} = \frac{\left(7.10^{6}.1{,}6.10^{-19}\right)\cdot 0{,}37}{5{,}44.10^{-18}} = 0{,}76.10^{5}$$

26.- Detector de partículas alfa
Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

Uno de los tipos de radiación emitido por las sustancias radiactivas son las partículas alfa, consistentes en dos protones y dos neutrones, por tanto, con carga 2 q=+2.1,6.10^{-19} C y masa 4 uma.
El registro de las partículas alfa mediante sistemas eléctricos tiene su fundamento en la capacidad que tienen dichas partículas para producir iones cuando viajan a través de una sustancia gaseosa. Cuando lo hacen a través del aire y a una presión normal, existe una ecuación empírica que relaciona la energía E de la partícula alfa con el recorrido o rango R_α en ese medio.

$$R_\alpha = 0{,}318E^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad R_\alpha \text{ en cm} \quad y \quad E \text{ en MeV}$$

Para detectar la radiación se utiliza una cámara de ionización (ver figura 1), la cual está llena de un gas que opera según el principio de separar las cargas positivas y negativas que produce la partícula alfa al ionizar el gas.

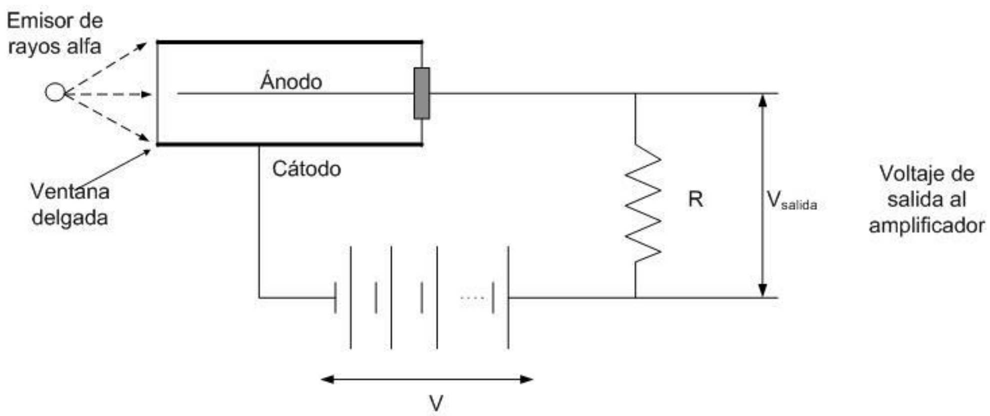


Fig.1.- Esquema del dispositivo de la cámara de ionización

La recolección de estas cargas da lugar a un pulso que se puede detectar, amplificar y luego grabar. La diferencia de voltaje entre el ánodo y el cátodo es lo suficientemente alta para evitar la recombinación de las cargas de distinto signo producidas durante la ionización.

1.- El sistema de la cámara de ionización tiene una capacidad de 45 picofaradios y sirve para detectar partículas α con un rango R_α=5,50 cm. Se supone que la energía necesaria para producir una ionización es 35 eV y que ésta da lugar a un electrón y a un ión con carga igual a la del electrón. Calcular el voltaje que produce cada partícula alfa.

A partir de la fórmula empírica determinamos la energía portadora por una partícula alfa.

$$E^{\frac{3}{2}} = \frac{R_\alpha}{0{,}318} \Rightarrow E = \left(\frac{R_\alpha}{0{,}318}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5{,}50}{0{,}318}\right)^{\frac{2}{3}} = 6{,}69 \text{ MeV}$$

Cuando la partícula α haya empleado su energía en ionizar el gas habrá producido un número de iones positivos igual a:

$$N = \frac{6{,}69.10^{6}}{35} = 1{,}91.10^{5}$$

La carga eléctrica que llevan los iones es:

$$Q = N \cdot 1{,}6.10^{-19}\text{C} = 1{,}91.10^{5} \cdot 1{,}6.10^{-19}\text{C} = 3{,}06.10^{-14}\text{C}$$

Dado que la capacidad es 45 picofaradios, resulta:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{3{,}06.10^{-14}}{45.10^{-12}} = 6{,}8.10^{-4}\text{ V} = 0{,}68 \text{ mV}$$

2.- Los pulsos de voltaje producidos ocurren a través de una resistencia R. La corriente de saturación más pequeña que se detecta con el instrumento es 10^{-12} A. Se admite que la corriente es prácticamente constante y que la rapidez con que se recolecta la carga es igual a la producida por las partículas alfa. Calcular la actividad A, en partículas α, de una sustancia radiactiva con rango R_α = 5,50 cm suponiendo que el detector tiene una eficacia del 10%.

El número de partículas alfa emitidas en cada segundo es igual a la actividad A de la muestra, expresada en desintegraciones por segundo.
La energía total de las partículas alfa producidas en un segundo de tiempo es:

$$E_T = A \cdot 6{,}69 \text{ MeV}$$

El número de iones producidos es $N_1 = \frac{E_T}{35} = \frac{A \cdot 6{,}69.10^{6}}{35}$

La carga de estos iones en cada segundo es:

$$Q = N_1 \cdot 1{,}6.10^{-19}\text{C} = \frac{A \cdot 6{,}69.10^{6}}{35} \cdot 1{,}6.10^{-19}\text{C}$$

Como la eficacia es del 10% la carga que recoge el detector en cada segundo es:

$$Q' = \frac{A.6{,}69.10^{6} \cdot 1{,}6.10^{-19}}{35} \cdot \frac{10}{100} = 3{,}06.10^{-15} \cdot A$$

Hacemos uso de la relación entre intensidad y carga

$$I = \frac{Q}{t} \;\Rightarrow\; 10^{-12} = 3{,}06.10^{-15}A \;\Rightarrow\; A = \frac{10^{-12}}{3{,}06.10^{-15}} = 327\ \frac{\text{desintegraciones}}{s}$$

3.-La cámara de ionización se utiliza para contar pulsos con una constante de tiempo $\tau = 10^{-3}s$. Calcular la resistencia R y la amplificación que se necesita realizar para producir una señal de 0,25 V.

Recordemos que cuando se carga un condensador la ecuación que rige el proceso es:

$$V = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

Siendo RC la constante del tiempo:

$$10^{-3} = RC \Rightarrow R = \frac{10^{-3}}{45.10^{-12}} = 22{,}2.10^{6}\ \Omega$$

En el apartado 1 hemos deducido que el voltaje creado por una partícula alfa es 0,68 mV, luego la amplificación para obtener una señal de 0,25 V es:

$$G = \frac{250\ mV}{0{,}68\ mV} = 368$$

4.-La cámara de ionización consiste en un contador de forma cilíndrica, con un hilo metálico central (ánodo) de diámetro d, rodeado por una carcasa metálica (cátodo) de diámetro D. Obtener la expresión del campo eléctrico E y del potencial V a una distancia radial r (medida desde el eje central) siendo:

$$\frac{d}{2} \le r \le \frac{D}{2}$$

cuando existe en el hilo una carga λ por unidad de longitud. Deducir también la capacidad por unidad de longitud del tubo.
El campo de rotura que hace conductor al aire es: E_b= 3MV/m. Si d = 1 mm y D = 1 cm determinar el valor de la diferencia de potencial entre los hilos para que se produzca el campo E_b.

Para calcular el campo hacemos uso del teorema de Gauss (fig.2) Para ello consideramos un superficie cilíndrica de longitud L y radio r>d/2. Esta superficie engloba por entero al ánodo de la cámara, por consiguiente encierra en su interior la carga eléctrica λ L.

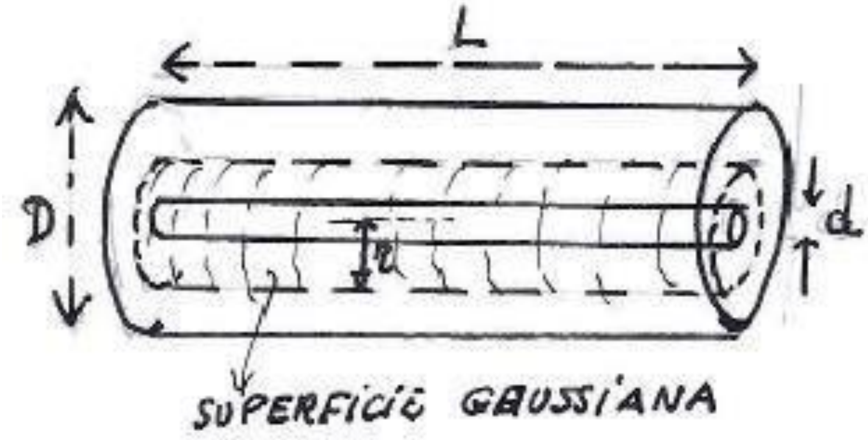


Fig.2

El flujo eléctrico se produce a través de la superficie lateral del cilindro y es nulo a través de sus bases.

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_o}$$

Para calcular el potencial recurrimos a la relación entre ambas magnitudes.

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad V = -\int E\,dr = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r + Cte \quad (1)$$

Si en la ecuación (1) r=d/2, lo que indica que nos encontramos en la superficie exterior del ánodo y el potencial lo designamos como V_A.

$$V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2} + Cte \Rightarrow Cte = V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r + V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad V = V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2r} \quad (2)$$

Si en la ecuación (1) r=D/2, lo que indica que nos encontramos en la superficie interior del cátodo y el potencial lo designamos como V_C.

$$V_C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2} + Cte \Rightarrow Cte = V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r + V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad V = V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2r} \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3), resulta:

$$V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2r} = V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2r} \Rightarrow V_A - V_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left(\ln\frac{D}{2r} - \ln\frac{d}{2r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A - V_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{d} \Rightarrow \qquad \frac{C}{L} = \frac{1}{L}\frac{Q}{V_A - V_C} = \frac{\lambda L}{L\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{d}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\frac{D}{d}}$$

El valor máximo del campo ocurre cuando r adquiere el valor más pequeño, esto es, cuando r=d/2.

$$E_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\frac{d}{2}} \Rightarrow \lambda = \pi\varepsilon_o d E_b$$

Sustituyendo λ en la ecuación V_A-V_C.

$$V_A - V_C = \frac{\pi\varepsilon_o d E_b}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{d} = \frac{E_b\, d}{2}\ln\frac{D}{d} = \frac{3.10^6 \cdot 1.10^{-3}}{2}\ln\frac{1.10^{-2}}{1.10^{-3}} = 3{,}45.10^6\ \mathrm{V}$$

27.- En la reacción nuclear $^{13}_{6}C + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{14}_{7}N^{*}$***, siendo el blanco de la reacción los núcleos de carbono, los protones con una energía de 1,750 MeV producen nitrógeno en estado excitado. a) Calcular la energía adscrita al centro de masas. b) Calcular la energía de excitación del nitrógeno c) Si el nitrógeno pasa a su estado fundamental lo hace emitiendo un fotón; probar que prácticamente toda la energía se la lleva el fotón.***
d) Una de las reacciones más utilizadas en los aceleradores consiste en que un protón con cierta energía golpea a otro que se encuentra en reposo. Calcular la energía disponible para la reacción.
Datos . Masa del protón =1,007826 uma; masa del carbono = 13,003354 uma; M nitrógeno = 14,003074 uma ; 1 uma = 931,49 MeV/ c²

a) Considerando el sistema Carbono-Protón como un sistema de partículas aislado, durante la colisión no actúan fuerzas externas por lo tanto el c.d.m. del sistema se mueve a velocidad constante. Designamos con v a la velocidad del protón respecto de un sistema inercial de referencia, con v_{CM} la velocidad del centro de masas del sistema.
La energía del sistema está formada por dos términos a saber:

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

M es igual a la masa del protón más la masa del núcleo de carbono, v_{CM} es la velocidad del centro de masas respecto del sistema inercial. Además m_i es la masa de cada partícula y v_i su velocidad respecto del c.d.m.

$$v_{CM} = \frac{m_p v_p + m_C v_C}{m_p + m_C} = \frac{m_p v_p}{m_p + m_C} \Rightarrow E_{CM} = \frac{1}{2}\left(m_p + m_C\right) \cdot \left(\frac{m_p v_p}{m_p + m_C}\right)^2 = \frac{1}{2} m_p v_P^2 \frac{m_p}{m_p + m_C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad E_{CM} = 1{,}750\,\text{MeV} \cdot \frac{1{,}007826}{1{,}007826 + 13{,}003354} = 0{,}126\ \text{MeV}$$

b) La energía de la reacción es la del protón menos la energía adscrita al centro de masas más la energía de enlace debido a la variación de masa entre los reactivos y el producto de la reacción. Calculemos esta última.

La disminución de masa durante la formación del nuevo núcleo y la energía correspondiente valen:

$$\Delta m = 1{,}007826 + 13{,}003354 - 14{,}003074 = 0{,}008106\ \text{uma}$$

$$E_E = \Delta m.c^2 = 0{,}008106\text{um a.} \cdot c^2 \cdot 931{,}49 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 7{,}545\ \text{MeV}$$

La energía de excitación del nitrógeno es de acuerdo con lo explicado en b).

$$E_{EXC} = 7{,}545 + 1{,}750 - 0{,}126 = 9{,}169\ \text{MeV}$$

c) Cuando el nitrógeno vuelve a su estado fundamental emitiendo un fotón se cumplen dos leyes de conservación, a saber: la de la cantidad de movimiento y la de la energía. El fotón emitido se mueve en una dirección y sentido y el núcleo que retrocede lo hace en la misma dirección y sentido contrario al fotón.

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = p_N \; ; E_{EXC} = E_\gamma + E_N = p_N c + \frac{1}{2} m_N v_N^2 = m_N v_N c + \frac{1}{2} m_N v_N^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2E_{EXC}}{m_N} = 2v_N c + v_N^2 \Rightarrow \quad v_N = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 + \frac{8E_{EXC}}{m_N}}}{2} = -c + \sqrt{c^2 + \frac{2E_{EXC}}{m_N}}$$

Veamos ahora el valor numérico de la velocidad de retroceso del núcleo de nitrógeno

$$v_N = -c + \sqrt{c^2 + \frac{2 \cdot 9{,}169\,\text{MeV}}{14{,}003 \cdot 931{,}49 \, \frac{\text{MeV}}{c^2}}} = -c + \sqrt{c^2 + 0{,}001406\; c^2} = 0{,}000702\; c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_N = \frac{1}{2} m v_N^2 = \frac{1}{2} 14{,}003.1{,}6\; 6.10^{-27}\text{kg}\left(7{,}02.10^{-4} c\right)^2 = 5{,}72.10^{-33} c^2 \;\; \text{J} \Rightarrow$$

$$E_N = \frac{5{,}72.10^{-33} c^2}{1{,}6.10^{-13}} \text{MeV} = 3{,}2.10^{-3}\,\text{MeV}$$

El tanto por ciento de energía que se lleva el núcleo en su retroceso es:

$$\frac{3{,}2.10^{-3}}{9{,}169} \cdot 100 = 0{,}03\%$$

El 99, 97 % de la energía se la lleva el fotón.

d) En los choques en los que aparecen partículas nuevas es imposible convertir toda la energía cinética respecto del sistema inercial en masa en reposo de las partículas que se formen, puesto que además se debe conservar la cantidad de movimiento entre el estado inicial y final, lo cual implica que parte de la energía cinética inicial se transfiere como cinética de las partículas formadas. Sea v_p la velocidad no relativista del protón respecto de un sistema inercial de referencia, su energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2} m_p v_p^2$$

La velocidad del c.d.m. vale:

$$v_{CM} = \frac{m_p v_p + m_p v_p}{m_p + m_p} = \frac{m_p v_p}{m_p + m_p} = \frac{m_p v_p}{2m_p} = \frac{v_p}{2}$$

En el sistema de referencia del centro de masas la velocidad de cada protón:

$$v'_p = v_p - v_{CM} = v_p - \frac{v_p}{2} = \frac{v_p}{2}; \qquad v''_P = 0 - \frac{v_p}{2} = -\frac{v_p}{2}$$

Volvamos a la ecuación $E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$ en la que v_{CM} es la velocidad del centro de masas respecto del sistema inercial. En el caso que nos ocupa el centro de masas se mueve con velocidad $v_p/2$, por tanto, implica una energía adscrita al centro de masas $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ y así la disponible para la reacción es:

$$\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_P v_p'^2 + \frac{1}{2}m_P v_p''^2 = \frac{1}{2}m_P\left(\frac{v_p}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_P\left(-\frac{v_p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}m_p v_p^2$$

En dicho sistema (el del centro de masas) toda la energía anterior está disponible para la reacción:

$$\frac{\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2}{E_C} = \frac{m_p v_p^2 / 4}{m_p v_p^2 / 2} = \frac{1}{2}$$

Como se ve el rendimiento es del 50%.

En los aceleradores modernos los choques entre protones se hacen viajando unos en una dirección y sentido y los otros en la misma dirección y sentido contrario, así el centro de masas se encuentra en reposo respecto del sistema inercial y no existe energía adscrita al centro de masas.

28.- Un mesón K+ , en reposo, se desintegra en dos piones, uno con carga positiva y el otro sin carga

$$K^{+} \rightarrow \pi^{+} + \pi^{o}$$

Calcular la velocidad del pión positivo, a partir de los siguientes datos :

$$m_{K+}c^{2} = 493{,}9\ MeV \quad ; \quad m_{\pi+}c^{2} = 139{,}6\ MeV \quad ; \quad m_{\pi o}c^{2} = 135{,}0\ MeV$$

Teniendo presente que el kaón se encuentra en reposo los dos piones se moverán en la misma dirección y sentido contrario y como ha de conservarse la cantidad de movimiento, los respectivos módulos de la cantidad de movimiento de las dos partículas son iguales.

Aplicamos el invariante relativista $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ a cada uno de los piones y usamos el hecho anterior respecto a la cantidad de movimiento

$$p^2c^2 = E^2_{\pi+} - m^2_{\pi+}c^4 = E^2_{\pi o} - m^2_{\pi o}c^4$$

La conservación de la energía en el proceso nos permite escribir:

$$E_{K+} = E_{\pi+} + E_{\pi o} \quad \Rightarrow \quad E_{\pi o} = E_{K+} - E_{\pi+}$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$E^2_{\pi+} - m^2_{\pi+}c^4 = \left(E_{K+} - E_{\pi+}\right)^2 - m^2_{\pi o}\,c^4 \Rightarrow E^2_{\pi+} - m^2_{\pi+}c^4 = E^2_{K+} + E^2_{\pi+} - 2E_{K+}E_{\pi+} - m^2_{\pi o}\,c^4$$

$$\Rightarrow\ E_{\pi+} = \frac{E^2_{K+} + m^2_{\pi+}c^4 - m^2_{\pi o}\,c^4}{2E_{K+}} = \frac{493{,}9^{\ 2} + 139{,}6^{\ 3} - 135{,}0^{\ 2}}{2\cdot 493{,}9} = 248{,}2\ \ \mathrm{MeV}$$

La energía cinética del pión positivo vale:

$$T = E_{\pi+} - m_{\pi+}c^2 = 248{,}2 - 139{,}6 = 108{,}6\ \ \mathrm{MeV}$$

Para calcular la velocidad del pión hacemos uso de la expresión de la energía cinética en forma clásica

$$\frac{1}{2}m_{\pi+}v^2 = 108{,}6\ \ \mathrm{MeV} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\cdot 108{,}6\ \mathrm{MeV}}{\frac{139{,}6}{c^2}\mathrm{MeV}}} = c\sqrt{\frac{2\cdot 108.6}{139{,}6}} = 1{,}25\ \mathrm{c}$$

El resultado es imposible ya que la velocidad supera la de la luz. Debemos emplear la teoría de la relatividad.

$$E_C = (m - m_o)c^2 = m_o\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)c^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_c}{m_o c^2} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\frac{E_c}{m_o c^2} + 1} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{\frac{E_c}{m_o c^2} + 1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{E_c}{m_o c^2} + 1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{108{,}6}{139{,}6} + 1}\right)^2} = 0{,}83 \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}83\,c$$

29.- La pérdida de potencia de una partícula no relativista de carga q y con aceleración a, está expresada mediante la ecuación de Larmor

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{3c^3}a^2 = k\,a^2$$

Si la partícula de carga q penetra perpendicularmente en un campo magnético constante de inducción B= 1 T, encontrar la ecuación que exprese la variación de la velocidad de la partícula con el tiempo. Calcular en cuánto tiempo un protón y un electrón reducen su velocidad inicial a la mitad.

Datos: q= $1,60.10^{-19}$ C (+ para el protón y - para el electrón)

c =$3,0.10^{8}$ m/s ; ε_o=$8,85.10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^2

Masa del protón=$1,67.10^{-27}$ kg

Masa del electrón=$9,11.10^{-31}$ kg

La partícula cargada al penetrar en el campo magnético experimenta una fuerza perpendicular a su vector velocidad, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, adquiere una aceleración centrípeta según la siguiente ecuación:

$$qvB = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{qvB}{m}$$

Como la partícula cargada se encuentra acelerada pero se halla libre, entonces, no está en un estado cuántico estacionario y por lo tanto radia energía de acuerdo con la ecuación de Larmor, lo cual lleva aparejado una pérdida de potencia.

$$P = \frac{dE}{dt} = -k\frac{q^2B^2}{m^2}v^2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^4B^2}{3c^3m^2}v^2 = -K\,v^2$$

La pérdida de energía se traduce en una disminución de su velocidad

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad dE = \frac{1}{2}m\,2v\,dv = m\,v\;dv \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m\,v\,dv}{dt} = -K\,v^2 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{K}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\frac{K}{m}t + Cte$$

Para calcular la Cte tenemos en cuenta que cuando el tiempo es cero, la partícula penetra en el campo magnético con una velocidad inicial que designamos con v_o.

$$\ln v = -\frac{K}{m}t + \ln v_0 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_o} = -\frac{K}{m}t \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\frac{K}{m}t}$$

Calculamos el valor de K/m para el protón:

$$\left(\frac{K}{m}\right)_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^4B^2}{2c^3m^3} = \frac{\left(1{,}60.10^{-19}\right)^4\cdot 1^2}{2\pi\cdot 8{,}85.10^{-12}\cdot\left(3{,}0.10^8\right)^3\cdot\left(1{,}67.10^{-27}\right)^3} = 9{,}37.10^{-11}$$

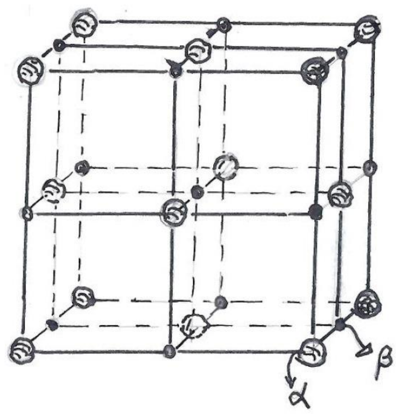
$$\frac{v_o}{2} = v_o\, e^{-9{,}37.10^{-11}t} \quad\Rightarrow\quad \ln 0{,}5 = -9{,}37.10^{-11}\,t \Rightarrow t = \frac{0{,}693}{9{,}37.10^{-11}} = 7{,}4.10^{9}\,s$$

Calculamos el valor de K/m para el electrón:

$$\left(\frac{K}{m}\right)_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^4B^2}{2c^3m^3} = \frac{\left(1{,}60.10^{-19}\right)^4\cdot 1^2}{2\pi\cdot 8{,}85.10^{-12}\cdot\left(3{,}0.10^8\right)^3\cdot\left(9{,}11.10^{-31}\right)^3} = 0{,}577$$

$$\frac{v_o}{2} = v_o\, e^{-0{,}577\,t} \quad\Rightarrow\quad \ln 0{,}5 = -0{,}577\,t \Rightarrow t = \frac{0{,}693}{0{,}577} = 1{,}2\,s$$

30.- El cloruro de sodio cristaliza en una red cúbica centrada en las caras como indica la figura. Las esferas mayores representan los iones cloruro y las menores los cationes sodio



Sobre la cara α de un monocristal de cloruro de sodio se hace incidir un haz estrecho de rayos X bajo un ángulo de 60º Por reflexión especular se forma un máximo de segundo orden. Sabiendo que la densidad del cristal es 2,16 g/cm³ que las masas de los iones son Cl^- = 35,5 g/mol y Na^+ =23,0 g/mol y que el número de Avogadro es N =6,02.10²³ , calcular la longitud de onda de los rayos X.

Para calcular la longitud de onda de los rayos X debemos utilizar la ley de Bragg

$$2\ d\ \text{sen}\theta = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\ d\ \text{sen}\theta}{n}$$

La distancia d corresponde a la que existe entre los planos delantero de la cara y el siguiente hacia dentro. Si L es la longitud del cubo unidad, entonces d = L/2.

Observando la figura del enunciado, se deduce que hay ocho iones cloruro en los vértices y cuatro en el centro de las caras. Los iones del vértice pertenecen a 8 celdas y los del centro de las caras a dos, por tanto para la celdilla unidad existen cuatro iones Cl^-.
Los iones Na^+ ocupan los centros de las aristas y en total son 12 y uno que está en el centro. Cada ión Na^+ de una arista se comparte con otras cuatro, por tanto el número total de iones sodio en una celda son: 12/4 más el del centro, en total 4 iones sodio.
El volumen de la celda y su masa son respectivamente:

$$V = \frac{m}{\rho} = L^3 \ ; \ L = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$$

La masa de los cuatro iones cloro es : $\frac{4 \cdot 35{,}5}{N} = 2{,}36.10^{-22}\,g$

La masa de la celda unidad es:

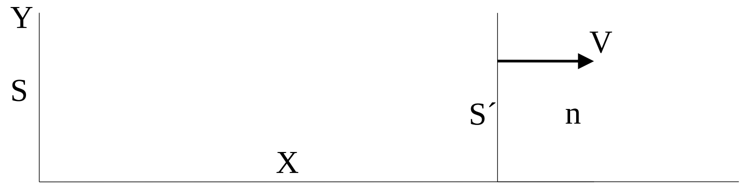
$$m = (2{,}36 + 1{,}53)10^{-22} = 3{,}89.10^{-22}\ g$$

Calculamos la longitud L de la celda

$$L = \sqrt[3]{\frac{3{,}89.10^{-22}\ g}{2{,}16\ \frac{g}{cm^3}}} = 5{,}65.10^{-8}\,cm$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta}{n} = \frac{5{,}65.10^{-8} \cdot \operatorname{sen} 60}{2} = 2{,}45.10^{-8}\,cm$$

31-.**(323) **Un sistema de referencia S´ se desplaza respecto de un sistema inercial S con una velocidad V<< c, tal como se indica en la figura. El índice de refracción del sistema S´ es n. Un rayo de luz se desplaza por S´ en la misma dirección y sentido que V. Calcular la velocidad del rayo de luz medida por un observador ligado al sistema S.



En el sistema S´ la luz viaja en un medio distinto al vacío y esto supone que su velocidad es inferior a la del vacío c. Si la velocidad de la luz en el medio es c´ según la definición de índice de refracción

$$c' = \frac{c}{n}$$

Designamos con u la velocidad del rayo medida por el observador situado en S. La relación relativista de velocidades es:

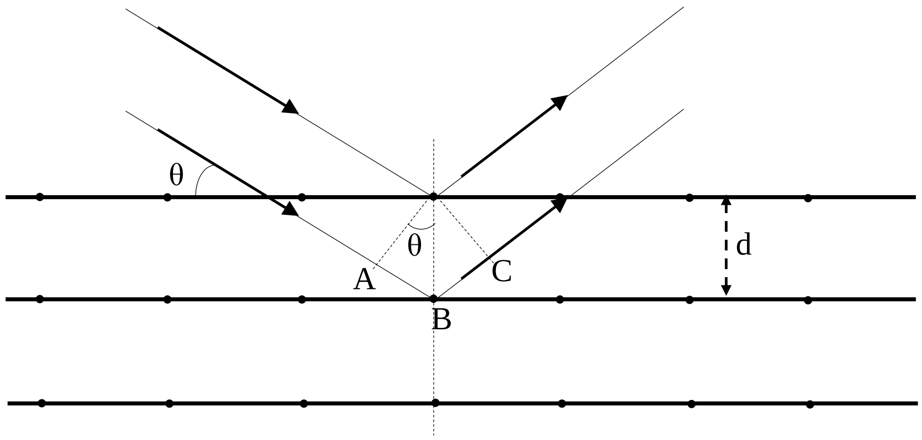
$$u = \frac{c'+V}{1+\frac{Vc'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n}+V}{1+\frac{Vc}{nc^2}} = \frac{\frac{c}{n}+V}{1+\frac{V}{nc}} = \frac{\left(\frac{c}{n}+V\right)\left(1-\frac{V}{nc}\right)}{\left(1+\frac{V}{nc}\right)\left(1-\frac{V}{nc}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n}+V\right)\left(1-\frac{V}{nc}\right)}{1-\frac{V^2}{n^2c^2}}$$

Como V<<c el termino del denominador se puede aproximar a la unidad, entonces.

$$u = \left(\frac{c}{n}+V\right)\left(1-\frac{V}{nc}\right) = \frac{c}{n}+V-\frac{cV}{n^2c}-\frac{V^2}{nc} \approx \frac{c}{n}+V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

32-**(329) **Un haz de electrones monoenergéticos incide sobre la cara de un cristal con un ángulo θ=30º. Este ángulo se forma entre la dirección del haz y el plano cristalino, tal como indica la figura inferior. La distancia entre los planos cristalinos es d=0,20 nm. Si los electrones se aceleran desde el reposo con una tensión U, se observa un máximo en la reflexión especular. El siguiente máximo en esa reflexión se produce cuando la tensión de aceleración es: nU = 2,25 U . Determinar el valor de U.

Datos. Constante de Planck = 6,63.10^{-34} Js; masa del electrón m=9,11.10^{-31} kg , carga del electrón q = 1,602.10^{-19} C



En la figura del problema se observa que el haz incidente en la cara cristalina y el reflejado en el plano cristalino inferior tienen una diferencia de marcha de

$$AB + BC = 2d\,\mathrm{sen}\theta$$

Si esta diferencia de marcha es un múltiplo entero de la longitud de onda de los electrones se producirá un máximo (ley de Braag).

$$2d\,\mathrm{sen}\theta = k\lambda$$

El siguiente máximo se produce cuando

$$2d\,\mathrm{sen}\theta = k'\lambda' = (k+1)\lambda' \quad \Rightarrow \quad k\lambda = (k+1)\lambda' \;\Rightarrow\; \frac{k+1}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (1)$$

Las longitudes de onda de los electrones están determinadas por la teoría de De Broglie que establece la dualidad onda corpúsculo

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad ; \qquad \lambda' = \frac{h}{m v'}$$

h es la constante de Planck, *m* la masa del electrón; *v* y *v´* sus velocidades, las cuales dependen de la tensión con que se han acelerado los electrones. Igualamos el trabajo eléctrico con la energía cinética adquirida por los electrones

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{2qnU}{m}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2qmU}} \quad ; \quad \lambda' = \frac{h}{\sqrt{2qmnU}}$$

Sustituyendo en (1)

$$1 + \frac{1}{k} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2qmU}}}{\frac{h}{\sqrt{2qnmU}}} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} = \sqrt{n} - 1 \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = k\lambda \quad \Rightarrow 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \cdot \frac{h}{\sqrt{2qmU}} \quad \Rightarrow U = \frac{h^2}{8\left(\sqrt{n} - 1\right)^2 qmd^2\,\mathrm{sen}^2\theta} \Rightarrow$$

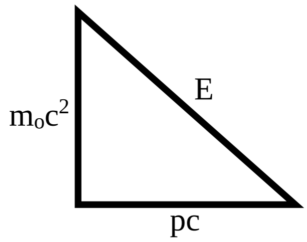
$$\Rightarrow \quad U = \frac{\left(6{,}63.10^{-34}\right)^2}{8\left(\sqrt{2{,}25} - 1\right)^2 \cdot 1{,}602.10^{-19} \cdot 9{,}11.10^{-31} \cdot \left(0{,}20.10^{-9}\right)^2 \cdot \mathrm{sen}^2 30} = 151\ \mathrm{V}$$

33.-Una partícula relativista con carga Q y masa en reposo m_o, describe una trayectoria circular de radio R en el seno de un campo magnético uniforme de inducción B. Determinar a) su cantidad de movimiento, b) su energía cinética y c) su aceleración en función de las constantes anteriores.

a) La fuerza centrípeta que necesita la partícula para describir el círculo es la fuerza magnética de interacción entre el campo magnético y la carga de la partícula $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$; que al estar siempre dirigida hacia el centro del círculo por ser perpendicular al vector velocidad, actúa como una fuerza centrípeta, cuyo módulo se puede expresar por mv^2/R. Igualando esta expresión con el módulo de la fuerza magnética resulta:

$$\frac{mv^2}{R} = QvB \Rightarrow mv = QBR \quad (1)$$

Siendo p = m v el momento lineal de la partícula, $p = QBR$



Triángulo que permite recordar la relación entre las energías de una partícula, mediante el teorema de Pitágoras.

b) La energía de una partícula relativista es la suma de su energía en reposo más su energía cinética

$$E = m_o c^2 + E_c$$

Recurrimos al invariante relativista: $E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4$

A partir de las dos ecuaciones anteriores.

$$E_c = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} - m_oc^2 = \sqrt{(QBR)^2 c^2 + m_o^2c^4} - m_oc^2 = \sqrt{\frac{(QBR)^2}{m_o^2c^2} m_o^2c^4 + m_o^2c^4} - m_oc^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_C = m_oc^2\left[\sqrt{\left(\frac{QBR}{m_oc}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

c) La aceleración centrípeta es: $a_c = \frac{v^2}{R}$. A partir de la ecuación (1) y utilizando la ecuación relativista de la masa, vamos a determinar primero el valor de la velocidad.

$$v = \frac{QBR}{m} = \frac{QBR}{\dfrac{m_o}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} = \frac{QBR}{m_o}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{QBR}{m_o}\right)^2 \Rightarrow \frac{v^2c^2}{c^2-v^2} = \left(\frac{QBR}{m_o}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2-v^2}{v^2c^2} = \left(\frac{m_o}{QBR}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \left(\frac{m_o}{QBR}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = \frac{m_o^2c^2+(QBR)^2}{(QBRc)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{(QBRc)^2}{m_o^2c^2+(QBR)^2}$$

El valor de la aceleración centrípeta es :

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(QBRc)^2}{\left[m_o^2c^2+(QBR)^2\right]R} = \frac{\dfrac{c^2}{R}}{\left[\dfrac{m_o^2c^2+(QBR)^2}{(QBR)^2}\right]} = \frac{\dfrac{c^2}{R}}{\left(\dfrac{m_o c}{QBR}\right)^2+1}$$

34.-(352) ***Un satélite geoestacionario se encuentra a una altura de H=35786 km sobre la superficie terrestre. Hallar la variación relativa de la frecuencia de la onda de radio del satélite debido al campo gravitatorio terrestre. Radio de la Tierra = 6,38.10^6 m***

Designamos con f_H la frecuencia de la radio situada en el satélite y con f_T la frecuencia recibida en la Tierra.
Los fotones carecen de masa pero poseen energía según la teoría de la Relatividad, por tanto, es posible asignarle una masa

$$mc^2 = hf_H \quad \Rightarrow \; m = \frac{hf_H}{c^2}$$

Establecemos una relación entre las energías del fotón en su órbita y en la superficie terrestre.

$$-G\frac{M_T m}{R_T + H} + hf_H = -G\frac{M_T m}{R_T} + hf_T \quad \Rightarrow \; f_T - f_H = \frac{GM_T m}{h}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + H}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_T - f_H = \frac{GM_T}{h}\frac{hf_H}{c^2}\frac{H}{R_T(R_T + h)}$$

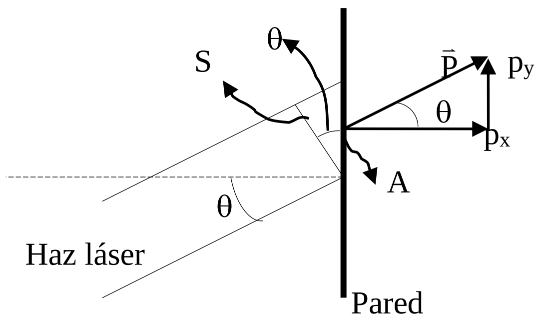
Si g representa la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre: $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$

$$f_T - f_H = \frac{gR_T^2}{h}\frac{hf_H}{c^2}\frac{H}{R_T(R_T + h)} \;\Rightarrow\; \frac{f_T - f_H}{f_H} = \frac{gR_T H}{c^2(R_T + h)} \;\Rightarrow$$

$$\frac{f_T - f_H}{f_H} = \frac{9{,}8 \cdot 6{,}38.10^6 \cdot 35786.10^3}{(2{,}89.10^8)^2(6{,}38.10^6 + 35786.10^3)} = 6{,}4.10^{-10}$$

35.-(355) ***Un haz de luz procedente de un láser de intensidad I=0,2 W/cm²*** ***incide sobre una pared vertical formando un ángulo de 45 º. Calcular la presión ejercida por el haz si, a) la pared refleja totalmente el haz b) la pared absorbe el haz. En el caso a) representar la presión frente al ángulo de incidencia.***

En la figura inferior el haz del láser incide sobre la pared formando una superficie que denominamos A. Esa superficie proyectada en dirección normal al haz da lugar a una superficie de valor numérico S= A cos θ



El haz de láser está formado por fotones cada un o de ellos con una energía E. La intensidad del haz es energía por unidad de área normal al haz y unidad de tiempo. Si N representa el número de fotones que atraviesan la superficie S en un tiempo Δt, se deduce que

$$I = \frac{NE}{S\Delta t} = \frac{nE}{S} = \frac{nE}{A\cos\theta} \quad (1)$$

Siendo n el número de fotones que atraviesan la superficie en cada unidad de tiempo (segundo).

Cada fotón del haz lleva consigo una cantidad de movimiento de valor numérico $\frac{E}{c}$, si en un tiempo Δτ llegan a la superficie A n´ fotones, el valor numérico de la cantidad de movimiento es:

$$P = \frac{n´E}{c} = \frac{n\Delta\tau\, E}{c}$$

La ecuación anterior nos da el valor del modulo de la cantidad de movimiento. El vector $\vec{P}$ tiene dos componentes, una de módulo p_x en dirección horizontal, por tanto, perpendicular a la pared, y otra p_y paralela a la pared.

$$p_x = \frac{n\Delta\tau E}{c}\cos\beta \;\; ; \;\; p_y = \frac{n\Delta\tau E}{c}\operatorname{sen}\beta$$

Si la pared refleja totalmente el haz, éste rebota formando un ángulo θ, en el rebote aparecen dos componentes, una horizontal dirigida hacia la izquierda y otra paralela dirigida hacia abajo, en consecuencia, la componente paralela a la pared se anula y la variación de la cantidad de movimiento es 2 p_x.

$$\Delta P = \frac{2n\Delta\tau\ E}{c}\cos\beta$$

La fuerza sobre el área de la pared A es:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta \tau} = \frac{2\,n\,E}{c}\cos\beta$$

Y la presión

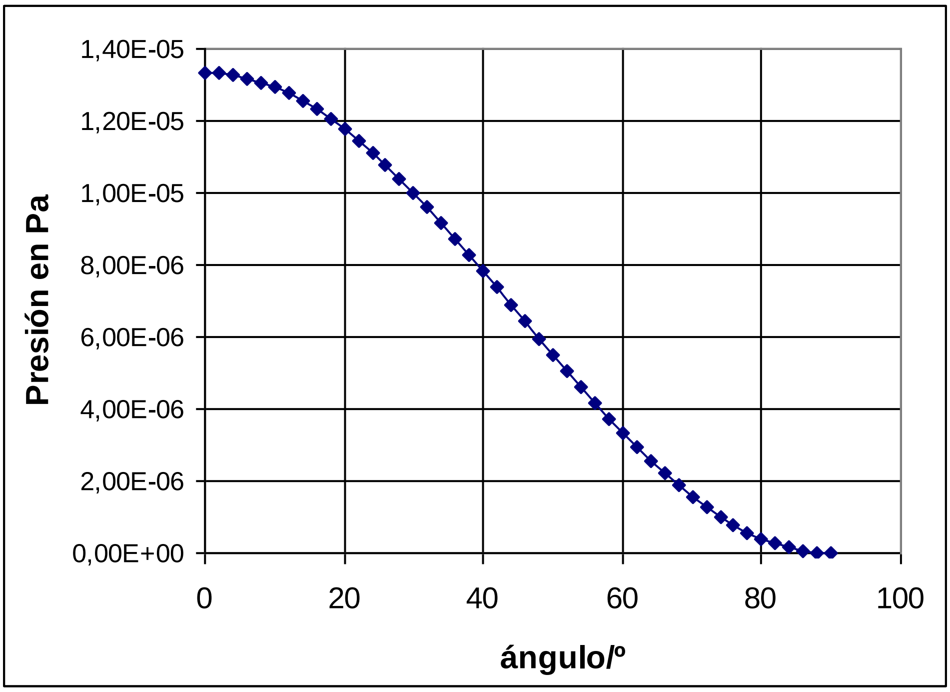
$$\text{Presión} = \frac{F}{A} = \frac{2\,n\,E}{cA}\cos\beta \quad (2)$$

De la ecuación (1) despejamos E: $E = \dfrac{I\,A\cos\beta}{n}$ y lo sustituimos en (2)

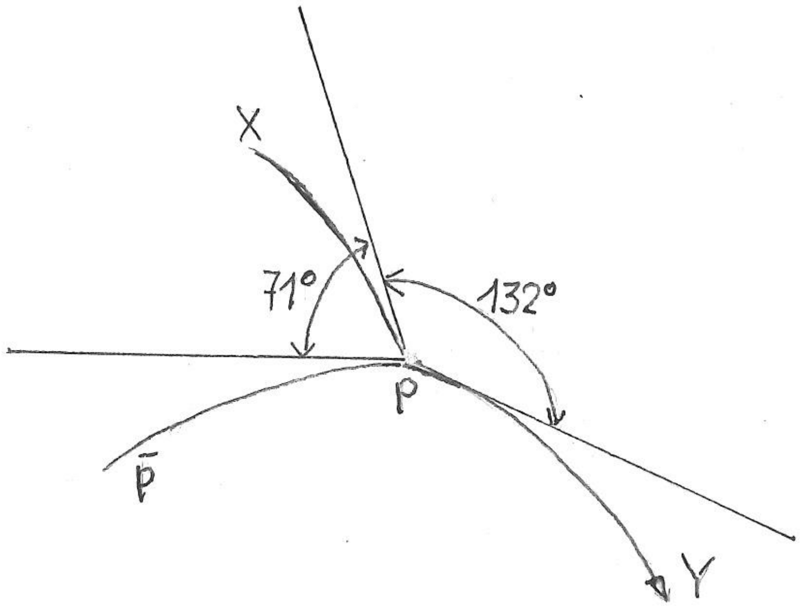
$$\text{Presión} = \frac{2\,n\,\dfrac{IA\cos\beta}{n}}{cA}\cos\beta = \frac{2\,I\cos^2\beta}{c} \; (3)$$

Si la pared absorbe el haz aparecerá una fuerza que tiene dos componentes una sobre la dirección horizontal y otra sobre la dirección vertical. Esta última no ejerce presión sobre la pared y solamente la ejerce la componente horizontal, por tanto, la variación de la cantidad de movimiento es p_x, la mitad que en el caso anterior, luego la presión es también la mitad.

Para construir la gráfica, basta dar valores al ángulo β en la ecuación (3)



36.-(360)***- El esquema de la figura inferior corresponde a una fotografía realizada en una cámara de burbujas. Un antiprotón colisiona con un protón que se encuentra en reposo. El resultado es la aparición de dos partículas X e Y, detectadas por la cámara de burbujas. Las líneas rectas que aparecen en la figura indican las direcciones de las velocidades de las partículas en el punto de impacto y la curvatura es debida a la presencia del campo magnético.***
Los radios de curvatura de las trayectorias son: antiprotón = 4 m , X= 1,5 m, e Y = 5,0 m. La cantidad de movimiento del antiprotón es 1497MeV/c.



a) Probar que en el proceso se origina una tercera partícula Z y calcular su cantidad de movimiento.
b) Comprobar si es razonable que en el proceso se produzca un mesón (π^+), un mesón (π^-) y un mesón (π^0).
c) Calcular la velocidad de las partículas.
Dato: masa del protón 938 MeV/c² ; Masa del (π^+)=masa del (π-) =140 MeV/c²; Masa del (π^0)= 135 MeV/c²

En problemas de colisiones de partículas es frecuente expresar la cantidad de movimiento en MeV/c y la masa de las partículas por MeV/c^2**.**
La razón es la siguiente:
De acuerdo con la teoría de la relatividad

$$E = mc^2 \;\Rightarrow\; m = \frac{E}{c^2} \;;\; p = mv \;;\; E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow p \approx m\sqrt{\frac{E}{m}} = \sqrt{Em} = \sqrt{E \cdot \frac{E}{c^2}} = \frac{E}{c}$$

Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Consideramos dos ejes coordenados cartesianos. El eje X tiene la dirección de la velocidad del antiprotón y dirigido hacia la derecha y el eje Y es perpendicular al anterior en el punto donde se encuentra el protón en reposo. La partícula Y forma con el eje X un ángulo de 71º y con el eje Y , 90-71= 19º.La partícula Y forma con el eje X un ángulo de 132-19-90= 23º.

$$1497 = -p_X \cos 71^o + p_Y \cos 23^o + p_Z(X) \quad \Rightarrow \quad p_X \cos 19^o = p_Y \operatorname{sen} 23^o + p_Z(Y) \ \ (1)$$

Para calcular la cantidad de movimiento de las partículas X e Y hacemos uso de la interacción de dichas partículas con el campo magnético de la cámara de burbujas. Igualamos la fuerza magnética con la centrípeta

$$F = qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \Rightarrow qB = \frac{p}{R}$$

Aplicando para el antiprotón resulta: $qB = \dfrac{1497}{4}$ (2)

Para identificar las cargas de X e Y observamos la trayectoria: X debe tener carga positiva e Y negativa. La partícula Z carece de carga ya que no deja rastro en la cámara de burbujas. La suma de las cargas del antiprotón y del protón es cero, luego la carga de las partículas X e Y es la misma en valor absoluto, una positiva y otra negativa. Es razonable suponer que ambas partículas tengan la misma carga que la del protón y la del antiprotón, pues en estas colisiones no se forman partículas con doble carga.
La ecuación (2) nos vale para X e Y.

$$\frac{1497}{4} = \frac{p_X}{1{,}5} \Rightarrow p_X = 561\frac{MeV}{c} \ ; \ \frac{1497}{4} = \frac{p_Y}{5} \Rightarrow p_Y = 1871\frac{MeV}{c}$$

Volviendo a las ecuaciones (1)

$$1497 = -561\cdot\cos 71^o + 1871\cdot\cos 23^o + p_Z(X) \quad \Rightarrow \quad p_Z(X) = -43\frac{MeV}{c}$$

$$561\cdot\cos 19^o = 1871\cdot\operatorname{sen} 23^o + p_Z(Y) \Rightarrow \quad p_Z(Y) = -201\frac{MeV}{c}$$

$$\Rightarrow \ p_Z = \sqrt{201^2 + 43^2} = 206\frac{MeV}{c}$$

b) Para comprobar si la hipótesis es plausible hacemos uso del principio de conservación de la energía – masa: $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

$$E(\bar{p}) = \sqrt{1487^2\left(\frac{MeV}{c}\right)^2 \cdot c^2 + 938^2\left(\frac{MeV}{c^2}\right)^2 \cdot c^4} = \sqrt{1487^2 + 938^2} = 1758\ MeV$$

$$E(p) = 938\,MeV$$

$$E(\pi^+) = \sqrt{561^2 + 140^2} = 578 MeV$$

$$E(\pi^-) = \sqrt{1871^2 + 140^2} = 1876\,MeV$$

$$E(\pi^o) = \sqrt{206^2 + 135^2} = 246\,MeV$$

Partículas incidentes = 1758+938=2696 MeV

Partículas formadas= 578+1876+246=2700 MeV

Como la diferencia es muy pequeña y está dentro de los errores que se cometen, la hipótesis es plausible.

c) Expresamos la cantidad de movimiento según la teoría de la relatividad

$$p = \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\,v\,c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m^2v^2c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{c^2 - v^2}{m^2v^2c^2} = \frac{1}{m^2v^2} - \frac{1}{m^2c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2v^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{m^2c^2} = \frac{p^2 + m^2c^2}{p^2m^2c^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{p^2 + m^2c^2}{p^2c^2} \Rightarrow \quad v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2 + m^2c^2} = \frac{p^2c^4}{p^2c^2 + m^2c^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{p\,c^2}{E}\ (3)$$

Aplicamos la ecuación (3)

$$v(\pi^+) = \frac{561\,\frac{MeV}{c}\cdot c^2}{578\,MeV} = 0{,}97c \;\; ; v(\pi^-) = \frac{1871\,\frac{MeV}{c}\cdot c^2}{1876\,MeV} = 0{,}997c \;\; ; v(\pi^o) = \frac{206\,\frac{MeV}{c}\cdot c^2}{246\,MeV} = 0{,}84c$$

37.-(362)***- Comprobar que si un fotón incide sobre un electrón en reposo es imposible que toda la energía del fotón se transmita íntegramente al electrón.***

Designamos con ν_o la frecuencia del fotón y tomamos el sistema de referencia ligado al electrón que se encuentra en reposo. La energía del fotón es: $h\nu_o$.
La energía del electrón es la energía cinética que adquiere por el impacto del fotón:

$$E_e = (m - m_o)c^2 = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_o \right) c^2 = m_o c^2 (\gamma - 1)$$

Siendo v la velocidad del electrón después del impacto y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Si toda la energía del fotón se transfiriese al electrón, podríamos escribir:

$$h\nu_o = m_o c^2 (\gamma - 1) \quad (1)$$

Por la conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{h\nu_o}{c} = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_o v\gamma \quad \Rightarrow \quad h\gamma_o = m_o c \cdot v \cdot \gamma \quad (2)$$

Igualando (1) y (2).

$$m_o c^2 (\gamma - 1) = m_o c \cdot v \cdot \gamma \Rightarrow \quad c(\gamma - 1) = v\gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \Rightarrow \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right]^2 = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{v}{c}\right) = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 2\left(\frac{v}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 1$$

Si se transfiriese toda la energía, la velocidad del electrón sería igual a la de la luz, lo cual está en contradicción con la teoría de la relatividad. Por tanto, en el proceso descrito, solamente una parte de la energía del fotón se transmite al electrón; es el efecto Compton relativista.

38.-**(365)- **La energía mínima de excitación del átomo de helio es 21,1 eV. Supongamos que un átomo de helio está en reposo en el sistema del laboratorio (sistema L) y sobre él: a) choca un protón dotado de una energía de 24 eV; b) un electrón con la misma energía. Mostrar si en estos choques es posible que se produzca una colisión inelástica, la cual llevaría al átomo de helio a un estado excitado.

En una colisión elástica se transfiere en bloque la energía de excitación desde la partícula incidente a la de reposo, por tanto, para que esto ocurra la energía de la partícula en movimiento tiene que ser mayor que la energía de excitación. Si la energía de la partícula incidente es menor que la energía de excitación el choque es inelástico.
Pero la condición anterior no es suficiente para que pueda producirse un choque elástico, pues en el proceso intervienen las masas de las partículas, tanto la incidente como la de reposo.
En el problema que nos ocupa se cumple la condición de la energía, ya que la del protón como la del electrón superan a la energía de excitación del átomo de helio.

Designamos con la letra Y a la partícula incidente; en el problema Y representa o al protón o al electrón, con B al blanco en reposo, esto es, al átomo de helio en su estado fundamental, siendo E_F esa energía y Ex en el estado excitado

$$\Delta E = E_X - E_F = 21{,}1 \quad eV$$

P_Y es la cantidad de movimiento de la partícula incidente y P_B=0 de la partícula en reposo antes del choque. Después del choque las cantidades de movimiento las escribimos como P'_Y y P'_B.
En el choque se conserva la cantidad de movimiento

$$\vec{P}_Y = \vec{P}'_Y + \vec{P}'_B$$

El balance de energía conduce a

$$\frac{1}{2m}P_Y^2 + E_F = \frac{1}{2m}\left(P'_Y\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(P'_B\right)^2 + E_X \Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2m}\left(P'_Y\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(P'_B\right)^2 + \Delta E \qquad (1)$$

En la ecuación anterior m es la masa de la partícula incidente (protón o electrón) y M la masa del átomo de helio. Se ha utilizado la expresión de la energía cinética en función de la cantidad de movimiento: $\frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2m}(m v)^2 = \frac{1}{2m}p$.

La energía cinética mínima del proyectil para verificar el proceso es aquella que tanto la partícula incidente como el blanco se encuentren en reposo en le sistema C (del centro de masa) después de la colisión, ya que en este caso no hay energía cinética de las partículas.
Si v representa la velocidad de la partícula incidente y v_{CM} la del centro de masas, antes del choque ocurrirá que

$$v_{CM} = \frac{m v}{m + M}$$

Sustituyendo términos de la ecuación (1)

$$P_Y' = m v_{CM} = m\frac{m v}{m+M} = \frac{m P_Y}{m+M} \quad ; \quad P_B' = M v_{CM} = \frac{M P_Y}{m+M}$$

La ecuación (1) queda ahora

$$\frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2m}\frac{m^2 P_Y^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2M}\frac{M^2 P_Y^2}{(m+M)^2} + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{mP_Y^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2}\frac{MP_Y^2}{(m+M)^2} + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{P_Y^2}{(m+M)^2}(m+M) + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{P_Y^2}{m+M} + \Delta E \Rightarrow \frac{P_Y^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+M}\right) = \Delta E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_Y^2}{2m}\left(\frac{M}{m+M}\right) = \Delta E \;\Rightarrow \frac{P_Y^2}{2m} = \left(\frac{m+M}{m}\right)\Delta E \quad \Rightarrow \quad E_c = \left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E \quad (2)$$

Para el protón la relación $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{4}$, luego la energía cinética mínima para producir una colisión inelástica es: 1,25*21,1 =31,7 eV, como solamente lleva 24 eV, el protón no producirá ese proceso.

Para el electrón la relación $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{8000}$, puesto que aproximadamente un electrón tiene una masa 2000 veces menor que la del protón, luego la energía cinética mínima es: $\left(1+\frac{1}{8000}\right)\cdot 21{,}1 \approx 21{,}1 \text{ eV}$, como el electrón posee una energía cinética 24 eV puede producir ese proceso de excitación del átomo de helio.