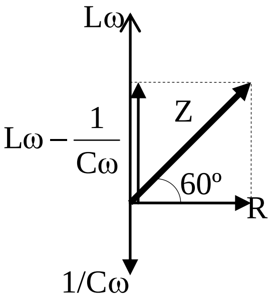
PROBLEMAS VARIADOS 9(2013-2015)

358.- Un circuito de corriente alterna en serie RLC, con una tensión máxima aplicada de 130 V, posee una impedancia de 1,3 kΩ cuando la frecuencia es 10 kHz estando la intensidad de la corriente retrasada 60º respecto del voltaje. La frecuencia de resonancia del circuito es 5 kHz.
a) Calcular los valores de R, L y C
b) Determinar la intensidad máxima de la corriente que recorre el circuito y los valores máximos de la tensión en cada elemento.
c) Calcular la potencia media consumida en el circuito

a) Como la intensidad está retrasada respecto al voltaje 60º, esto nos indica que Lω en valor absoluto es mayor que 1/Cω en valor absoluto. El diagrama vectorial es el siguiente:



Del diagrama vectorial se deduce:

$$Z^2=R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad ; \qquad \text{tag }60^{\circ}=\sqrt{3}=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R} \qquad (1)$$

$$L\omega-\frac{1}{C\omega}=\sqrt{3}\,R \quad \Rightarrow \quad Z^2=R^2+3R^2 \quad \Rightarrow \quad R=\frac{Z}{2}=\frac{1300}{2}=650\,\Omega$$

De la condición de resonancia de deduce que:

$$L\omega_R=\frac{1}{C\omega_R} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{1}{L\omega_R^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$650\sqrt{3}=L\omega-\frac{1}{\frac{1}{L\omega_R^2}\omega}=L\omega-\frac{L\omega_R^2}{\omega}\Rightarrow L=\frac{650\sqrt{3}}{\omega-\frac{\omega_R^2}{\omega}}=\frac{650\sqrt{3}}{2\pi 10.10^3-\frac{2\pi\cdot 25.10^6}{10.10^3}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\frac{650\sqrt{3}}{2\pi 10^4-50\pi 10^2}=2{,}39.10^{-2}\text{ H}\Rightarrow \quad C=\frac{1}{2{,}39.10^{-2}\cdot\left(2\pi\cdot 5.10^3\right)^2}=4{,}24.10^{-8}\text{ F}$$

b) $$I_m=\frac{V_m}{Z}=\frac{130}{1{,}3.10^3}=0{,}1\text{A}$$

$$V_m(R) = I_m R = 0{,}1 \cdot 650 = 65\,V;$$

$$V_m(L) = I_m Z_L = I_m L\, 2\pi f = 0{,}1 \cdot 2{,}39.10^{-2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10.10^3 = 150\,V$$

$$V_m(C) = I_m Z_C = I_m \frac{1}{C\, 2\pi f} = 0{,}1 \cdot \frac{1}{4{,}24.10^{-8} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10.10_4} = 37{,}5\,V$$

c) $< P >= \frac{1}{2} I_m V_m \cos 60º = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 130 \cdot 0{,}5 = 3{,}25\ W$

Calculamos la potencia disipada en la resistencia

$$< P >= \frac{1}{2} I_m V_m(R) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot \cdot 65 = 3{,}25\ W$$

La potencia disipada en el circuito se verifica en la resistencia y el valor medio de la potencia en la bobina y el condensador es nulo.

359.- Un plano inclinado forma con la horizontal un ángulo θ. Desde lo alto del plano se lanza un cuerpo con módulo de la velocidad v_o , siendo el vector velocidad paralelo al suelo.
a) Calcular la longitud L_1, medida sobre el plano, desde lo alto del plano hasta donde rebota el cuerpo por primera vez.
b) El segundo rebote medido sobre el plano dista del primero L_2, determinar el cociente $\frac{L_2}{L_1}$.
El rebote es perfectamente elástico y se desprecia la resistencia del aire.

a) Consideramos unos ejes coordenados cartesianos en lo alto del plano inclinado, designándolos con las letras x e y, siendo el eje de abscisas paralelo al suelo (figura 1)

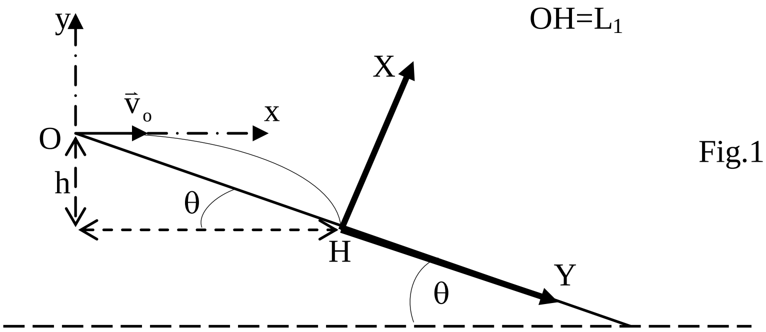


Fig.1

Las ecuaciones paramétricas del movimiento del cuerpo son:

$$x = v_o t \quad ; \quad y = -\frac{1}{2} g t^2$$

El primer rebote se produce en el punto H del plano en el que la ordenada es y = –h.

$$-h=-\frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow h=\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2} \Rightarrow \; L_1\,\text{sen}\theta=\frac{1}{2}g\frac{L_1^2\cos^2\theta}{v_o^2} \Rightarrow L_1=\frac{2\,v_o^2\,\text{sen}\,\theta}{g\cos^2\theta}=\frac{2\,v_o^2\,\text{tag}\,\theta}{g\,\cos\theta}\,(1)$$

b) Calculamos la velocidad V con que llega a H el cuerpo, para ello, aplicamos el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}m\,v_o^2+m\,g\,h=\frac{1}{2}m\,V^2 \;\Rightarrow\; V=\sqrt{v_o^2+2\,g\,h}=\sqrt{v_o^2+2\,g\,L_1\text{sen}\,\theta}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=\sqrt{v_o^2+2\,g\frac{2\,v_o^2\,\text{tag}\theta}{g\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta}=v_o\sqrt{1+4\,\text{tag}^2\theta}\quad(2)$$

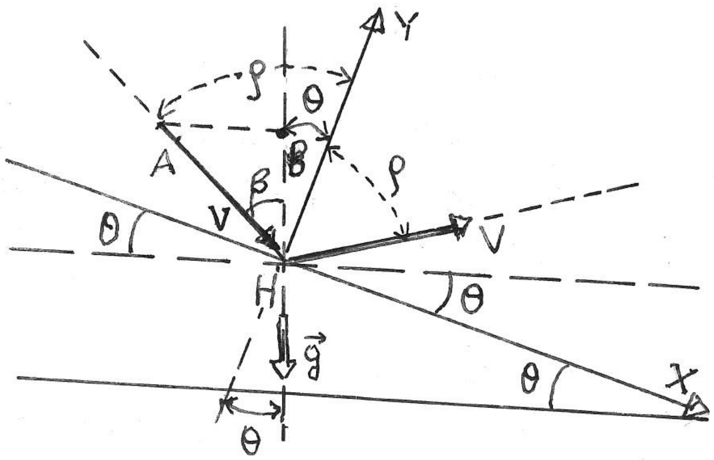


Fig.2

Al llegar el cuerpo al punto H del plano inclinado lo hace con una velocidad V, siendo sus componentes modulares (ver figura 2) AB = v_o y BH = g t , siendo t el tiempo que tarda el cuerpo desde la salida en lo alto del plano hasta el punto H. El cuerpo rebota con una velocidad de módulo V formando un ángulo con el eje Y que se representa en la figura 2 por $\rho=\beta+\theta$

Calculamos el valor de t.:

$$h=L_1\,\text{sen}\,\theta=\frac{2\,v_o^2\text{tag}\,\theta}{g\cos\theta}\cdot\text{sen}\,\theta=\frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow t^2=\frac{4\,v_o^2\text{tag}^2\,\theta}{g^2} \Rightarrow \quad t=\frac{2\,v_o\text{tag}\theta}{g}$$

Observando la figura 2 podemos deducir:

$$\text{sen}\,\beta=\frac{AB}{V}=\frac{v_o}{V}\;;\;\cos\beta=\frac{BH}{V}=\frac{g\,t}{V}=\frac{g\,\dfrac{2\,v_o\text{tag}\,\theta}{g}}{V}=\frac{2\,v_o\text{tag}\,\theta}{V}$$

Las ecuaciones paramétricas del cuerpo respecto de los ejes X -Y de la figura 2 son:

$$X = V\,\mathrm{sen}\,\rho\cdot t + \frac{1}{2} g(X)\, t^2 \quad ; \quad Y = V\cos\rho\cdot t - \frac{1}{2} g(Y)\, t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(X) = g\,\mathrm{sen}\,\theta\ ;\ g(Y) = g\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X = V\,\mathrm{sen}\,\rho\cdot t + \frac{1}{2} g\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot t^2 \quad ; \quad Y = V\cos\rho\cdot t - \frac{1}{2} g\cos\theta\cdot t^2 \ (3)$$

Sustituimos en las ecuaciones anteriores ρ;

$$\mathrm{sen}\,\rho = \mathrm{sen}(\beta+\theta) = \mathrm{sen}\,\beta\cos\theta + \cos\beta\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{v_o}{V}\cdot\cos\theta + \frac{2\,v_o\,\mathrm{tag}\,\theta}{V}\cdot\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,\rho = \frac{v_o}{V}\left(\cos\theta + 2\,\mathrm{tag}\,\theta\ \mathrm{sen}\,\theta\right)\ (4)$$

$$\cos\rho = \cos(\beta+\theta) = \cos\beta\cos\theta - \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{2\,v_o\,\mathrm{tag}\,\theta}{V}\cdot\cos\theta - \frac{v_o}{V}\cdot\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\rho = \frac{v_o}{V}\left(2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta\right) = \frac{v_o\,\mathrm{sen}\,\theta}{V} \quad (5)$$

Volviendo a las ecuaciones paramétricas (3) el segundo rebote se produce cuando Y=0

$$Y = V\cos\rho\cdot t - \frac{1}{2} g\cos\theta\cdot t^2 = 0 \Rightarrow \quad 2\,V\cos\rho = g\cos\theta\cdot t \ \Rightarrow \quad t = \frac{2\,V\cos\rho}{g\cos\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2 = V\,\mathrm{sen}\,\rho\,\frac{2\,V\cos\rho}{g\cos\theta} + \frac{1}{2} g\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{2\,V\cos\rho}{g\cos\theta}\right)^2 = \frac{2\,V^2}{g}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\rho\ \cos\rho}{\cos\theta} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\rho}{\cos^2\theta}\right) \quad (6)$$

En la ecuación (6) incluimos las ecuaciones (4) y (5).

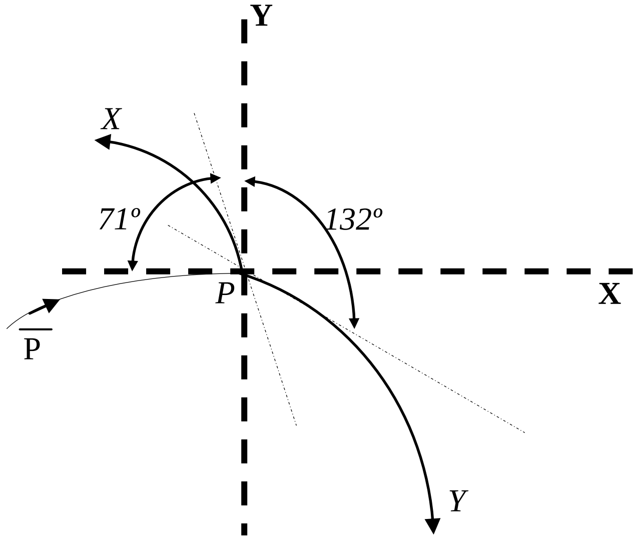
$$L_2 = \frac{2\,V^2}{g}\left[\frac{\frac{v_o}{V}\left(\cos\theta + 2\,\mathrm{tag}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\cdot\frac{v_o\,\mathrm{sen}\,\theta}{V}}{\cos\theta} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\cdot\left(\frac{v_o\mathrm{sen}\,\theta}{V}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$L_2 = \frac{2\,V^2}{g}\cdot\frac{v_o^2}{V^2}\left[\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\,\mathrm{tag}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\mathrm{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\right] = \frac{2\,v_o^2}{g}\left[\mathrm{sen}\,\theta + 2\,\mathrm{tag}^2\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{tag}^2\mathrm{sen}\,\theta\right] \Rightarrow$$

$$L_2 = \frac{2\,v_o^2}{g}\left(\mathrm{sen}\,\theta + 3\,\mathrm{tag}^2\mathrm{sen}\,\theta\right) \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \frac{\frac{2\,v_o^2}{g}\left(\mathrm{sen}\,\theta + 3\,\mathrm{tag}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\frac{2\,v_o^2}{g}\,\frac{\mathrm{tag}\,\theta}{\cos\theta}} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + 3\,\mathrm{tag}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{\mathrm{tag}\,\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = \cos^2\theta + 3\,\mathrm{tag}\theta\ \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = \cos^2\theta + 3\,\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \mathrm{sen}^2\theta + 3\,\mathrm{sen}^2\theta = 1 + 2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

360.- El esquema de la figura inferior corresponde a una fotografía realizada en una cámara de burbujas. Un antiprotón colisiona con un protón que se encuentra en reposo. El resultado es la aparición de dos partículas X e Y, detectadas por la cámara de burbujas. Las líneas rectas que aparecen en la figura indican las direcciones de las velocidades de las partículas en el punto de impacto y la curvatura es debida a la presencia del campo magnético.
Los radios de curvatura de las trayectorias son: antiprotón = 4,0 m, X= 1,5 m, e Y = 5,0 m. La cantidad de movimiento del antiprotón es 1497MeV/c.
Las direcciones se dan en el gráfico.

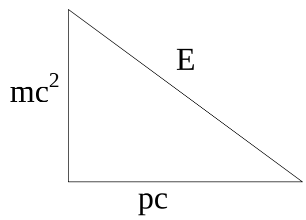


a) Probar que en el proceso se origina una tercera partícula Z y calcular su cantidad de movimiento.
b) Comprobar si es razonable que en el proceso se produzca un mesón (π^+), un mesón (π^-) y un mesón (π^0).
c) Calcular la velocidad de las partículas.
Dato: masa del protón 938 MeV/c^2.
Masa del (π^+) =masa del (π^-) =140 MeV/c^2; Masa del (π^0)= 135 MeV/c^2

En problemas de colisiones de partículas es frecuente expresar la cantidad de movimiento en MeV/c y la masa de las partículas por MeV/c^2.
La razón es la siguiente:
De acuerdo con la teoría de la relatividad

$$E = mc^2 \;\Rightarrow\; m = \frac{E}{c^2} \;;\; p = mv \;;\; E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow p \approx m\sqrt{\frac{E}{m}} = \sqrt{Em} = \sqrt{E\cdot\frac{E}{c^2}} = \frac{E}{c}$$

La relación entre las energías relativistas de una partícula y el momento lineal p, se puede recordar fácilmente mediante el diagrama de la figura.



Por similitud con el T. de Pitágoras (solo es un recordatorio)

$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$

Para una partícula de masa nula, como un fotón, se deduce de la anterior relación $E = p \cdot c$

Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento, en el punto de colisión. Consideramos dos ejes coordenados cartesianos. El eje **X** tiene la dirección de la velocidad del antiprotón y dirigido hacia la derecha y el eje **Y** es perpendicular al anterior en el punto donde se encuentra el protón en reposo. La partícula *X* forma con el eje **X** un ángulo de 71º y con el eje **Y**, 90-71= 19º. La partícula *Y* forma con el eje **X** un ángulo de: 132-19-90= 23º.

De la conservación del momento lineal para las componentes, en este caso según el eje **X**.

$$1497 = -p_X \cos 71º + p_Y \cos 23º + p_Z(X) \quad \Rightarrow \quad p_X \cos 19º = p_Y \operatorname{sen} 23º + p_Z(Y) \quad (1)$$

Para calcular la cantidad de movimiento de las partículas *X* e *Y* hacemos uso de la interacción de dichas partículas con el campo magnético de la cámara de burbujas. Igualamos la fuerza magnética con la centrípeta

$$F = qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} \Rightarrow qB = \frac{p}{R}$$

Aplicando para el antiprotón resulta: $qB = \dfrac{1497}{4}$ (2)

Para identificar las cargas de *X* e *Y* observamos la trayectoria: *X* debe tener carga positiva e *Y* negativa. La partícula *Z* carece de carga ya que no deja rastro en la cámara de burbujas. La suma de las cargas del antiprotón y del protón es cero, luego la carga de las partículas *X* e *Y* es la misma en valor absoluto, una positiva y otra negativa. Es razonable suponer que ambas partículas tengan la misma carga que la del protón y la del antiprotón, pues en estas colisiones no se forman partículas con doble carga.

La ecuación (2) nos vale para *X* e *Y*.

$$\frac{1497}{4} = \frac{p_X}{1{,}5} \Rightarrow p_X = 561\frac{MeV}{c} \; ; \; \frac{1497}{4} = \frac{p_Y}{5} \Rightarrow p_Y = 1871\frac{MeV}{c}$$

Volviendo a las ecuaciones (1)

$$1497 = -561 \cdot \cos 71º + 1871 \cdot \cos 23º + p_Z(X) \quad \Rightarrow \quad p_Z(X) = -43\frac{MeV}{c}$$

$$561 \cdot \cos 19º = 1871 \cdot \operatorname{sen} 23º + p_Z(Y) \Rightarrow \quad p_Z(Y) = -201\frac{MeV}{c}$$

$$\Rightarrow \; p_Z = \sqrt{201^2 + 43^2} = 206\frac{MeV}{c}$$

b) Para comprobar si la hipótesis es plausible hacemos uso del principio de conservación de la energía – masa: $E=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$.

$$E(\bar{p})=\sqrt{1487^2\left(\frac{\mathrm{MeV}}{c}\right)^2\cdot c^2+938^2\left(\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}\right)^2\cdot c^4}=\sqrt{1487^2+938^2}=1758\ \mathrm{MeV}$$

$$E(p)=938\,\mathrm{MeV}$$

$$E(\pi^+)=\sqrt{561^2+140^2}=578\mathrm{MeV}$$

$$E(\pi^-)=\sqrt{1871^2+140^2}=1876\,\mathrm{MeV}$$

$$E(\pi^o)=\sqrt{206^2+135^2}=246\,\mathrm{MeV}$$

Partículas incidentes = 1758+938=2696 MeV

Partículas formadas= 578+1876+246=2700 MeV

Como la diferencia es muy pequeña y está dentro de los errores que se cometen, la hipótesis es plausible.

c) Expresamos la cantidad de movimiento según la teoría de la relatividad

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{mvc}{\sqrt{c^2-v^2}}\Rightarrow p^2=\frac{m^2v^2c^2}{c^2-v^2}\Rightarrow\frac{1}{p^2}=\frac{c^2-v^2}{m^2v^2c^2}=\frac{1}{m^2v^2}-\frac{1}{m^2c^2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{m^2v^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{m^2c^2}=\frac{p^2+m^2c^2}{p^2m^2c^2}\Rightarrow\frac{1}{v^2}=\frac{p^2+m^2c^2}{p^2c^2}\Rightarrow\quad v^2=\frac{p^2c^2}{p^2+m^2c^2}=\frac{p^2c^4}{p^2c^2+m^2c^4}\Rightarrow A$$

$$\Rightarrow\quad v=\frac{pc^2}{E}(3)$$

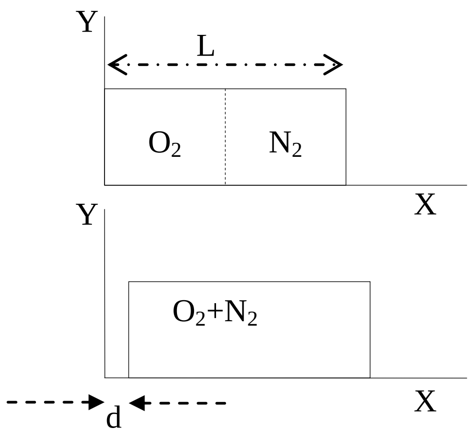
plicamos la ecuación (3)

$$v(\pi^+)=\frac{561\frac{\mathrm{MeV}}{c}\cdot c^2}{578\,\mathrm{MeV}}=0{,}97c\ ;v(\pi^-)=\frac{1871\frac{\mathrm{MeV}}{c}\cdot c^2}{1876\,\mathrm{MeV}}=0{,}997c\ ;v(\pi^o)=\frac{206\frac{\mathrm{MeV}}{c}\cdot c^2}{246\,\mathrm{MeV}}=0{,}84c$$

361.- Una caja de longitud L = 30 cm está dividida mediante un tabique en dos mitades iguales. En el compartimento de la izquierda está el gas oxígeno y en el de la derecha el gas nitrógeno. Ambos gases se encuentran a la misma temperatura, pero la presión del nitrógeno es doble que la del oxígeno. Se elimina el tabique, los gases se mezclan y alcanzan el equilibrio. Dado que no existen rozamientos, y la caja carece de masa, ésta se desplaza por el suelo una cierta distancia. Calcular el valor de esa distancia.

Datos Masas molares: $M(O_2)$ =32 g/mol , $M(N_2)$= 28 g/mol

Al no existir rozamiento y siendo la suma de las fuerzas exteriores nulas, el centro de masas antes y después de la mezcla de los gases ocupa la misma posición.



En la figura se ha representado la caja antes de la mezcla y después. Calculamos la posición del centro de masas antes de la mezcla. Designamos con n al número de moles de oxígeno, los de nitrógeno son 2 n, ya que la presión es doble y los gases ocupan el mismo volumen y están a la misma temperatura.

Considerando la dirección horizontal el centro de masas del oxígeno respecto del sistema de ejes se encuentra en la mitad de su compartimento, esto es, a una distancia x=L/4. El centro de masas del nitrógeno se encuentra a x=L/2+L/4= 3L/4. El centro de masa de la caja es:

$$x_{CM} = \frac{M(O_2)\cdot n \cdot \frac{L}{4} + M(N_2)\cdot 2n \cdot \frac{3L}{4}}{M(O_2)\cdot n + M(N_2)\cdot 2n} = \frac{32\frac{nL}{4} + 28\frac{6L}{4}}{n(32 + 2\cdot 28)} = \frac{8L + 42L}{88} = \frac{25L}{44}$$

Después de la mezcla el centro de masas está en la mitad de la caja y dista del eje Y, L/2+d. Como el centro de masa no se ha movido

$$\frac{25L}{44} = \frac{L}{2} + d \Rightarrow d = \frac{25L}{44} - \frac{L}{2} = \frac{25L - 22L}{44} = \frac{3L}{44} = \frac{3\cdot 30}{44} = 2{,}05 \text{ cm}$$