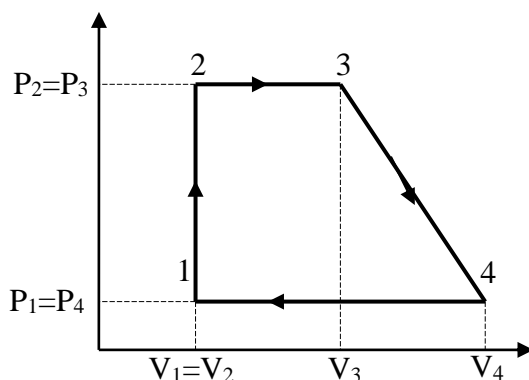


**OLIMP-PVARIADOS8-2018**

459.- El ciclo de la figura lo realizan  $n$  moles de un gas ideal. La temperatura del punto 2 es igual a la del punto 4. Se pide el trabajo que realiza el gas en función de las temperaturas y del número de moles.



**Olimpiadas de Moscú**

El trabajo corresponde al área englobada por el ciclo. El área de un trapecio es semisuma de las bases por la altura.

$$A = \frac{(V_4 - V_1) + (V_3 - V_1)}{2} \cdot (P_2 - P_1) \quad (1)$$

Las coordenadas termodinámicas de los vértices del trapecio son:

$$(1) P_1 V_1 T_1 ; \quad (2) P_2 V_1 T_2 ; \quad (3) P_2 V_3 T_3 ; \quad (4) P_1 V_4 T_2$$

Relación entre los volúmenes  $V_1$  y  $V_4$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_1 V_4}{T_2} \Rightarrow V_4 = V_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (2)$$

Relación entre los volúmenes  $V_2$  y  $V_3$

$$\frac{P_2 V_1}{T_2} = \frac{P_2 V_3}{T_3} \Rightarrow V_3 = V_1 \frac{T_3}{T_2} \quad (3)$$

Sustituimos (2) y (3) en (1)

$$A = \frac{\left( V_1 \frac{T_2}{T_1} - V_1 \right) + \left( V_1 \frac{T_3}{T_2} - V_1 \right)}{2} \cdot (P_2 - P_1) = \frac{V_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}{2} (P_2 - P_1) \quad (4)$$

Relación entre las presiones  $P_1$  y  $P_2$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_1}{T_2} \Rightarrow P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (5)$$

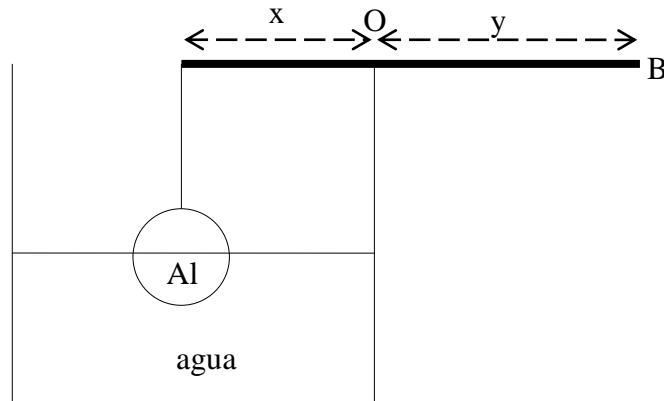
Sustituimos (5) en (4)

$$A = \frac{V_1}{2} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \cdot \left( P_1 \frac{T_2}{T_1} - P_1 \right) = \frac{P_1 V_1}{2} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right)$$

Según la ecuación de los gases perfectos  $P_1 V_1 = nRT_1$

$$A = \frac{nRT_1}{2} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) = \frac{nR}{2} \left( \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2 \right) \cdot (T_2 - T_1)$$

460.- En la figura inferior el sistema está en equilibrio.

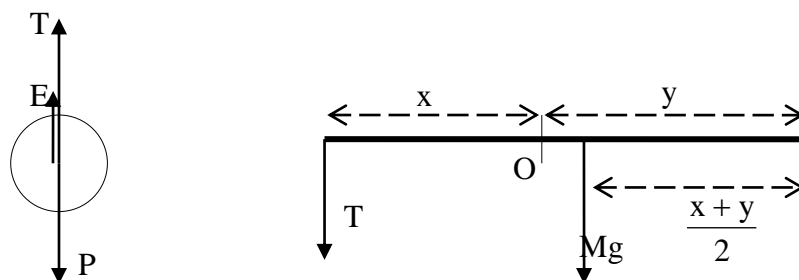


Una bola de aluminio de  $r = 0,5 \text{ cm}$  está sumergida la mitad en agua y cuelga de una cuerda sin masa. B es una barra homogénea de masa  $M = 4,4 \text{ gramos}$ . Determinar la relación  $y/x$ .

Datos . Densidad del aluminio  $= 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  , densidad del agua  $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg /m}^3$

### Olimpiadas de Moscú

Las fuerzas que actúan sobre la esfera de aluminio y la barra son las siguientes



Al estar la esfera de aluminio en reposo, la suma de las fuerzas es nula.

T es la tensión de la cuerda, E el empuja del agua sobre la esfera y P el peso de la esfera. Se desprecia el empuje que ejerce el aire por ser su densidad muy pequeña respecto de la del agua.

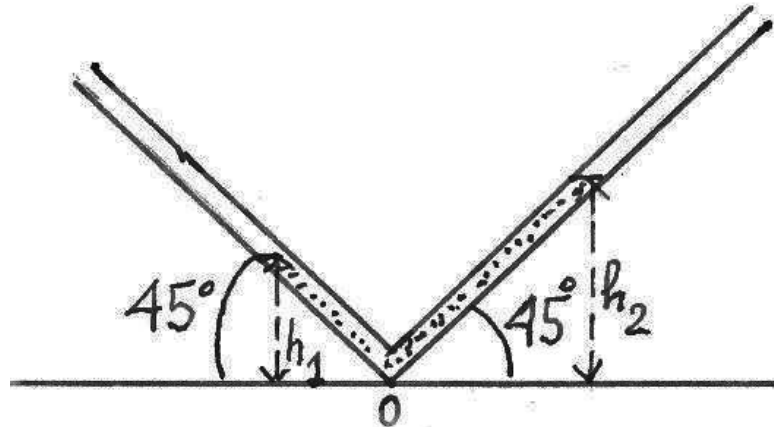
$$\bar{T} + \bar{P} + \bar{E} = 0 \Rightarrow T = P - E = V \rho_{Al} g - \frac{V}{2} \rho_w g = \frac{4}{3} \pi r^3 g \left( \rho_{Al} - \frac{\rho_w}{2} \right)$$

Si la barra está en equilibrio los momentos de las fuerzas han de ser iguales y su suma nula

El peso de la barra actúa en su centro de masas que está situado en mitad de la barra y a la derecha del apoyo O ya que los momentos de T y Mg han de tener signo contrario para que su suma sea nula.

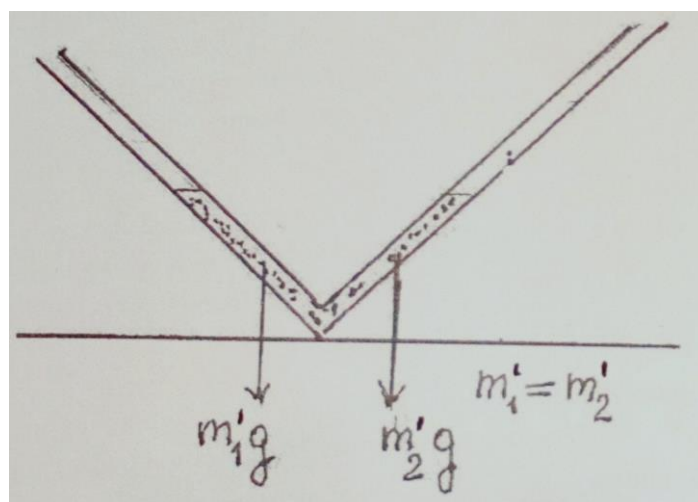
$$\begin{aligned} \bar{M}_T = \bar{M}_{Mg} &\Rightarrow T x = M g \left( y - \frac{x+y}{2} \right) \Rightarrow \frac{T}{Mg} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} - \frac{y}{2x} \Rightarrow \frac{2T}{Mg} + 1 = \frac{y}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3} \pi (0,5 \cdot 10^{-2})^3 \left( 2,7 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} 1,0 \cdot 10^3 \right)}{4,4 \cdot 10^{-3}} + 1 = 1,52 \end{aligned}$$

461.- Un acelerómetro sencillo puede hacerse con un tubo doblado tal como se observa en la figura inferior. Durante el movimiento acelerado el líquido adquiere dos niveles distintos en cada rama. Las alturas de dichos niveles respecto de la horizontal son  $h_1$  y  $h_2$  respectivamente. Calcular la aceleración  $a$  en función de  $g$ ,  $h_1$  y  $h_2$ .

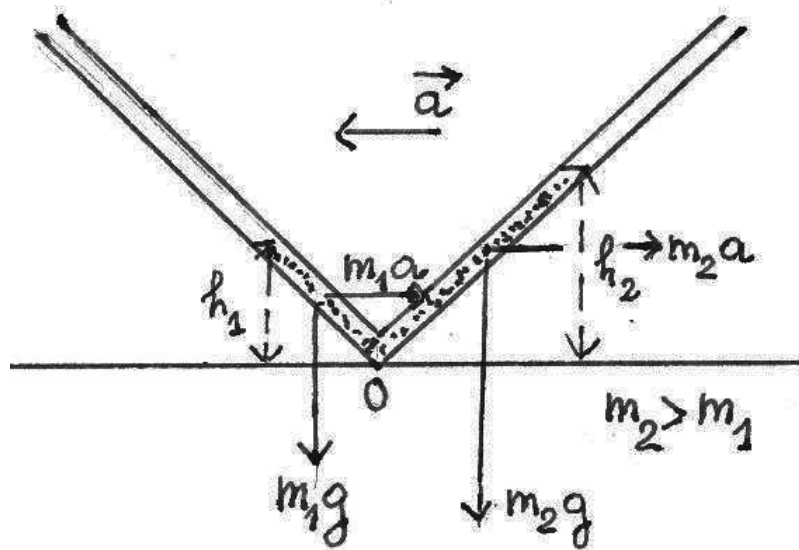


### Olimpiadas de Moscú

Cuando el tubo está en reposo o con movimiento uniforme la altura de líquido en las dos ramas es la misma ( $h_1=h_2$ ). Consideramos el líquido dividido en dos partes una a la izquierda de O y otra a su derecha. La componente del peso del lado izquierdo se equilibra con la componente del peso del lado derecho.



Al estar el sistema acelerado aparecen dos fuerzas de inercia de módulos  $m_1 a$  y  $m_2 a$  respectivamente. El sistema se encuentra en equilibrio.



Las fuerzas a lo largo de los tubos son

$$\text{Rama izquierda. } m_1 g \cos 45^\circ + m_1 a \cos 45^\circ$$

$$\text{Rama derecha } m_2 g \cos 45^\circ - m_2 a \cos 45^\circ$$

Al estar en equilibrio

$$m_1 g \cos 45^\circ + m_1 a \cos 45^\circ = m_2 g \cos 45^\circ - m_2 a \cos 45^\circ \Rightarrow m_1 g + m_1 a = m_2 g - m_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(m_1 + m_2) = g(m_2 - m_1) \Rightarrow a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

Designamos con  $S$  la sección del tubo,  $d$  a la densidad del líquido y  $L_1$  y  $L_2$  las longitudes de las ramas del tubo izquierda y derecha respectivamente

$$\cos 45^\circ = \frac{h_1}{L_1} ; \quad \cos 45^\circ = \frac{h_2}{L_2}$$

$$m_1 = S L_1 d = S \frac{h_1}{\cos 45^\circ} d \quad ; \quad m_2 = S L_2 d = S \frac{h_2}{\cos 45^\circ} d$$

Sustituyendo en la aceleración

$$a = \frac{g \left( S \frac{h_2}{\cos 45^\circ} d - S \frac{h_1}{\cos 45^\circ} d \right)}{S \frac{h_1}{\cos 45^\circ} d + S \frac{h_2}{\cos 45^\circ} d} = g \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1}$$

**462.-** Un aeroplano vuela horizontalmente con una velocidad  $v_0$ . Comienza una maniobra de ascenso describiendo una semicircunferencia en un plano vertical. El módulo de su velocidad varía según la siguiente ecuación

$$v^2 = v_0^2 - 2kh$$

Siendo  $h$  la altura en vertical respecto del inicio de la maniobra y  $k$  una constante. La velocidad del aeroplano en el punto más alto de su trayectoria es  $\frac{v_0}{2}$

Calcular su aceleración cuando su vector velocidad apunte verticalmente hacia arriba.

#### Olimpiadas de Moscú

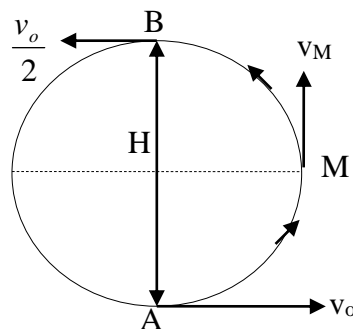
*Añadido por nosotros.* Si  $v_0 = 62,5 \text{ m/s}$  y  $k = 10 \text{ m/s}^2$ , representar a) la velocidad frente a la altura, b) el tiempo de la maniobra frente a la altura y c) la aceleración centrípeta frente a la altura.

Calculamos la altura máxima  $H$  del aeroplano respecto de su posición inicial.

$$\left( \frac{v_0}{2} \right)^2 = v_0^2 - 2kH \Rightarrow 2kH = v_0^2 - \frac{v_0^2}{4} \Rightarrow H = \frac{\frac{3v_0^2}{4}}{2k} = \frac{3v_0^2}{8k}$$

El radio de la circunferencia descrita por el aeroplano es

$$R = \frac{H}{2} = \frac{3v_0^2}{16k}$$



AMB es la trayectoria seguida por el aeroplano. Su velocidad es tangente a la trayectoria y apunta verticalmente hacia arriba en la posición M para la que la altura

respecto de la posición inicial es:  $h_M = \frac{H}{2} = R = \frac{3v_0^2}{16k}$ .

En M hay dos tipos de aceleración la centrípeta y la tangencial. Son dos vectores, el primero dirigido hacia el centro y el segundo tangente en M apuntando hacia abajo.

Por definición la aceleración centrípeta en M vale

$$(a_c)_M = \frac{v_M^2}{R} = \frac{v_0^2 - 2kh_M}{R} = \frac{v_0^2 - 2k \frac{3v_0^2}{16k}}{\frac{3v_0^2}{16k}} = \frac{1 - \frac{6k}{16k}}{\frac{3}{16k}} = \frac{\frac{16k - 6k}{16k}}{\frac{3}{16k}} = \frac{10k}{3}$$

La aceleración tangencial es por definición

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dh} = \frac{d}{dh}(\sqrt{v_0^2 - 2kh}) = \frac{-2k}{2\sqrt{v_0^2 - 2kh}} = -\frac{k}{\sqrt{v_0^2 - 2kh}} \quad (2)$$

La velocidad es la derivada  $dh/dt$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2kh} = \frac{dh}{dt} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dh}{\sqrt{v_0^2 - 2kh}}$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable

$$v_0^2 - 2kh = x^2 \Rightarrow -2k dh = 2x dx \Rightarrow dh = -\frac{x dx}{k}$$



$$\int dt = t = \int \frac{-x dx}{\frac{k}{x}} = -\frac{x}{k} + \text{Cte} = -\frac{\sqrt{v_o^2 - 2kh}}{k} + \text{Cte}$$

Cuando  $h=0$ , el tiempo  $t=0$

$$0 = -\frac{v_o}{k} + \text{Cte} \Rightarrow \text{Cte} = \frac{v_o}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\sqrt{v_o^2 - 2kh}}{k} + \frac{v_o}{k} \Rightarrow t = \frac{1}{k}(v_o - \sqrt{v_o^2 - 2kh}) \Rightarrow v_o - kt = \sqrt{v_o^2 - 2kh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_o^2 + k^2 t^2 - 2v_o kt = v_o^2 - 2kh \Rightarrow h = \frac{2v_o kt - k^2 t^2}{2k} = v_o t - \frac{k t^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = v_o - kt \quad (3)$$

Según la ecuación (1)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2 - 2kh}} \cdot (v_o - kt) = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2 - 2kh}} \cdot \left[ v_o - k \frac{1}{k}(v_o - \sqrt{v_o^2 - 2kh}) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_t = -\frac{k}{\sqrt{v_o^2 - 2kh}} \cdot \sqrt{v_o^2 - 2kh} = -k$$

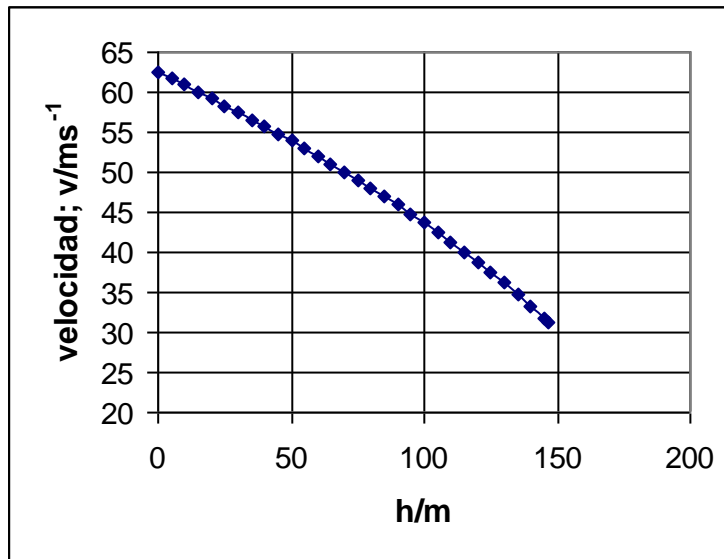
El módulo de la aceleración en el punto M vale  $a_T = \sqrt{a_t^2 + a_c^2}$ . Calculamos  $a_c$  en el punto M de la trayectoria

$$a_c = \frac{v_M^2}{R} = \frac{v_o^2 - 2kh_M}{R} = \frac{v_o^2}{h_M} - \frac{2kh_M}{h_M} = \frac{v_o^2}{\frac{3v_o^2}{16k}} - 2k = \frac{16k}{3} - 2k = \frac{10k}{3}$$

$$a_T = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{10k}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{3} k$$

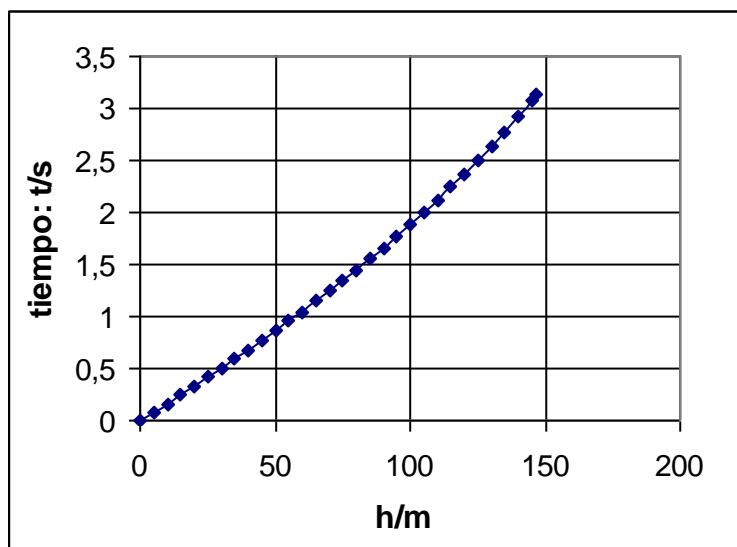
Velocidad frente a altura.

$$v = \sqrt{62,5^2 - 2 \cdot 10 \cdot h}$$



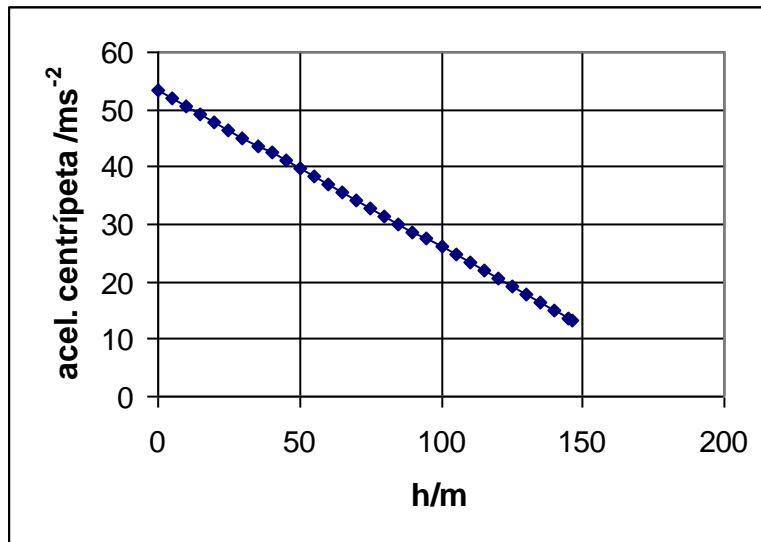
Tiempo frente a la altura

$$t = \frac{1}{k} (v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2kh}) = \frac{1}{10} [62,5 - \sqrt{62,5^2 - 2 \cdot 10 \cdot h}]$$

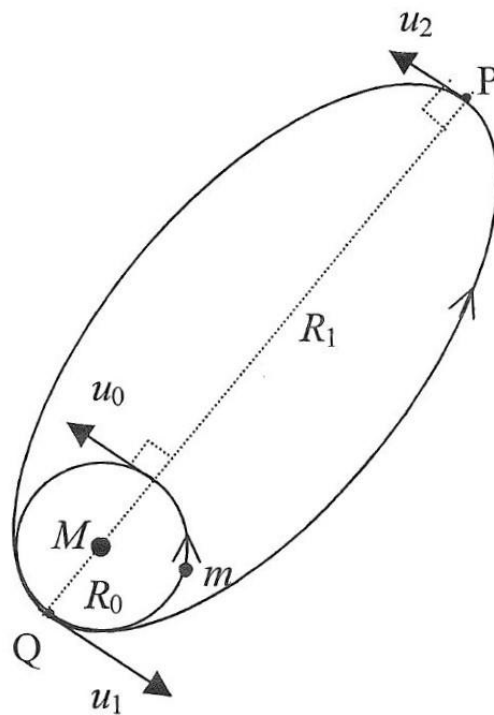


Aceleración centrípeta frente a la altura

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2 - 2kh}{\frac{3v_0^2}{16k}} = \frac{160 \cdot (62,5^2 - 2 \cdot 10 \cdot h)}{3 \cdot 62,5^2}$$



**463.-***En un futuro cercano nosotros mismos podríamos tomar parte en el lanzamiento de un satélite, el cual, desde el punto de vista físico, requiere solamente la utilización de una mecánica sencilla.*



**Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física**

*a) Un satélite de masa  $m$  describe una órbita circular de radio  $R_o$  alrededor de la Tierra, cuya masa designamos con  $M$ . Determinar la velocidad ( $u_o$ ) del satélite en función de  $M$ ,  $R_o$  y la constante de gravitación universal  $G$ .*

La fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el satélite proporciona la fuerza centrípeta para que describa la órbita circular

$$m \frac{u_o^2}{R_o} = G \frac{Mm}{R_o^2} \Rightarrow u_o = \sqrt{\frac{GM}{R_o}} \quad (1)$$

*b) Colocaremos el satélite en una trayectoria tal que alcance el punto P a una distancia  $R_1$  del centro de la Tierra, para ello aumentaremos la velocidad del satélite de  $u_o$  a  $u_1$  de forma casi instantánea en el punto Q de su trayectoria. Determinar el valor de  $u_1$  en función de  $u_o$ ,  $R_o$  y  $R_1$ .*

Conservación del momento angular  $mu_1 R_o = mu_2 R_1 \Rightarrow u_2 = \frac{u_1 R_o}{R_1}$

Conservación de la energía mecánica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m u_1^2 - G \frac{Mm}{R_o} &= \frac{1}{2} m u_2^2 - G \frac{Mm}{R_1} \Rightarrow \frac{1}{2} u_1^2 - G \frac{M}{R_o} = \frac{1}{2} u_2^2 - G \frac{M}{R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} u_2^2 &= \frac{1}{2} u_1^2 - G \frac{M}{R_o} + G \frac{M}{R_1} \Rightarrow u_2^2 = u_1^2 - 2GM \left( \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned}$$

Sustituimos  $u_2$  y  $GM$  de la ecuación (1) en la última ecuación

$$\begin{aligned} u_1^2 \left( \frac{R_o}{R_1} \right)^2 &= u_1^2 - 2u_o^2 R_o \frac{R_1 - R_o}{R_1 R_o} \Rightarrow u_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_o}{R_1} \right)^2 \right] = 2u_o^2 \frac{R_1 - R_o}{R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1^2 &= \frac{2u_o^2 \frac{R_1 - R_o}{R_1}}{\frac{R_1^2 - R_o^2}{R_1^2}} = \frac{2u_o^2 R_1 (R_1 - R_o)}{(R_1 + R_o)(R_1 - R_o)} \Rightarrow u_1 = u_o \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_o}} \quad (2) \end{aligned}$$

**c) Deducir el valor mínimo de  $u_1$  que permita al satélite alejarse de la influencia de la Tierra.**

El satélite no estará influido por la Tierra cuando se encuentre a una distancia infinita. A esa distancia la energía potencial es cero y la cinética que posee el satélite también es cero porque  $u_1$  es mínima

$$\frac{1}{2} m u_{1,m}^2 - \frac{GMm}{R_o} = 0 \Rightarrow u_{1,m} = \sqrt{\frac{2GM}{R_o}}$$

Sustituyendo la ecuación (1)

$$u_{1,m} = \sqrt{2} u_o$$

**d) Expresar la velocidad del satélite en P ( $u_2$ ) en función de  $u_o$ ,  $R_o$  y  $R_1$ .**

En el apartado b) hemos deducido la siguiente ecuación:  $u_2^2 = u_1^2 - 2GM \left( \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_1} \right)$ .

Sustituyendo la ecuación (2) y de la ecuación (1) resulta.

$$\begin{aligned} u_2^2 &= u_1^2 - 2GM \left( \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_1} \right) = u_o^2 \frac{2R_1}{R_o + R_1} - 2u_o^2 R_o \frac{R_1 - R_o}{R_o R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow u_2^2 &= 2u_o^2 \left[ \frac{R_1}{R_o + R_1} - \frac{R_1 - R_o}{R_1} \right] = 2u_o^2 \left[ \frac{R_1^2 - (R_o + R_1) \cdot (R_1 - R_o)}{R_1 (R_o + R_1)} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow u_2^2 &= 2u_o^2 \left[ \frac{R_1^2 - (R_1^2 - R_o^2)}{R_1 (R_o + R_1)} \right] \Rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{2} u_o R_o}{\sqrt{R_1 (R_o + R_1)}} \quad (3) \end{aligned}$$

**e) Ahora queremos cambiar la órbita del satélite desde el punto P a una órbita circular de radio  $R_1$  aumentando su velocidad, de forma prácticamente instantánea, desde  $u_2$  a  $u_3$ . Expresar  $u_3$  en función de  $u_2$ ,  $R_o$  y  $R_1$ .**

Aplicamos la ecuación (1) a la órbita circular de radio  $R_1$ .

$$u_3 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \quad (4)$$

Entre las ecuaciones (1), (3) y (4) resulta.

$$u_2 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{GM}{R_o}} R_o}{\sqrt{R_1(R_o + R_1)}} = \frac{\sqrt{2} u_3 \sqrt{R_1 R_o}}{\sqrt{R_1(R_o + R_1)}} \Rightarrow u_3 = u_2 \sqrt{\frac{(R_o + R_1)}{2R_o}}$$

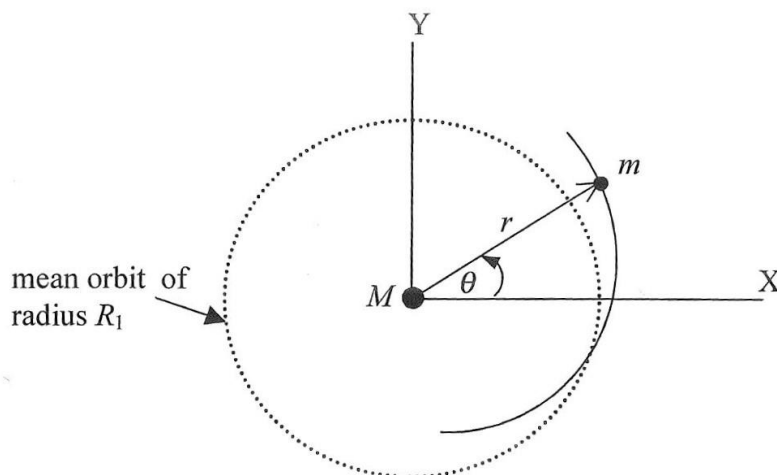
*f) Si al satélite se le perturba en dirección radial de forma instantánea y ligera se desvía de su órbita circular de radio  $R_1$  a una órbita perturbada. Calcular el periodo de las pequeñas oscilaciones radiales del planeta.*

*Ayuda. Los estudiantes si lo necesitan pueden hacer uso de la ecuación del movimiento del satélite en su órbita*

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 r \right] = - \frac{GMm}{r^2}$$

*y de la conservación del momento angular*

$$m r^2 \frac{d\theta}{dt} = Cte$$



Cuando el satélite describe una órbita circular de radio  $R_1$  su distancia a la Tierra, a M en la figura superior, es siempre la misma. Cuando se le perturba de forma radial y ligera se le separa de esa órbita circular con lo que el satélite varía de forma armónica su distancia a M, esto significa que en un punto de la órbita se separa de M una distancia  $R_1 + \delta$ . ( $\delta \ll R_1$ ) y en otro opuesto se acerca a una distancia  $R_1 - \delta$  y existen otros dos puntos opuestos en que su distancia es  $R_1$ . La órbita es una elipse de excentricidad muy pequeña que se puede asimilar a una circunferencia con M ligeramente desplazado de su posición cuando la órbita es circular. Dado que la órbita perturbada es cerrada el impulso inicial es ligero para que energía total del sistema siga siendo negativa.

Recordemos que en el movimiento vibratorio armónico es conservativo

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (1)$$

Cuando tratamos de una fuerza central la conservación de la energía es:

$$\frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + U(r) = E$$

La conservación del momento angular:  $mr v_\theta = \lambda$

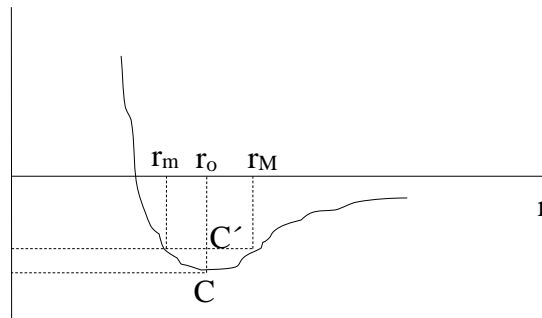
Combinando estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m v_r^2 + \frac{1}{2}m \left( \frac{\lambda}{mr} \right)^2 + U(r) = E &\Rightarrow \frac{1}{2}m v_r^2 + \frac{\lambda^2}{2mr^2} + U(r) = E \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2}m v_r^2 + U'(r) = E \quad (2), &\quad \text{siendo } U'(r) = \frac{\lambda^2}{2mr^2} + U(r) \end{aligned}$$

La energía potencial  $U'(r)$  en (2) se denomina energía potencial equivalente. Si la fuerza central varía con el inverso del cuadrado de la distancia, la energía potencial equivalente es:

$$U'(r) = \frac{\lambda^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

La representación de  $U'(r)$  frente a  $r$  para un valor determinado de  $l$  es una curva semejante a la siguiente



En el problema que nos ocupa  $r_o = R_1$  la órbita es circular. El satélite está en la posición  $C$ . Cuando al satélite se le da un impulso radial instantáneo pasamos a  $C'$  donde la energía es algo mayor que en  $C$  y hay dos distancias a la masa  $M$  una mayor y otra menor. El satélite se mueve en una órbita perturbada y su distancia varía a  $M$  de forma armónica.

En un movimiento armónico simple podemos calcular  $k$  a partir de la energía potencial

$$U = \frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow \frac{dU}{dr} = kr \Rightarrow \frac{d^2U}{dr^2} = k$$

Para hallar la constante armónica del movimiento del satélite derivamos la energía potencial efectiva

$$\frac{dU'}{dr} = \frac{\lambda^2}{2m} \cdot \frac{-2r}{r^4} - GMm \frac{-1}{r^2} = -\frac{\lambda^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{d^2U'}{dr^2} = \frac{\lambda^2 3r^2}{mr^6} - \frac{GMm \cdot 2r}{r^4} = \frac{3\lambda^2}{mr^4} - \frac{2GMm}{r^3}$$

Si  $r = r_0$

$$k = \frac{3\lambda^2}{mr_0^4} - \frac{2GMm}{r_0^3} \quad (5)$$

En la órbita circular, a la que corresponde el punto C, de la figura la energía es un mínimo y por ello

$$\left( \frac{dU'}{dr} \right)_{r=r_0} = 0 = -\frac{\lambda^2}{mr_0^3} + \frac{GMm}{r_0^2} \Rightarrow \lambda^2 = GMm^2 r_0$$

Sustituyendo en la ecuación (5)

$$k = \frac{3GMm^2 r_0}{mr_0^4} - \frac{2GMm}{r_0^3} = \frac{GMm}{r_0^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{GMm} \frac{r_0^3}{r_0^3}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{GM}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

Calculamos el periodo del satélite cuando describe una órbita circular de radio  $R_1$ .

$$\frac{mv^2}{R_1} = \frac{GMm}{R_1^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = \frac{2\pi R_1}{v} = \frac{2\pi R_1}{\sqrt{\frac{GM}{R_1}}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_1^3}{GM}}$$

Resulta que  $T = T'$ .

Otra forma de resolver esta cuestión es hacer uso de la ecuación proporcionada en la ayuda

$$F_r = m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 r \right] = -\frac{GMm}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 r = -\frac{GM}{r^2} \quad (6)$$



Se sustituye la ecuación del momento angular  $mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \text{Cte}$

Elegimos para la constante cuando el satélite se encuentra a una distancia  $R_1$  de la masa  $M$

$$\begin{aligned} mR_1v = \text{Cte} &\Rightarrow \frac{mv^2}{R_1} = \frac{GMm}{R_1^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} \Rightarrow \text{Cte} = mR_1\sqrt{\frac{GM}{R_1}} = m\sqrt{GM R_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = m\sqrt{GM R_1} \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{GM R_1}{r^4} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (6)

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{GM R_1}{r^4} r = -\frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = GM\left(\frac{R_1}{r^3} - \frac{1}{r^2}\right) = GM\left(\frac{R_1 - r}{r^3}\right)$$

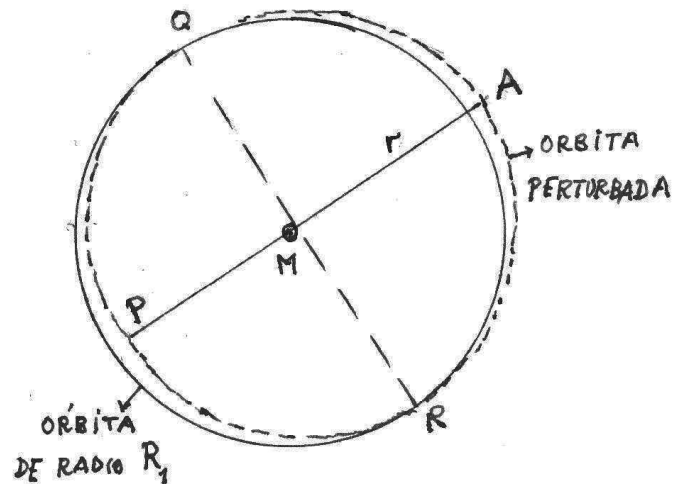
Cuando el satélite sufre el empuje radial su distancia a  $M$  es

$$r = R_1 + \varepsilon \quad \text{siendo } r \ll R_1 \Rightarrow dr = d\varepsilon$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = GM\left[\frac{R_1 - (R_1 + \varepsilon)}{(R_1 + \varepsilon)^3}\right] &\approx -\frac{GM}{R_1^3}\varepsilon \Rightarrow m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\frac{GMm}{R_1^3}\varepsilon = -k\varepsilon \\ \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GMm}{R_1^3}}} &\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{GM}} \end{aligned}$$

**g) Haga un boceto de la órbita perturbada junto con la no perturbada, esto es, con la circular.**



Si consideramos que el tiempo  $t=0$ , corresponde al punto A (apogeo), punto más lejano del satélite de la Tierra., cuando transcurre un cuarto de  $T$  el satélite está en Q a una distancia  $R_1$  de la Tierra, cuando  $t=T/2$  el satélite esta en P, punto más cercano (perigeo) a la Tierra y cuando  $t=3/4 T$  en R, otra vez a una distancia  $R_1$  de la Tierra y cuando  $t=T$  el satélite vuelve a A. Esto es así indefinidamente puesto que el periodo de vibración de  $r$  es el mismo que el de traslación en la órbita y ello se debe a que el impulso comunicado al satélite es pequeño y la curva en C se puede asimilar a una parábola..

Si el impulso recibido fuese mayor pudiera dar lugar a órbitas cerradas notablemente achatadas en donde la distancia MA es bastante mayor que la MP.