PROBLEMAS VARIADOS 7-2018

454.- Un acelerador lineal se emplea para acelerar electrones hasta alcanzar una energía de 40 GeV.
a) Calcular la masa del electrón cuando alcanza la citada energía.
b) La longitud del acelerador son 3000 metros medidos en el sistema del laboratorio ¿cuál es la longitud en el sistema de referencia del electrón?
c) Determinar el tiempo que emplea el electrón en recorrer la longitud del acelerador medido en el sistema del laboratorio y medido en el sistema ligado al electrón.
La masa en reposo del electrón es $m_o = 9{,}109.10^{-31}$ kg, velocidad de la luz $C=2{,}9979.10^{8}$ m/s, carga del electrón = $-1{,}602\ .10^{-19}$ C

Consideramos dos sistemas de referencia el del laboratorio (sistema L) y el ligado al electrón (sistema L´).
a) La energía y la masa están relacionada entre sí por la famosa ecuación de Einstein

$$E = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{40.10^9\,\mathrm{eV} \cdot 1{,},602.10^{-19}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}}}{\left(2{,}9979.10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 7{,}13.10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

b) La longitud de 3000 m es la longitud propia medida en el sistema L. Desde el sistema L´ al medir esa longitud se encuentra un valor diferente ya que para el observador de L´ el sistema L se está desplazando con velocidad v.

$$l = l_o\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (1)$$

La relación entre la masa m_o y la medida en a) es:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_o}{m} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$l = l_o\frac{m_o}{m} = 3000\frac{9{,}109.10^{-31}}{7{,}13.10^{-26}} = 0{,}0383\mathrm{m} = 3{,}83\mathrm{cm}$$

c) A partir de la ecuación (2)

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)^2}$$

Para el observador del sistema del laboratorio:

$$t = \frac{3000}{c\sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)^2}} = \frac{3000}{2{,}9979.10^8\sqrt{1-\left(\frac{9{,}109.10^{-31}}{7{,}11.10^{-26}}\right)^2}} = 1{,}00.10^{-5}\ \mathrm{s}$$

El observador del sistema L´ relaciona ese tiempo por la ecuación

$$t = \frac{t_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_o\ m,}{m_o} \Rightarrow t_o = \frac{m_o t}{m} = \frac{9{,}109.10^{-31}\cdot 1{,}00.10^{-5}}{7{,}13.10^{-26}} = 1{,}28.10^{-10}\ \mathrm{s}$$

455.- Sobre una barra aislante y horizontal están colocadas dos argollas a una distancia entre sí de D= 1 m y de ellas penden sendos hilos aislantes de longitud L=1 metro cada uno. En el extremo libre de cada hilo existen dos esferas conductoras, una de radio r y la otra de radio R=2r, ambas tienen la misma masa m = 1,00 gramo. A cada esfera se le suministra una carga de q= 8.10^{-7} C.

a) Calcular el ángulo que forma cada hilo con la dirección vertical cuando el sistema esté en equilibrio.

b) Ahora se ponen en contacto ambas esferas y luego se separan, determinar el ángulo con la vertical.

c) Construir la gráfica ángulo con la vertical frente a D a partir de la situación del apartado a), esto es, cuando ambas esferas tienen la misma carga q. Nota. Este apartado del problema debe hacerse con ayuda de una hoja de cálculo

a) En la figura 1 se ha dibujado la situación en equilibrio de las esferas y las fuerzas que actúan sobre una de ellas.

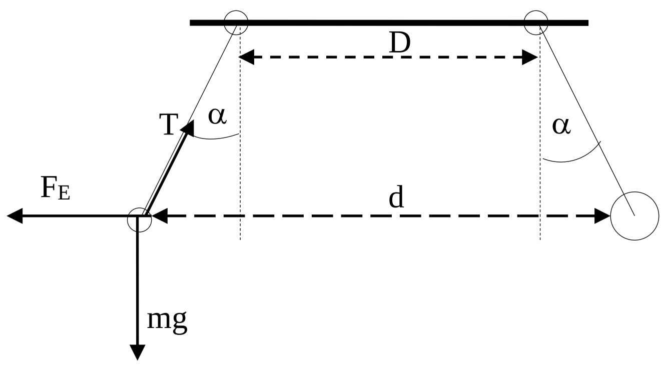


Fig.1

a) Igualando componentes de las fuerzas sobre los ejes horizontal y vertical

$$T\,\mathrm{sen}\,\alpha = F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d^2} \quad ; \quad T\cos\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d^2}}{mg} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{9.10^9\left(8.10^{-7}\right)^2}{10^{-3}\cdot 9{,}8}\frac{1}{d^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha = \frac{0{,}5878}{d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{0{,}7667}{\sqrt{\mathrm{tag}\,\alpha}} \quad (1)$$

Observando la figura 1 se deduce

$$d = D + 2\ L\,\text{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad d = 1 + 2\ \text{sen}\,\alpha \qquad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2)

$$1 + 2\ \text{sen}\,\alpha = \frac{0{,}7667}{\sqrt{\text{tag}\alpha}} \quad (3)$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo, dando un valor a α y calculando ambos miembros. Cuando los dos sean iguales esa es la solución por ejemplo

$$\alpha = 14^{\circ},\quad 1{,}4838 < 1{,}5359 \quad ; \quad \alpha = 15^{\circ},\quad 1{,}5176 > 1{,}4812 \quad ; \quad \alpha = 14{,}6^{\circ},\ 1{,}5041 \approx 1{,}5022$$

b) Al poner en contacto las esferas la carga se distribuye de modo que una adquiere más carga a costa de la que pierde la otra. El proceso de este trasvase termina cuando los potenciales son iguales. Designamos con q_1 a la carga de la esfera de radio r y con q_2 a la de radio R

Dado que la carga se conserva: $q_1 + q_2 = 2q = 16.10^{-7}$ (4)

Igualando los potenciales y recordando que la capacidad de una esfera es

$$C_1 = 4\pi\,\varepsilon\, r = \frac{q_1}{V} \quad ; \; C_2 = 4\pi\,\varepsilon\, R = \frac{q_2}{V} \;\Rightarrow\; \frac{q_1}{r} = \frac{q_2}{R} \;\Rightarrow 2q_1 = q_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 + 2q_1 = 2q = 16.10^{-7} \quad \Rightarrow \qquad q_1 = \frac{16.10^{-7}}{3}$$

Cuando de nuevo se alcance el equilibrio designamos al ángulo con la vertical por β y a la nueva distancia entre las esferas por ρ.

$$\text{tag}\,\beta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{q_1 q_2}{m g \rho^2} = 9.10^9\,\frac{\frac{16.10^{-7}}{3}\cdot 2\,\frac{16.10^{-7}}{3}}{10^{-3}\cdot 9{,}8\,\rho^2} = \frac{0{,}5224}{\rho^2} \Rightarrow \quad \rho = \frac{0{,}7228}{\sqrt{\text{tag}\,\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = 1 + 2\,\text{sen}\,\beta \quad \Rightarrow \qquad 1 + 2\,\text{sen}\,\beta = \frac{0{,}7228}{\sqrt{\text{tag}\,\beta}} \quad (5)$$

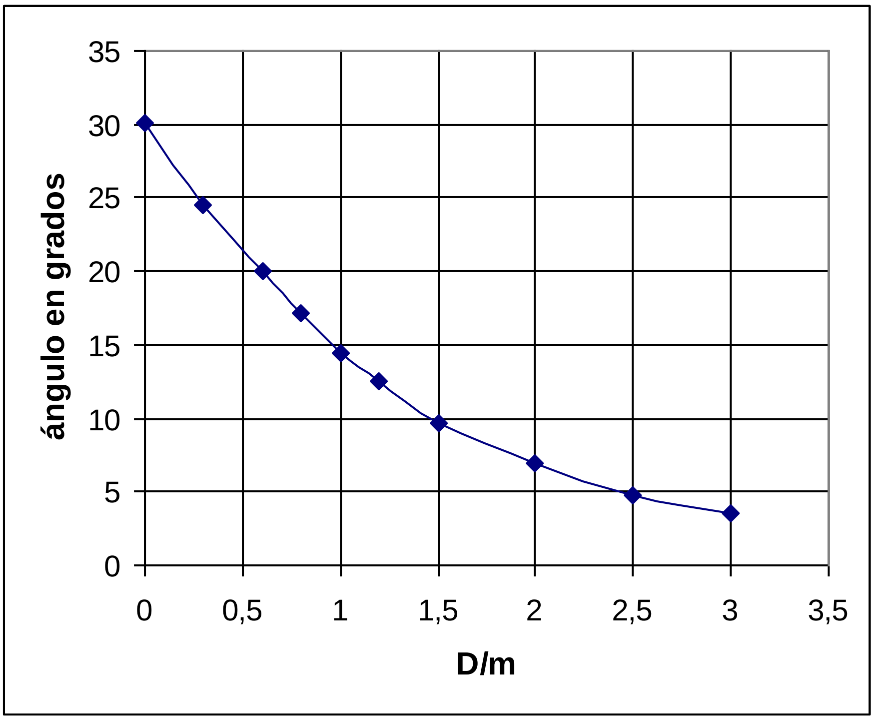
La ecuación (%) es semejante a la (3) y se resuelve por tanteo: β=13,6º

c) Las ecuaciones son las mismas que en el apartado a) salvo que aquí D es variable

$$d = D + 2\,\text{sen}\,\alpha \;\; ; \;\; \text{tag}\,\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{m g d^2} = \frac{0{,}5878}{d^2} \Rightarrow \quad d = \frac{0{,}7667}{\sqrt{\text{tag}\,\alpha}} \Rightarrow$$

$$D + 2\,\text{sen}\,\alpha = \frac{0{,}7667}{\sqrt{\text{tag}\,\alpha}}$$

Damos un valor a D y en la hoja de cálculo representamos el primer miembro de la ecuación para distintos valores de α, hacemos lo mismo con el segundo miembro. Las dos graficas se cortan y ese punto es la solución de α para el valor dado a D. El procedimiento se repite para todos los valores de D.



456.- Un muón de masa en reposo m_μ se desintegra en un electrón de masa en reposo m_e y dos neutrinos (se consideran sin masa) mediante la reacción

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

a) ¿En qué dirección deben viajar los neutrinos cuando el electrón adquiere la máxima energía?
b) Calcular esa energía máxima del electrón y su momento.

a) El proceso se verifica con conservación del momento, como el muón se encuentra en reposo, se debe cumplir que

$$\vec{p}_e + \vec{p}_{\nu e} + \vec{p}_{\nu\mu} = 0$$

Si el electrón ha de tener la máxima energía eso conlleva que también tenga el módulo máximo del momento, lo cual supone que los neutrinos se muevan en una dirección y el electrón en la misma dirección pero en sentido contrario; podemos escribir que en módulo se cumple que

$$p_e = p_{\nu e} + p_{\nu\mu}$$

La relación entre las energías y los momentos

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = p_e^2 c^2 \Rightarrow p_e = \sqrt{\frac{E_e^2 - m_e^2 c^4}{c^2}} \quad ; \quad p_{\nu e} = \frac{E_{\nu e}}{c} \quad ; \quad p_{\nu\mu} = \frac{E_{\nu\mu}}{c} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E_e^2 - m_e^2 c^4}{c^2}} = \frac{E_{\nu e}}{c} + \frac{E_{\nu\mu}}{c} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} = E_{\mu e} + E_{\nu\mu} \quad (1)$$

El principio de conservación de la energía nos permite escribir

$$m_\mu c^2 = E_{\nu e} + E_{\nu\mu} + E_e \quad \Rightarrow \quad E_{\nu e} + E_{\nu\mu} = m_\mu c^2 - E_e$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} = m_\mu c^2 - E_e \quad \Rightarrow \quad E_e^2 - m_e^2 c^4 = m_\mu^2 c^4 + E_e^2 - 2 E_e m_\mu c^2 \Rightarrow$$

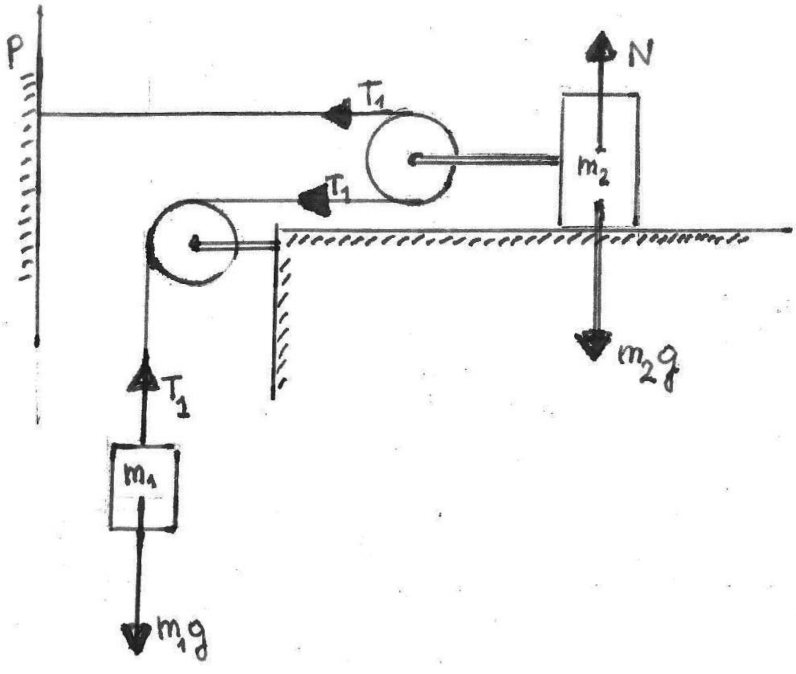
$$\Rightarrow \quad E_e = \frac{m_\mu^2 c^4 + m_e^2 c^4}{2 m_\mu c^2} = c^2 \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2 m_\mu}$$

Para calcular el momento del electrón nos vamos a la ecuación

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = p_e^2 c^2 \Rightarrow \quad p_e = \frac{\sqrt{\left[c^2 \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2 m_\mu}\right]^2 - m_e^2 c^4}}{c} = c\sqrt{\frac{m_\mu^4 + m_e^4 + 2 m_\mu^2 \cdot m_e^2}{4 m_\mu^2} - m_e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_e = c\sqrt{\frac{m_\mu^4 + m_e^4 - 2 m_\mu^2 \cdot m_e^2}{4 m_\mu^2}} = \frac{c}{2 m_\mu}\sqrt{\left(m_\mu^2 - m_e^2\right)^2} = \frac{c\left(m_\mu^2 - m_e^2\right)}{2 m_\mu}$$

457.- En el sistema de la figura la cuerda está unida a una pared P. Calcular la aceleración de la masa m₁ cuando el sistema se deje en libertad. Se supone, que no hay rozamientos, que las poleas carecen de masa, y que la cuerda es inextensible.



En la figura están representadas las fuerzas que actúan sobre las masas. Aplicamos la segunda ley de Newton

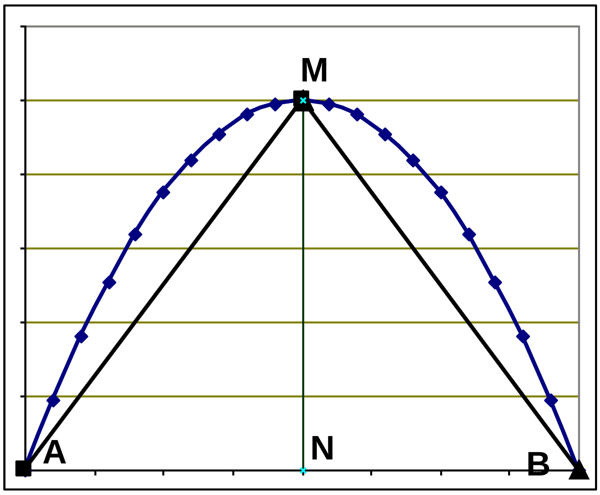
$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad ; \quad 2T_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \quad m_1 g - \frac{m_2 a_2}{2} = m_1 a_1$$

Teniendo en cuenta que la cuerda es inextensible cuando la masa m_1 desciende una longitud λ, las dos ramas paralelas de la cuerda también se desplazan en total λ, pero $\frac{\lambda}{2}$ en la cuerda superior y $\frac{\lambda}{2}$ en la inferior, en consecuencia, cuando m_1 se desplaza λ, m_2 solamente se desplaza $\frac{\lambda}{2}$ y como ambas masas están ligadas la aceleración $a_1 = 2\ a_2$

$$m_1 g - \frac{m_2 \frac{a_1}{2}}{2} = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2 \frac{a_1}{2}}{2} + m_1 a_1 = m_1 g \quad \Rightarrow \quad a_1\left(m_1 + \frac{m_2}{4}\right) = m_1 g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{m_2}{4}} = \frac{4\, m_1 g}{4\, m_1 + m_2}$$

458.- Se lanza un cuerpo con velocidad inicial v_o y ángulo θ con la horizontal. En la figura inferior se ha dibujado un boceto de una trayectoria y sobre ella se ha dibujado el triángulo AMB, siendo M el punto más alto de la trayectoria.



a) Calcular el ángulo θ que hace al área del triángulo AMB máxima.

b) Dibuja la gráfica del área frente a los diversos valores del ángulo, para $v_o = 10$ m/s

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = v_o (\cos\theta)\, t \quad ; \quad y = v_o (\operatorname{sen}\theta)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Calculamos el alcance máximo que en el boceto corresponde al segmento AB. Para ello hacemos y=0

$$0 = v_0 (\operatorname{sen}\theta)\ t - \frac{1}{2} g t^2, \text{una solución es } t = 0 \text{ que corresponde al punto A y la otra :}$$

$$v_o \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} g t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{AB} = \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad AB = v_o \cos\theta \cdot \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

Para calcular MN el tiempo que tarda el móvil en alcanzar el punto más alto de la trayectoria es la mitad de lo que tarda en alcanzar el punto B.

$$MN = v_0 \text{sen}\,\theta \cdot \frac{v_0 \text{sen}\,\theta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_o^2\, \text{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_o^2\, \text{sen}^2\theta}{g}$$

El área del triángulo AMB es:

$$\text{Área} = A = \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{\left(v_o^2 \text{sen}2\theta\right) \cdot \left(v_o^2\, \text{sen}^2\theta\right)}{4g^2} = \frac{v_o^4}{4g^2} \text{sen}2\theta \cdot \text{sen}^2\theta \quad (1)$$

Para calcular el ángulo θ que hace máxima el área del triángulo derivamos la función (1) con respecto a θ e igualamos a cero

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{v_o^4}{4g^2}\left(\text{sen}\,2\theta \cdot 2\,\text{sen}\,\theta \cos\theta + \text{sen}^2\theta \cdot 2 \cdot \cos 2\theta\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,2\theta \cdot 2 \cdot \text{sen}\,\theta \cos\theta = -\text{sen}^2\theta \cdot \cos 2\theta \Rightarrow$$

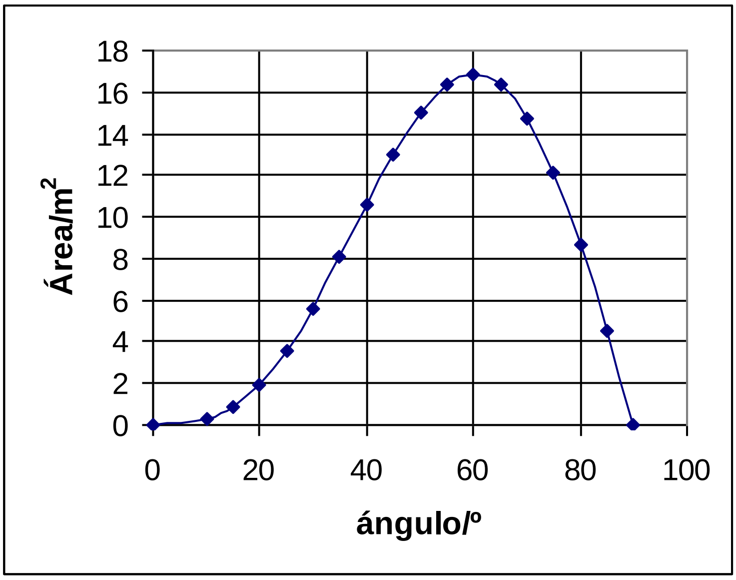
$$\Rightarrow \frac{\text{sen}^2\, 2\theta}{\text{sen}^2\theta} = -\cos 2\theta \quad \Rightarrow \frac{\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}\,\theta} = \sqrt{-\cos 2\theta} = \sqrt{-2\left(2\cos^2\theta - 1\right)} = \sqrt{2 - 4\cos^2\theta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos\theta = \sqrt{2 - 4\cos^2\theta} \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2\theta = 2 - 4\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^o$$

b) Sustituyendo el valor de la velocidad y de g en la ecuación (1) obtenemos

$$A = 26 \cdot \text{sen}\,2\theta \cdot \text{sen}^2\theta$$

La representación gráfica de la ecuación anterior es:


Área/m^2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0
20
40
60
80
100
ángulo/º