494.- Una caja tiene una tapa rectangular de $5\times 7\,cm$ y una masa de 25 gramos. La tapa está articulada por uno de los lados más corto y tiene arrolladas 30 espiaras en torno a sus lados. Se coloca la caja en el seno de un campo magnético de 0,05 T contenido en el plano de la tapa y perpendicular a los goznes de la articulación. Calcular la intensidad de la corriente que circula por las espiras que es capaz de levantar la tapa

Propuesto en el libro Corrientes , Campos y Partículas . F.Bitter. Editorial Reverté

En la figura 1 se considera que la tapa de la caja está sobre el plano XY y los goznes se encuentran sobre el eje Y. El campo magnético está en el plano XY y apunta en el sentido positivo del eje X .La intensidad de la corriente vista desde el eje Z positivo es semejante al movimiento de las agujas del reloj.(sentido ABCD).

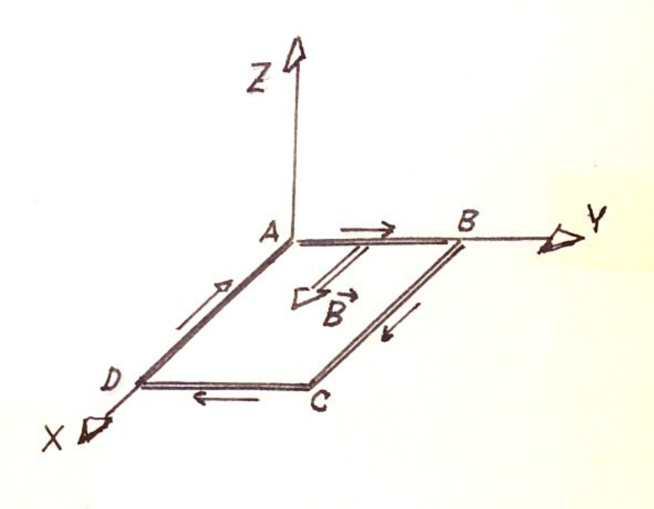


Fig.1

Expresamos las magnitudes que aparecen en la figura en función de los ejes unitarios.

$$\vec{B} = B\,\vec{i} \quad ; \quad \vec{l}_{AB} = AB\cdot\vec{j} \quad ; \quad \vec{l}_{BC} = BC\cdot\vec{i} \quad ; \quad \vec{l}_{CD} = -CD\cdot\vec{j} \quad ; \quad \vec{l}_{DA} = -DA\cdot\vec{i}$$

Consideramos una espira y calculamos los vectores fuerza que actúan sobre ella

$$\vec{F}_{AB} = I\vec{l}_{AB}\times\vec{B} = I\cdot AB\cdot B\cdot(\vec{j}\times\vec{i}) = I\cdot AB\cdot B\cdot(-\vec{k})$$

$$\vec{F}_{BC} = I\vec{l}_{BC}\times\vec{B} = I\cdot BC\cdot B\cdot(\vec{i}\times\vec{i}) = 0$$

$$\vec{F}_{CD} = I\vec{l}_{CD}\times\vec{B} = I\cdot CD\cdot B\cdot(-\vec{j}\times\vec{i}) = I\cdot AB\cdot B\cdot(\vec{k})$$

$$\vec{F}_{DA} = I\vec{l}_{DA}\times\vec{B} = I\cdot DA\cdot B\cdot(-\vec{i}\times\vec{i}) = 0$$

El peso de la tapa actúa en su centro geométrico $\vec{P} = m\,g\,(-\vec{k})$.

Calculamos los momentos de las fuerzas sobre el centro de AB. La fuerza $\vec{F}_{AB}$ no ejerce momento pues está aplicada sobre el lado AB.

$$\vec{M}_P = \frac{BC}{2}(\vec{i}) \times mg(-\vec{k}) = \frac{BC \cdot mg}{2}(\vec{j})$$

$$\vec{M}_{F_{CD}} = BC(\vec{i}) \times I \cdot AB \cdot B \cdot (\vec{k}) = I \cdot BC \cdot AB \cdot B \cdot \left(-\vec{j}\right)$$

El momento que crea la corriente es n=30 veces superior al momento de una sola espira. Igualamos los módulos de los momentos

$$\frac{BC \cdot mg}{2} = n \cdot I \cdot BC \cdot AB \cdot B \quad \Rightarrow \qquad I = \frac{mg}{2 \cdot n \cdot AB \cdot B} = \frac{25.10^{-3} \cdot 9{,}8}{2 \cdot 30 \cdot 5.10^{-2} \cdot 0{,}05} = 1{,}63\,A$$

Cuando la corriente supere al valor calculado la tapa podrá levantarse.

495.- Una partícula de masa m se desplaza siguiendo una recta partiendo del reposo en t=0 bajo la acción de una fuerza

$$F_1 = \frac{F_o\, t}{t_o} \;\; ; \;\; F_o \; y \; t_o \;\; \text{son constantes}$$

En t=to se anula bruscamente esa fuerza y empieza a actuar una nueva

$$F_2 = -F_o \left[\frac{(t - t_o)^2}{t_o^2} \right]$$

¿Dónde y cuándo la partícula empezará a volver al origen?

Propuesto en el libro: Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas. U. Ingard y W.L. Kraushaar. Editorial Reverté.

En la primera parte del problema calculamos la velocidad y desplazamiento de la masa m desde t=0 a t $=t_o$. Según la segunda ley de Newton

$$F_1 = \frac{F_o t}{t_o} = m\frac{dv}{dt} \;\; ; \;\; \int \frac{F_o t}{m\, t_o} = \int dv \;\; \Rightarrow \;\; \frac{F_o t^2}{2 m\, t_o} = v + Cte$$

Cuando t=0 la velocidad es cero y por consiguiente, Cte =0

El desplazamiento de la masa m es:

$$\frac{F_o t^2}{2 m\, t_o} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{F_o t^2}{2 m\, t_o} dt = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{F_o t^3}{6 m\, t_o} = x + Cte$$

Cuando t=0 la posición es cero y por consiguiente, Cte =0.

La velocidad y la posición de la partícula cuando t = t_o, esto es, cuando desaparece F_1 y aparece F_2

$$v(t_o) = \frac{F_o t_o^2}{2 m\, t_o} = \frac{F_o t_o}{2 m} \quad ; \quad x(t_o) = \frac{F_o\, t_o^3}{6 m\, t_o} = \frac{F_o\, t_o^2}{6 m}$$

En la segunda parte ha cesado F_1 y ha aparecido la fuerza F_2 . Aplicamos la segunda ley de Newton

$$F_2 = -\frac{F_o}{t_o^2}(t - t_o)^2 = m\frac{dv}{dt} \;\; \Rightarrow \;\; -\frac{F_o}{m t_o^2}\int (t - t_o)^2 dt = \int dv \;\; \Rightarrow \;\; -\frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t - t_o)^3}{3} = v + Cte$$

Cuando t=t_o , la velocidad de la masa m es: $v(t_o) = \frac{F_o\, t_o}{2\, m}$ y por consiguiente la constante vale $Cte = -\frac{F_o\, t_o}{2m}$

La velocidad de la masa m es:

$$v = \frac{F_o\, t_o}{2m} - \frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t-t_o)^3}{3}$$

El punto de vuelta ocurrirá cuando v=0, a partir de ahí la velocidad es negativa.

$$0 = \frac{F_o t_o}{2m} - \frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t-t_o)^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_o}{2} = \frac{(t-t_o)^3}{3t_o^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}t_o^3 = (t-t_o)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t_o = t - t_o \quad \Rightarrow \qquad t = t_o\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right] = t_o(1+k)$$

Calculamos la posición de m cuando su velocidad se ha anulado

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_o t_o}{2m} - \frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t-t_o)^3}{3} \quad \Rightarrow \int dx = \int\left[\frac{F_o t_o}{2m} - \frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t-t_o)^3}{3}\right]dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{F_o t_o}{2m}t - \frac{F_o}{m t_o^2}\frac{(t-t_o)^4}{12} + Cte$$

Cuando t=t$_o$, x vale $x(t_o) = \frac{F_o\, t_o^2}{6m}$, luego $Cte = \frac{F_o t_o^2}{6m} - \frac{F_o t_o^2}{2m} = -\frac{F_o t_o^2}{3m}$

$$x = \frac{F_o t_o}{2m}t - \frac{F_o}{t_o^2}\frac{(t-t_o)^4}{12m} - \frac{F_o t_o^2}{3m}$$

Sustituimos la variable t por el tiempo $t = t_o(1+k)$

$$x(t_o) = \frac{F_o t_o}{2m}[t_o(1+k)] - \frac{F_o}{t_o^2}\frac{(t_o + t_o k - t_o)^4}{12m} - \frac{F_o t_o^2}{3m} = \frac{F_o t_o^2}{2m} + \frac{F_o t_o^2}{2m}k - \frac{F_o t_o^2}{12\, m}k^4 - \frac{F_o t_o^2}{3m}$$

$$x(t_o) = \frac{F_o t_o^2}{6m} + \frac{F_o t_o^2}{2m}k\left(1 - \frac{k^3}{6}\right)$$

$$\text{como}\ \left(1-\frac{k^3}{6}\right)=\left[1-\frac{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3}{6}\right]=1-\frac{3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

Resulta

$$x(t_o)=\frac{F_o t_o^2}{6m}+\frac{F_o t_o^2}{2m}k\frac{3}{4}=\frac{F_o t_o^2}{6m}+\frac{F_o t_o^2}{2m}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{3}{4}=\frac{F_o t_o^2}{2m}\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Revisar este problema cuidadosamente.. El resultado del libro para el tiempo es el que se ha obtenido pero difiere para la posición que el libro da como resultado

$$x(t_o)=\frac{F_o t_o^2}{2m}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

496.- Supongamos que existe un planeta de masa M y radio R, rodeado por una atmosfera de densidad constante, que consiste en un gas de masa molar μ. Determinar la temperatura de la atmósfera en la superficie del planeta si la altura de la atmosfera es h y h<<R.

Olimpiadas de Moscú

La presión en la superficie del planeta es $p = \rho g\ h$, siendo ρ la densidad del gas y g la intensidad del campo gravitatorio creado por el planeta. En principio g no es constante, depende la altura, pero como en el enunciado nos dicen que la altura h es mucho menor que R, la consideramos constante y su valor numérico es:

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Siendo G la constante de gravitación universal

$$p = \rho G\frac{M}{r^2}h$$

Suponemos que el gas es ideal, aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$pV = nRT \ \Rightarrow\ p = \frac{n}{V}RT = \frac{m}{\mu V}RT \ \Rightarrow\ p = \frac{\rho}{\mu}RT \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \rho G\frac{M}{r^2}h = \frac{\rho}{\mu}RT \ \Rightarrow\ T = \frac{GM\mu h}{r^2R}$$

497.-Dos cuerpos de la misma masa m y la misma capacidad calorífica c, uno a la temperatura T_1 y el otro a T_2 siendo $T_1>T_2$ se ponen en contacto aislados del medio exterior, una vez alcanzado el equilibrio determinar cómo varía de entropía del proceso.

Designamos con T la temperatura de equilibrio .El calor ganado por el de menor temperatura es igual al perdido por el de mayor temperatura

$$mc(T_1 - T) = mc(T - T_2) \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 = 2T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La variación de entropía es

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T} \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^{T} \frac{dQ_2}{T} = \int_{T_1}^{T} \frac{mc\,dT}{T} + \int_{T_2}^{T} \frac{mc\,dT}{T} = mc\ln T\Big|_{T_1}^{T} + mc\ln T\Big|_{T_2}^{T} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = mc\ln\frac{T}{T_1} + mc\ln\frac{T}{T_2} = mc(\ln T - \ln T_1 + \ln T - \ln T_2) =$$

$$= mc[2\ln T - (\ln T_1 + \ln T_2)] = mc\left(\ln\frac{T^2}{T_1 T_2}\right) = mc\ln\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}$$

Son positivos m y c, por tanto, la variación de entropía está condicionada por el valor del logaritmo. Si

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1$$

El logaritmo es positivo y por consiguiente $\Delta S>0$, la entropía aumenta en el proceso

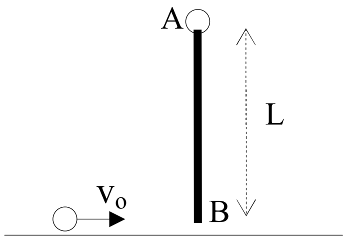
$$\frac{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2}{4T_1T_2} > 1 \quad \Rightarrow \quad T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 > 4T_1T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T_1 - T_2)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 > T_2$$

De acuerdo con el enunciado $T_1>T_2$, luego ΔS es positivo, esto es, el proceso transcurre con aumento de entropía.

498.-Una esfera de m= 1,5 kg se desplaza con velocidad horizontal v_o=4 m/s y choca con el extremo inferior B de una barra AB delgada de L=1,8 m de longitud y masa M= 6 kg. La barra se encuentra suspendida por A y antes del choque se encuentra en reposo. El coeficiente de restitución entre la barra y la esfera es 0,7 . Determinar la velocidad angular de la barra y la velocidad lineal de la esfera inmediatamente después del choque.

Momento de inercia de la barra respecto del CM: $I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$



Consideramos a la barra y a la esfera como un único sistema. Durante el impacto aparecen en la articulación una fuerza de reacción y el peso de la barra.. Los momentos iniciales más los impulsos de las fuerzas respecto de A equivalen a los momentos lineales finales.

Designamos con v_{CM} la velocidad del centro de masas de la barra y con ω la velocidad angular antes del choque. Ambas magnitudes son nulas puesto que la barra se encuentra en reposo. Con v´ la velocidad del centro de masas de la barra inmediatamente después del choque con ω´ la velocidad angular de la barra inmediatamente después del choque y con v_e' la velocidad de la esfera inmediatamente después del choque

Momentos iniciales (antes del choque) $m v_0 L + 0$

Momentos inmediatos después del choque $m v_e' L + M v' \frac{L}{2} + I_A \omega'$

I_A es el momento de inercia de la barra respecto de A y según el teorema de Steiner

$$I_A = I_{CM} + M\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + \frac{M L^2}{4} = \frac{M L^2}{3}$$

Como la barra está articulada en el extremo A **,** $v' = \omega' \frac{L}{2}$

$$m\,v_o L = m\,v_e^{'}\,L + M\ \omega'\ \frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2} + \frac{M\,L^2}{3}\omega' \Rightarrow m\,v_o = m\,v_e^{'} + M\ \omega'\ \frac{L}{4}\cdot + \frac{M\,L}{3}\omega' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}5\ \cdot 4 = 1{,}5\,v_e^{'} + 6\cdot\omega'\cdot\frac{1{,}8}{4} + 6\cdot\frac{1{,}8}{3}\cdot\omega' \quad \Rightarrow \quad 6 = 1{,}5\,v_e^{'} + 6{,}3\,\omega' \quad (1)$$

Aplicamos el coeficiente de restitución

$$v_B^{'} - v_e^{'} = e\,(v_o - v_B) \Rightarrow v_B^{'} - v_e^{'} = 0{,}7\cdot 4 - 0{,}7\cdot 0$$

Además como la barra sigue articulada en A, $v_B^{'} = \omega' L = 1{,}8\,\omega' \Rightarrow v_e^{''} = 1{,}8\,\omega' - 2{,}8$
Sustituyendo en (1)

$$6 = 1{,}5\ (1{,}8\,\omega' - 2{,}8) + 6{,}3\,\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = 1{,}13\ \frac{rad}{s} \Rightarrow \quad v_e^{'} = 1{,}8\cdot 1{,}13 - 2{,}8 = -0{,}77\,\frac{m}{s}$$