PROBLEMAS VARIADOS 6-2018

448.- El ciclo representado en la figura se denomina ideal de Sterling y consta de dos isotermas y dos isocoras.

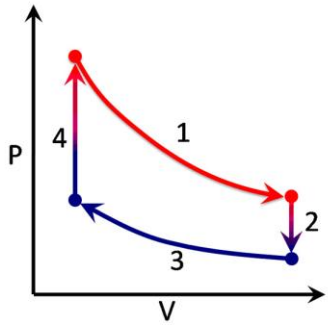


Fig.3

Calcular el rendimiento del mencionado ciclo. El ciclo lo realiza un mol de gas ideal.

La temperatura de la isoterma 1 la designamos con T_C, esto es, la temperatura del foco caliente. La temperatura de la isoterma 3 se designa con T_F, temperatura del foco frío. Las presiones y volúmenes son:

$$(P_1,V_1) \quad ; \quad (P_2,V_2) \quad ; \quad (P_3,V_3) \quad ; \quad (P_4,V_4)$$

Transformación isoterma (1) $\quad \Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q + W \Rightarrow W = -Q$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_C}{V} dV = -R\,T_C \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Como $V_2 > V_1$, el trabajo es negativo, es realizado por el gas contra el ambiente

El calor $Q_1 = R\,T_C \ln\frac{V_2}{V_1}$ es positivo luego lo absorbe el sistema desde la fuente caliente.

Transformación isocora (2) $\quad \Delta U = Q + W \Rightarrow W = 0; \quad \Delta U = Q$

El trabajo es nulo. El calor $Q_2 = C_V\left(T_F - T_C\right)$ como $T_F < T_C$, Q_2 es negativo, el gas cede calor al ambiente.

Transformación isoterma (3) $\Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q + W \Rightarrow W = -Q$

$$W = -\int_{V_3}^{V_4} P dV = -\int_{V_3}^{V_4} \frac{RT_F}{V} dV = -R\,T_F \ln\frac{V_4}{V_3} = R\,T_F \ln\frac{V_3}{V_4}$$

Como $V_4 < V_3$, el trabajo es positivo y es realizado por el exterior sobre el gas.

El calor $Q_3 = -R\,T_F \ln\frac{V_3}{V_4}$ es negativo luego lo cede el sistema

Transformación isocora (4) $\Delta U = Q + W \Rightarrow W = 0;\ \Delta U = Q$

El trabajo es nulo. El calor $Q_4 = C_V(T_C - T_F)$ como $T_C > T_F$, Q_4 es positivo, el gas absorbe calor .

El rendimiento es el trabajo efectuado dividido por el calor absorbido en el ciclo

$$\eta = \frac{\left| -R\,T_C \ln\frac{V_2}{V_1} + R\,T_F \ln\frac{V_3}{V_4} \right|}{R\,T_C \ln\frac{V_2}{V_1} + C_V(T_C - T_F)}$$

El volumen máximo en el proceso es $V_2 = V_3 = V_M$ y el volumen mínimo $V_4 = V_1 = V_m$.. El rendimiento se expresa

$$\eta = \frac{\left| -R\,T_C \ln\frac{V_M}{V_m}\ R\,T_F \ln\frac{V_M}{V_m} \right|}{R\,T_C \ln\frac{V_M}{V_m} + C_V(T_C - T_F)} = \frac{R \ln\frac{V_M}{V_m}(T_C - T_F)}{R\,T_C \ln\frac{V_M}{V_m} + C_V(T_C - T_F)}$$

El rendimiento del ciclo se mejora si parte del calor que se emite en la isocora 2 se recupera y se añade al calor que se suministra en la isocora 4.

Designamos con f el factor de recuperación del calor de la isocora 2, siendo $f<1$

Calor recuperado = $Q' = f\,Q_2 = f \cdot C_V(T_F - T_C)$

El término del paréntesis es negativo porque significaba calor emitido por el sistema, pero ahora vamos a aportarlo al sistema y por tanto debemos darle signo positivo

Calor aportado al sistema $Q_1 = f \cdot C_V(T_C - T_F)$

Calor suministrado en la isocora 4 $Q_4 = C_V(T_C - T_F)$, como recuperamos una cierta cantidad de calor Q_1 debemos suministrar menos que si no se recuperase

$$Q_4 = C_V\left(T_C - T_F\right) = \text{recuperado} + \text{aportado} = f \cdot C_V\left(T_F - T_C\right) + Q'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q'' = \left(1 - f\right)C_V\left(T_C - T_F\right)$$

Si f es cero, lo que significa que no se recupera nada de calor entonces Q´´ es igual a Q_4, pero si f es un número positivo se aporta menos calor y se mejora el rendimiento

$$\eta = \frac{R \ln \frac{V_M}{V_m}\left(T_C - T_F\right)}{R\, T_C \ln \frac{V_M}{V_m} + \left(1 - f\right)C_V\left(T_C - T_F\right)}$$

A medida que f se acerca al valor unidad, esto es, se recupera casi íntegramente el calor de la isocora 2, el rendimiento se acerca al del ciclo de Carnot.

449.- Una bicicleta se mueve por un suelo horizontal con velocidad constante. El centro de la rueda delantera se mueve con velocidad v = 5 m/s y el radio es R = 0,5 m. Un trozo de barro adherido a la rueda se desprende de ella y se observa que adquiere la mayor altura posible sobre el suelo.
a) Determinar la altura que alcanza.
b) Representar las alturas máximas frente al ángulo.

a) De forma cualitativa deducimos de qué parte de la rueda se desprende el trozo de barro. Para ello debemos tener presente que la velocidad del trozo de barro respecto del suelo es la suma vectorial de la velocidad del centro de la rueda v_o más la velocidad tangencial v_T

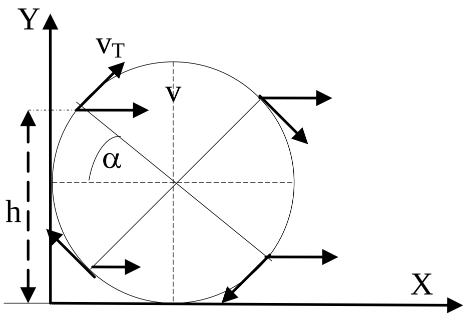


Fig.1

Si se observa la figura 1 el trozo de barro no puede salir ni del segundo ni del tercer cuadrante ya que la resultante de las dos velocidades no es mayor que la resultante que se obtiene en primero y cuarto cuadrante. El primero hay que descartarlo pues la resultante de las velocidades apunta hacia el suelo. El trozo de barro debe abandonar la rueda desde el cuarto cuadrante. El módulo de la velocidad tangencial es igual al módulo de la velocidad v_o.

Las velocidades iniciales sobre los ejes coordenados del trozo de barro son:

$$\text{EjeX} \;;\; v_X = v_o + v_o \operatorname{sen}\alpha = v_o\,(1+\operatorname{sen}\alpha) \qquad \text{Eje Y};\; v_Y = v_o \cos\alpha$$

Las velocidades en función del tiempo

$$v_x = v_o\,(1+\operatorname{sen}\alpha)t \;\;;\;\; v_y = v_o \cos\alpha - g\,t$$

Las posiciones iniciales sobre los ejes del trozo de barro son:

$$x_i = R - R\cos\alpha \;\;;\;\; y_i = h = R + R\operatorname{sen}\alpha$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = (R - R\cos\alpha) + v_o\,(1+\operatorname{sen}\alpha)t \;\;;\;\; y = (R + R\operatorname{sen}\alpha) + v_o\,(\cos\alpha)t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

La máxima altura se alcanza cuando la componente v_y sea cero. Despejamos t de la ecuación v_y y sustituimos el valor en la coordenada y.

$$y = R + R\operatorname{sen}\alpha + v_o\cos\alpha\frac{v_o\cos\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_o\cos\alpha}{g}\right)^2 = R + R\operatorname{sen}\alpha + \frac{v_o^2\cos^2\alpha}{2g} \quad (1)$$

Esta ecuación nos da el valor de las alturas máximas para los ángulos comprendidos entre cero y noventa grados. Dentro de esas alturas máximas hay una que es la mayor de todas y para calcularla derivamos y respecto de α e igualamos a cero.

$$\frac{dy}{d\alpha} = R\cos\alpha + \frac{v_o^2}{2g}2\cos\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; R = \frac{v_o^2}{g}\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \;\operatorname{sen}\alpha = \frac{R\,g}{v_o^2}\,(2)$$

Sustituyendo en y

$$Y_{máximo} = R + R^2\frac{g}{v_o^2} + \frac{v_o^2}{2g}\left(1 - \frac{R^2g^2}{v_o^4}\right) = R + R^2\frac{g}{v_o^2} + \frac{v_o^2}{2g} - \frac{R^2g}{2v_o^2} = R + \frac{v_o^2}{2g} + \frac{R^2g}{2v_o^2} \Rightarrow$$

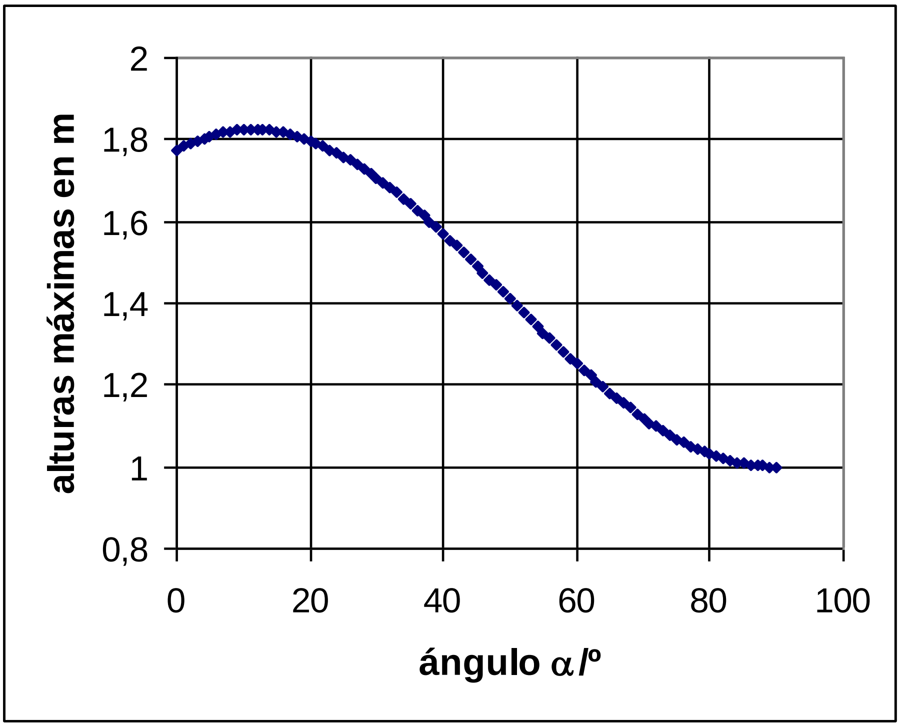
$$\Rightarrow Y_{máximo} = 0,5 + \frac{5^2}{2\cdot 9,8} + \frac{0,5^2\cdot 9,8}{2\cdot 5^2} = 1,82\,\mathrm{m}$$

El valor de α que da lugar a la mayor de las máximas alturas lo obtenemos a partir de la ecuación (2)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{0,5\cdot 9,8}{5^2} = 0,196 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 11,3^{o}$$

b) Sustituimos los valores numéricos en la ecuación (1)

$$y = 0,5 + 0,5\ \operatorname{sen}\alpha + \frac{5^2\cdot\cos^2\alpha}{2\cdot 9,8} = 0,5 + 0,5\ \operatorname{sen}\alpha + 1,2755\ \cos^2\alpha$$



450.- Un bastidor está formado por un rectángulo de lados h y b respectivamente y una diagonal OA y se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal. La masa de este conjunto es m. En la parte superior de la diagonal OA está situada una masa m que se considera puntual.
Desde el punto A se deja en libertad la masa puntual sin velocidad inicial.
a) Calcular el tiempo que emplea la citada masa en alcanzar la mitad de la diagonal OA.
b) Calcular la aceleración del bastidor respecto de un sistema inercial ligado al suelo
c) Calcular la velocidad del bastidor cuando m llegue a la mitad de OA.
Se desprecian todos los rozamientos.

Consideramos dos sistemas de referencia: uno el inercial OXY ligado al suelo y otro el O´X´Y´ no inercial y ligado a la diagonal OA..

En la figura 1 se representa el bastidor y la masa puntual en el instante t=0 y en un instante posterior t=t., siendo t el tiempo que emplea la masa m en recorrer la mitad de OA y es el mismo tiempo que emplea el sistema en desplazarse la distancia L sobre el eje X. Designamos con x_B la ordenada del centro de masas del sistema. y la longitud OA =D.

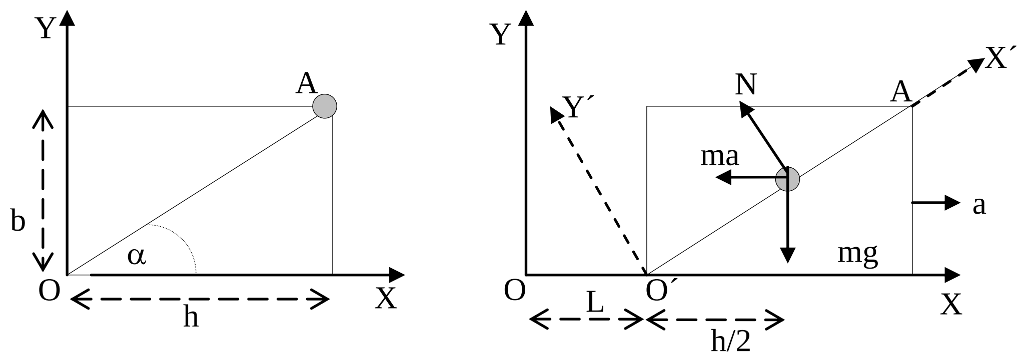


Fig.1

El observador ubicado en el sistema inercial (OXY) determina que las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema son los pesos del bastidor y de la masa m (verticales y hacia abajo) y la fuerza con que el suelo empuja en el centro de masas del sistema vertical y hacia arriba y que no existen fuerzas exteriores en sentido horizontal, al no existir esas fuerzas horizontales la coordenada x_{CM} se mantiene constante, esto es, no varia al pasar de la posición t=0 a la t=t., de esto se deduce.

$$x_{CM}(t=0)=\frac{m\,x_B+m\,h}{2\,m}\quad;\quad x_{CM}(t=t)=\frac{m\,(L+x_B)+m\left(L+\frac{h}{2}\right)}{2m}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x_{CM}(t=0)=x_{CM}(t=t)\quad\Rightarrow\quad x_B+h=L+x_B+L+\frac{h}{2}\quad\Rightarrow\quad L=\frac{h}{4}$$

Dado que en el tiempo t=0 , la velocidad del sistema es cero, el observador del sistema inercial puede escribir

$$L=\frac{h}{4}=\frac{1}{2}a\,t^2\Rightarrow\quad t^2=\frac{h}{2\,a}\quad(1)$$

El observador ligado al sistema no inercial (O´X´Y´) que sabe que se encuentra en un sistema acelerado y para que las leyes de la mecánica sean válidas, a las fuerzas N (interacción de m con la diagonal) y peso (interacción de m con la Tierra) ha de incluir una fuerza denominada de inercia y de valor ma y sentido contrario a la aceleración del sistema..este observador también sabe que en la Mecánica clásica el tiempo medido por el observador inercial t (tiempo que emplea el sistema en recorrer la distancia L) es el mismo que el tiempo que él mide y que emplea la masa m en recorrer la distancia OA/2. Proyecta las fuerzas sobre el eje O´X´ y concluye

$$m\,g\,\mathrm{sen}\,\alpha+m\,a\cos\alpha=m\,a_{x'}\Rightarrow\quad a_{x'}=g\,\mathrm{sen}\,\alpha+a\cos\alpha\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{D}{2}=\frac{1}{2}(g\,\mathrm{sen}\,\alpha+a\cos\alpha)t^2\Rightarrow\quad D=\left(g\frac{b}{D}+a\frac{h}{D}\right)t^2\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D^2=(g\,b+a\,h)t^2\Rightarrow\quad t^2=\frac{D^2}{g\,b+a\,h}\quad(2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{h}{2\,a}=\frac{D^2}{g\,b+a\,h}\Rightarrow g\,b\,h+a\,h^2=2a\,D^2\Rightarrow\quad a=\frac{g\,b\,h}{2\,D^2-h^2}=\frac{g\,b\,h}{2\left(b^2+h^2\right)-h^2}=\frac{g\,b\,h}{2\,b^2+h^2}$$

Sustituyendo la aceleración en (1)

$$t=\sqrt{\frac{h}{2a}}=\sqrt{\frac{h\cdot\left(2\,b^2+h^2\right)}{2\,g\,b\,h}}=\sqrt{\frac{2\,b^2+h^2}{2\,g\,b}}$$

La velocidad del bastidor tiene la dirección de la aceleración y solamente componente sobre el je X

$$v_B=a\,t=\frac{g\,b\,h}{2b^2+h^2}\sqrt{\frac{2b^2+h^2}{2\,g\,b}}=\sqrt{\frac{g^2b^2h^2\left(2b^2+h^2\right)}{2\,g\,b\left(2b^2+h^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{g\,b\,h^2}{2\left(2b^2+h^2\right)}}$$

451.- A una fuente de corriente alterna se unen de uno en uno tres dispositivos, primero una resistencia, segundo una autoinducción (se quita la resistencia) y tercero un condensador (se quita la autoinducción). Las intensidades de las corrientes son 4 A , 2 A y 1 A respectivamente. Ahora se colocan en serie estos tres dispositivos y se unen a la misma fuente de alimentación a) Determinar la intensidad de la corriente b) La diferencia de fase entre esta intensidad y el voltaje de la fuente.

a) Designamos con V el voltaje eficaz de la fuente de corriente alterna. Aplicamos la ley de Ohm

$$I_R = \frac{V}{R} \quad ; \quad I_L = \frac{V}{L\omega} \quad ; \quad I_C = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}}$$

Al colocar los tres dispositivos en serie la impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{V^2}{16} + \left(\frac{V}{2} - \frac{V}{1}\right)^2} = \sqrt{\frac{V^2}{16} + \frac{V^2}{4}} = \frac{V\sqrt{5}}{4}$$

La intensidad que circula por el circuito en serie es:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\frac{V\sqrt{5}}{4}} = 1{,}79\,\mathrm{A}$$

b) El ángulo que mide la diferencia de fase es:

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{\frac{V}{I_L} - \frac{V}{I_C}}{\frac{V}{I_R}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{4}} = -2 \;\Rightarrow\; \varphi = -63{,}4^{\circ}$$

La intensidad de la corriente está adelantada respecto del voltaje de la fuente de alimentación.

452.- La frecuencia de resonancia de un circuito serie R, L, C, es ω_o. Para esa frecuencia la intensidad de la corriente en el circuito es máxima y vale I_o. Existen dos intensidades de corriente que cumplen la relación $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$, a las cuales corresponden frecuencias $\omega_1 < \omega_o$ y $\omega_2 > \omega_o$

a) Determinar la relación entre la frecuencia de resonancia y ω_1 y ω_2

b) En un circuito serie RLC los valores numéricos son R =100 Ω, L = 0,15 H y C = 1 μF, V_{eficaz} = 100 V, calcular ω_o , ω_1 y ω_2

a) En la figura 1 está representada una curva de resonancia de un circuito serie, para el cual ω_o= 1000 s^{-1} , la intensidad I_o=0,316 A, y la intensidad $I = \frac{0,316}{\sqrt{2}} = 0,223A$

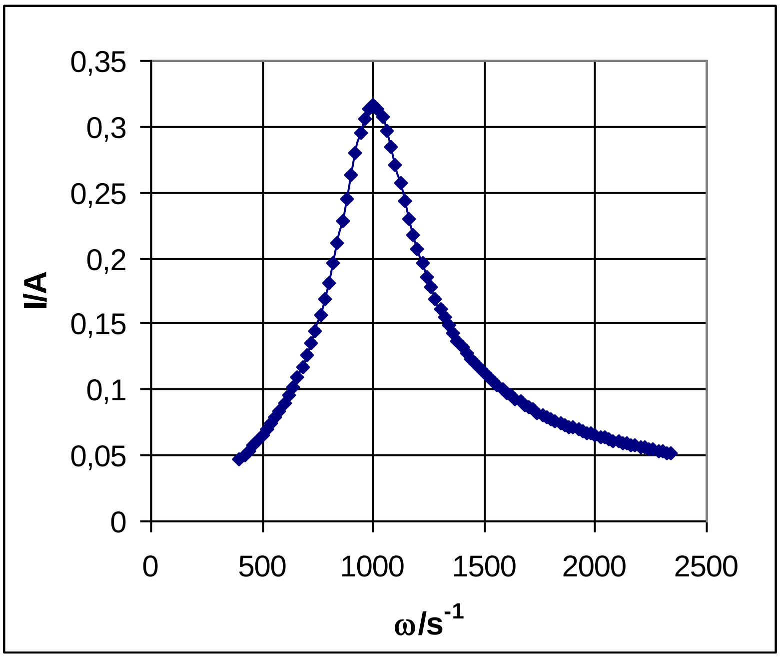


Fig.1

Las frecuencias ω_1< 1000 s^{-1} y ω_2> 1000 s^{-1}

Cuando en el circuito la frecuencia es inferior a ω_o la reactancia capacitiva X_C es mayor que la reactancia inductiva X_L. Veamos el porqué
A la frecuencia de resonancia se cumple:

$$L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o} \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En la figura 2 se representa la situación de las reactancias para un valor inferior a ω_o y cundo se alcanza la resonancia..

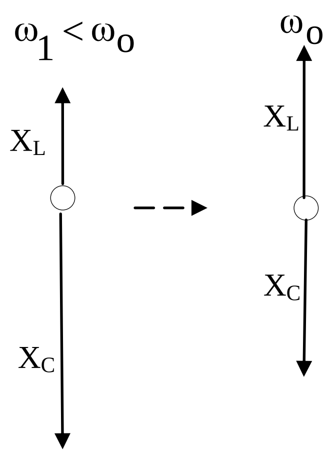


Fig 2

$X_L = L\omega_1 \quad ; \quad X_C = \frac{1}{C\omega_1}$ Al pasar de ω_1 a ω_o X_L aumenta y X_C disminuye (como se observa en la figura 2). si X_L fuese mayor que X_C , al aumentar la frecuencia, X_L seguiría siendo mayor que X_C y no podría alcanzarse la resonancia. Cuando la frecuencia es mayor que la de resonancia X_L es mayor que X_C.

En resumen a frecuencia menores que ω_o, $X_C > X_L$, en la resonancia $X_C = X_L$ y cuando las frecuencias son mayores que ω_o., $X_L > X_C$

Aplicamos la ley de Ohm para las frecuencias ω_1 y ω_2

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2}} \; ; \; I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}\right)^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R^2 + \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1}\right)^2 = R^2 + \left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}$$

De acuerdo con lo visto anteriormente el primer miembro de la última ecuación es negativo y en cambio el segundo miembro es positivo, para quitar esta incompatibilidad escribimos la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{1}{C\omega_1} - L\omega_1 = L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} \Rightarrow \frac{1}{C}\left[\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right] = L(\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow \frac{1}{C}\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \cdot \omega_2}\right] = L(\omega_1 + \omega_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_1 \cdot \omega_2} \Rightarrow \quad \omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} = \omega_o$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}15 \cdot 10^{-6}}} = 2582 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad f_o = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2582}{2\pi} = 411 \text{ Hz}$$

b) ;

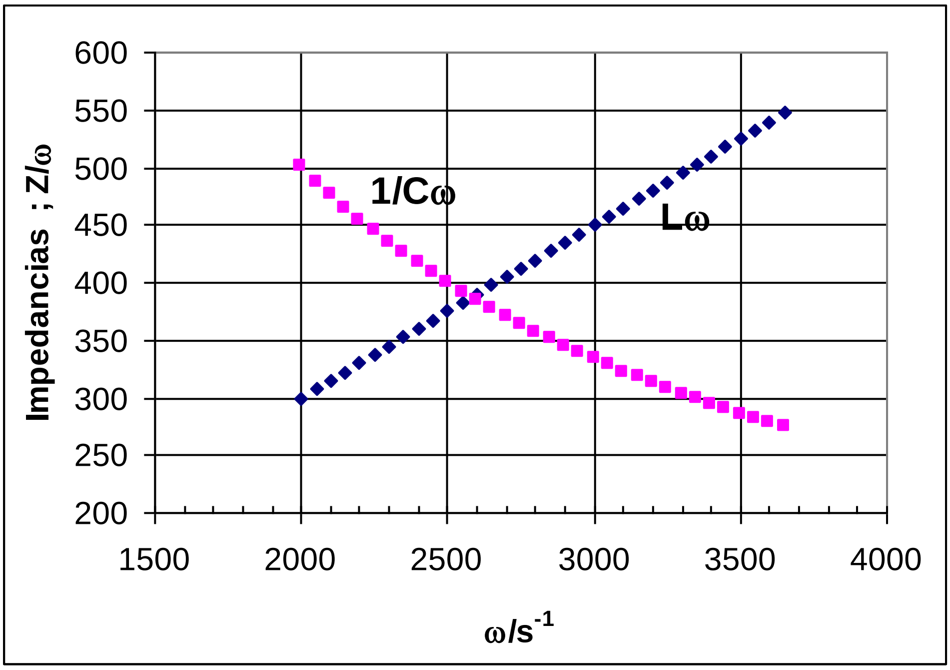
$$I_o = \frac{V}{R} = \frac{100}{100} = 1\text{A} \Rightarrow \quad I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = 0{,}707\text{ A}$$

Calculamos una de las frecuencias

$$I = \frac{\text{Veficaz}}{Z} = 0{,}707 = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \left(0{,}15\omega_2 - \frac{1}{10^{-6}\omega_2}\right)^2}} \Rightarrow 1 = \frac{141{,}4^2}{100^2 + \left(0{,}15\omega_2 - \frac{1}{10^{-6}\omega_2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0{,}15\omega_2 - \frac{1}{10^{-6}\omega_2}\right)^2 = 141.44^2 - 10^4 \Rightarrow 0{,}15\omega_2 - \frac{10^6}{\omega_2} = 100{,}03 \quad (1)$$

En la ecuación (1) damos valores a ω y hacemos la representación gráfica del primer término y del segundo frente a ω.



El punto de corte corresponde a la frecuencia de resonancia, para valores inferiores la reactancia capacitiva supera a la inductiva y para valores mayores es al revés, tal como se hizo en la parte a .

Resolvemos la ecuación (1)

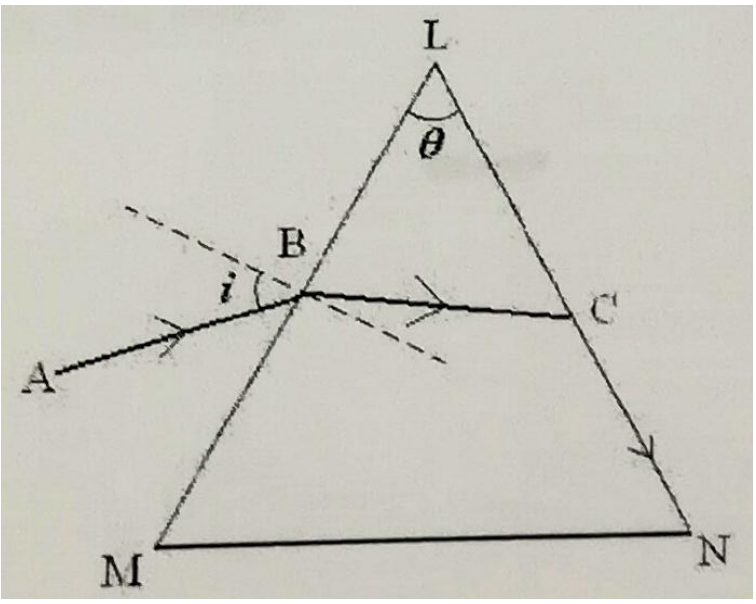
$$0{,}15\omega_2^2 - 100{,}03\omega_2 - 10^6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{100{,}03 \pm \sqrt{100{,}03^2 + 4\cdot 0{,}15\cdot 10^6}}{0{,}30} = \frac{100{,}03 \pm 781{,}03}{0{,}30}$$

Las soluciones son 2937 s^{-1} y -2270 s^{-1} , las cuales corresponden ambas en valor positivo a las frecuencias ω_2 y ω_1 respectivamente

Comprobamos

$$\omega_0 = \sqrt{2937\cdot 2270} = 2582\,s^{-1}$$

453.- Un rayo de luz AB incide desde el aire con un ángulo i sobre una cara del prisma LMN (ver figura) .



El rayo después de la refracción se desplaza a lo largo de CN en el aire. El ángulo del prisma es θ. Comprobar que el índice de refracción n del prisma está determinado por la ecuación

$$\boldsymbol{n = \left[1 + \left(\frac{sen\, i + \cos\theta}{sen\,\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Olimpiadas de India.

En el prisma al ángulo de incidencia i le corresponde un refractado r y ambos están relacionados por la ley de Snell

$$1\cdot \text{sen}\, i = n\, \text{sen}\ r\ .(1)$$

Al rayo BC que llega a la cara LN del prisma lo de signamos con r´

$$n\, \text{sen}\, r´ = 1\cdot \text{sen} 90^o \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\, r´ = \frac{1}{n}$$

Los ángulos r y r´ están relacionados con θ (ver figura 1)

$$\alpha + \beta + \theta = 180^o \ \ ; \ \ r + \alpha = 90^o \ \ ; \ \ r´ + \beta = 90^o \quad \Rightarrow 90 - r + 90 - r´ + \theta = 180^o \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \theta = r + r´$$

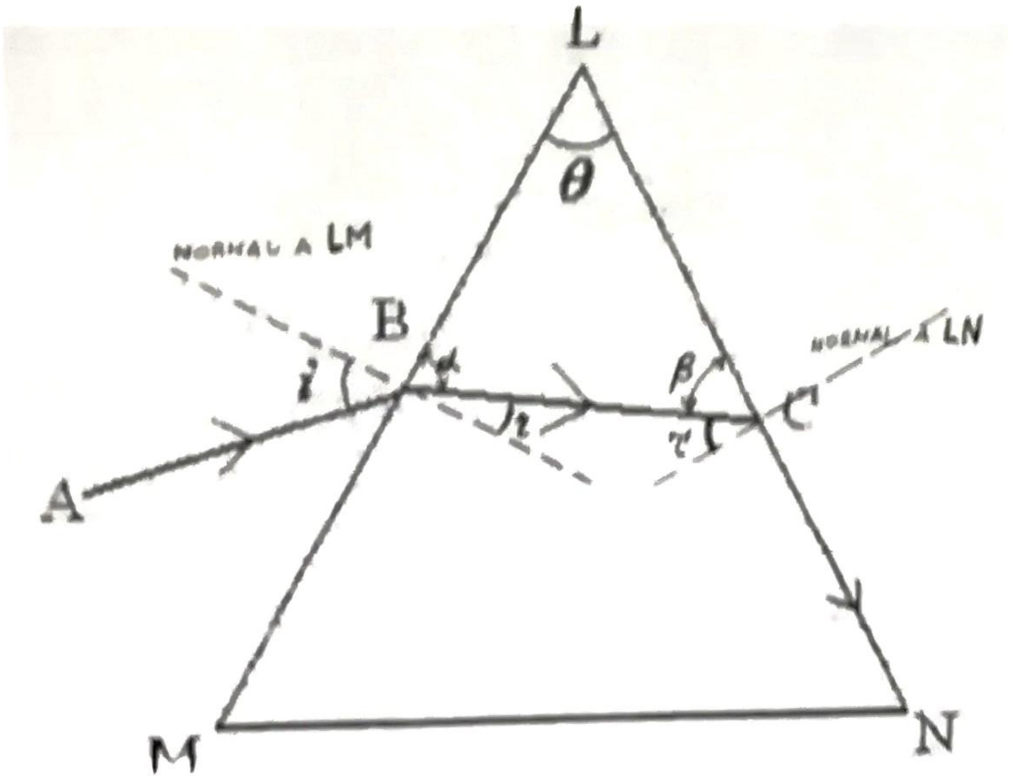


Fig 1

De la ecuación (1)

$$n=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\left(\theta-r'\right)}=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\theta\cos r'-\cos\theta\operatorname{sen} r'}=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 r'}-\cos\theta\cdot\frac{1}{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-\frac{\cos\theta}{n}}=\frac{\operatorname{sen} i}{\frac{\operatorname{sen}\theta\sqrt{n^2-1}}{n}-\frac{\cos\theta}{n}}\Rightarrow 1=\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{n^2-1}-\cos\theta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta\sqrt{n^2-1}=\operatorname{sen} i+\cos\theta\Rightarrow n^2-1=\frac{\left(\operatorname{sen} i+\cos\theta\right)^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\Rightarrow n=1+\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} i+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2}$$