PROBLEMAS VARIADOS 6-2017

418.-Una cuerda sin masa que obedece a la ley de Hooke puede romperse cuando sobre ella actúa una cierta tensión. Un extremo de la cuerda está fijo y en el otro está enganchada una masa 3m. Otra masa m se desplaza con velocidad constante v_o y alcanza a la masa 3m, formando un solo conjunto; la cuerda se estira y luego se rompe, siendo nula la energía cinética del conjunto. Si la colisión entre las masas fuese perfectamente elástica y central la cuerda también se rompe y la masa 3m adquiere, después de la ruptura de la cuerda, una velocidad final v_f. Todo el movimiento ocurre sobre un suelo horizontal sin rozamiento.

a) Encontrar la relación $\dfrac{v_f}{v_o}$

b) Encontrar la relación entre la energía de las dos masas, después del choque perfectamente elástico y ya rota la cuerda, y la energía inicial de la masa m antes de la colisión

Propuesto en las Olimpiadas USA.

Nota añadida por nosotros. Al resolver el problema se admite que en los choques no hay calor desprendido ni deformación de las masas; la energía se almacena en la cuerda.

a) El choque es inelástico y existe conservación de la cantidad de movimiento, la velocidad del conjunto de las dos masas pegadas entre sí justamente en el instante posterior a la colisión vale:

$$m v_o + 3m \cdot 0 = 4m \cdot v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v_o}{4}$$

A partir del instante anterior la cuerda comienza a estirarse y se llega a romper, tal como indica el enunciado, cuando la energía cinética del conjunto aparece en energía potencial elástica en la cuerda.

$$U = \frac{1}{2} 4m \cdot \left(\frac{v_o}{4}\right)^2 = \frac{m v_o^2}{8}$$

Si el choque fuese perfectamente elástico, analizamos el problema desde el sistema de referencia ligado al centro de masas.
Velocidad del centro de masas

$$v_{CM} = \frac{m v_o + 3m \cdot 0}{4m} = \frac{v_o}{4}$$

Las velocidades de las masas respecto al sistema de referencia ligado al centro de masas son:

$$v_m = v_o - v_{CM} = v_o - \frac{v_o}{4} = \frac{3v_o}{4} \qquad v_{3m} = 0 - \frac{v_o}{4} = -\frac{v_o}{4}$$

Inmediatamente después del choque y dado que el centro de masas se desplaza a la misma velocidad, las velocidades de las masas respecto del centro de masas son:

$$v'_m = -\frac{3v_o}{4} \qquad v'_{3m} = \frac{v_o}{4}$$

Las velocidades de las masas respecto del sistema del laboratorio son:

$$V_m = -\frac{3v_o}{4} + v_{CM} = -\frac{3v_o}{4} + \frac{v_o}{4} = -\frac{v_o}{2} \quad ; \quad V_{3m} = \frac{v_o}{4} + v_{CM} = \frac{v_o}{4} + \frac{v_0}{4} = \frac{v_0}{2}$$

La masa m conserva su velocidad, pero la 3m está ligada a la cuerda y progresivamente pierde algo de su velocidad y por tanto de su energía cinética que se va almacenado en la cuerda, cuando esta energía es U la cuerda se rompe y la masa 3m queda libre con la velocidad v_f

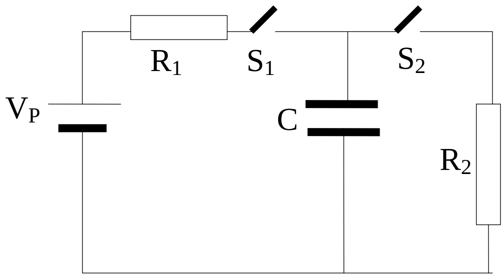
$$\frac{1}{2}3mv_f^2 = \frac{1}{2}3m\left(\frac{v_o}{2}\right)^2 - U = \frac{3m\,v_o^2}{8} - \frac{m\,v_o^2}{8} = \frac{m\,v_o^2}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}v_f^2 = \frac{v_o^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{v_f}{v_o}\right)^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{v_f}{v_o} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

b)

$$\frac{\frac{1}{2}m\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}3m\,v_f^2}{\frac{1}{2}m\,v_o^2} = \frac{\frac{v_o^2}{4} + 3\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{6}v_o\right)^2}{v_o^2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{6}}{1} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

419.-En el circuito de la figura inferior V_p es la diferencia de potencial constante en la pila, C, la capacidad del condensador, R_1 y R_2 son resistencias, S_1 e S_2 interruptores.
En el instante inicial (t=0 s), el condensador está descargado, se cierran simultáneamente los interruptores.



a) Calcular la diferencia de potencial e intensidad de la corriente que circula por el condensador en función del tiempo.
b) La intensidad que circula por la resistencia R_2 y por la pila.
c) Dibujar las curvas de intensidad y potencial en el condensador en los casos siguientes: 1) V_P= 20 V, C = 1000 μF, $R_1 = 10^5\ \Omega$ y $R_2 = 2.10^4 \Omega$
2) V_P= 20 V, C = 1000 μF, $R_1 = 10^5\ \Omega$ y $R_2 = 5.10^4\ \Omega$.

a) En un instante t después del cierre de los interruptores, V_C representa la caída de tensión entre los bornes del condensador, I la intensidad de la corriente que circula por la pila, I_2 la que circula por la resistencia R_2 , I_C la que circula por el condensador.

Para la malla de la izquierda

$$V_P = I R_1 + V_C$$

En el nudo superior

$$I = I_C + I_2$$

Sustituimos I en la primera ecuación

$$V_P = I_C R_1 + I_2 R_1 + V_C \quad (1)$$

La diferencia de potencial en el condensador está relacionada con la capacidad y la carga, a la que designamos con q.

$$V_C = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad V_P = I_C R_1 + I_2 R_1 + \frac{q}{C}$$

Como $I_2 R_2 = V_C \Rightarrow \quad I_2 = \frac{V_C}{R_2} = \frac{q}{R_2 C} \quad \Rightarrow \quad V_P = I_C R_1 + \frac{q}{R_2 C} R_1 + \frac{q}{C}$

Derivamos la última ecuación con respecto al tiempo

$$\frac{dV_P}{dt} = 0 = \frac{dI_C}{dt} R_1 + \frac{R_1}{R_2 C}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

La derivada $\frac{dq}{dt}$ es igual a la intensidad que pasa en ese instante por el condensador

$$0 = \frac{dI_C}{dt} R_1 + I_C\left(\frac{R_1}{R_2 C} + \frac{1}{C}\right) \Rightarrow \quad \frac{dI_C}{dt} R_1 = -I_C\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2 C}\right) \Rightarrow \quad \int \frac{dI_C}{I_C} = -\int \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln I_C = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t + Cte = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t + \ln K \Rightarrow \quad \frac{I_C}{K} = e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

En la integral anterior no podemos calcular directamente la constante de integración puesto que cuando t=0, resultaría ln =0 que no existe un valor, por eso hemos hecho Cte= ln K y tratamos de calcular K sustituyendo en la ecuación (1).

$$V_P = K R_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} + V_C \frac{R_1}{R_2} + V_C$$

Si en la ecuación anterior t = 0, la exponencial es 1 y resulta $V_P = K R_1 \Rightarrow \quad K = \frac{V_P}{R_1}$

$$V_P = \frac{V_P}{R_1} R_1 e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} + V_C \frac{R_1}{R_2} + V_C \Rightarrow \quad V_C\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) = V_P\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{V_P}{\frac{R_1}{R_2} + 1}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right) \Rightarrow \qquad V_C = \frac{V_P R_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right)$$

Sustituyendo el valor de K en I_C resulta

$$I_C = \frac{V_P}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$$

b) De la ecuación (1)

$$V_P = \frac{V_P R_1}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + I_2R_1 + I_2R_2 \Rightarrow V_P\left(1-\frac{R_1}{R_1}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right) = I_2(R_1+R_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad I_2 = \frac{V_P}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)$$

$$I = I_C + I_2 = \frac{V_P}{R_1} e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + \frac{V_P}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)$$

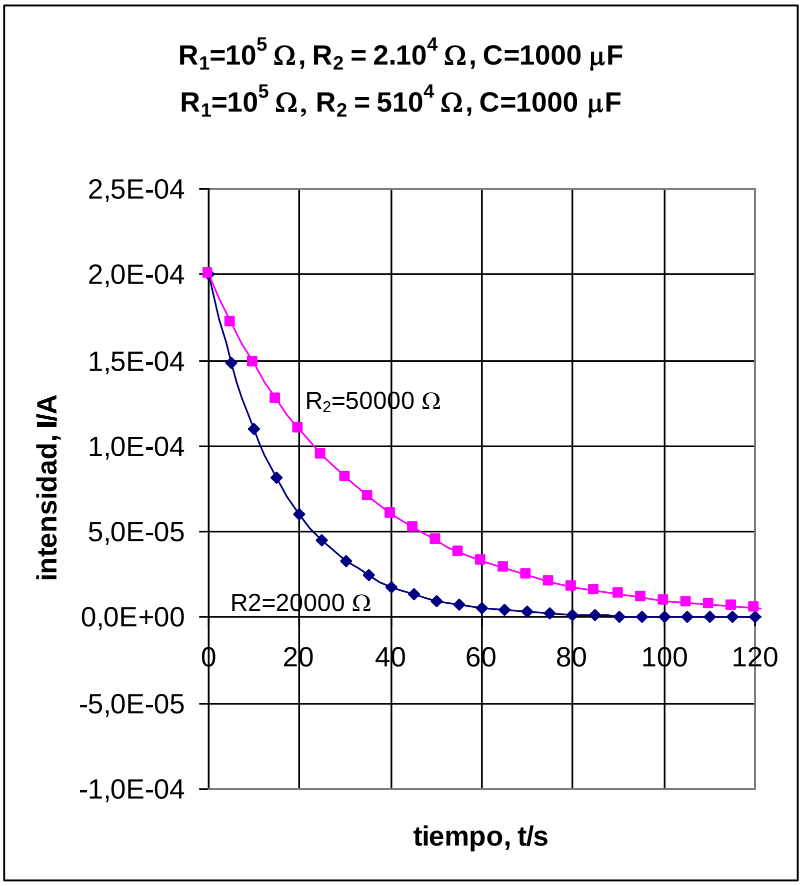
Para realizar de forma más cómoda las operaciones hacemos $x = e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}$

$$I = \frac{V_P}{R_1}x + \frac{V_P}{R_1+R_2}(1-x) = \frac{V_P}{R_1}x - \frac{V_P}{R_1+R_2}x + \frac{V_P}{R_1+R_2} = V_P x\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}\right) + \frac{V_P}{R_1+R_2}$$

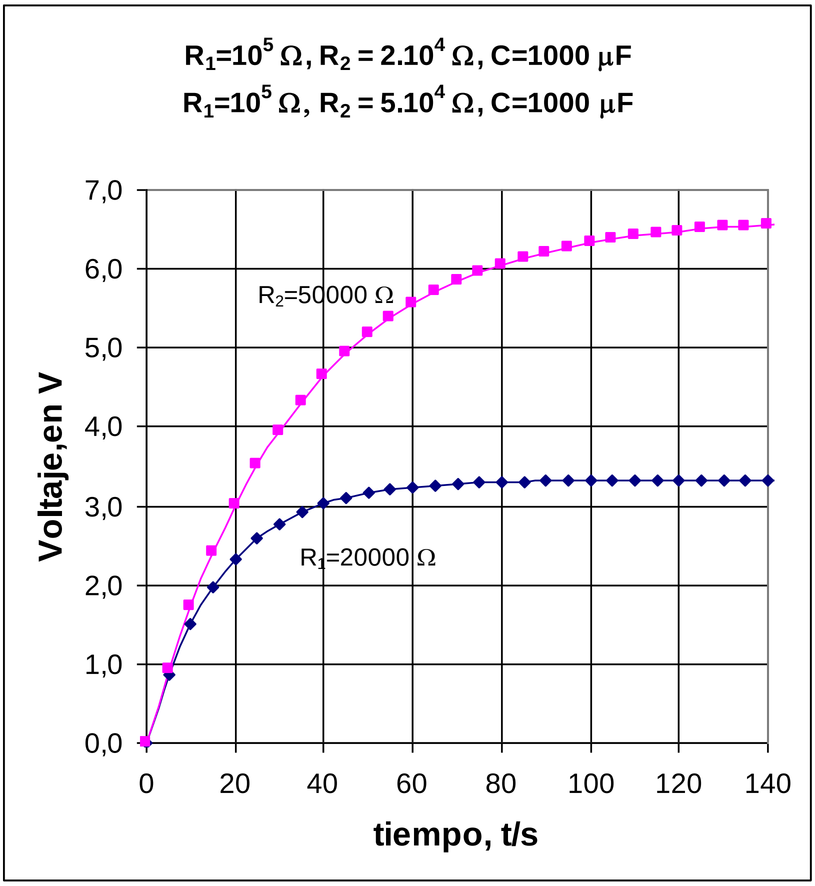
$$I = V_P x \frac{R_2}{R_1(R_1+R_2)} + \frac{V_P}{R_1+R_2} = \frac{V_P}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}x\right) \Rightarrow$$

$$I = \frac{V_P}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right)$$

b)



R1=10^5 Ω, R2 = 2.10^4 Ω, C=1000 μF
R1=10^5 Ω, R2 = 510^4 Ω, C=1000 μF
2,5E-04
2,0E-04
1,5E-04
1,0E-04
5,0E-05
0,0E+00
-5,0E-05
-1,0E-04
0
20
40
60
80
100
120
R2=50000 Ω
R2=20000 Ω
intensidad, I/A
tiempo, t/s



R1=10^5 Ω, R2 = 2.10^4 Ω, C=1000 μF
R1=10^5 Ω, R2 = 5.10^4 Ω, C=1000 μF
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0,0
0
20
40
60
80
100
120
140
R2=50000 Ω
R1=20000 Ω
Voltaje,en V
tiempo, t/s

420.-Se dispone de dos balones esféricos de distintos volúmenes. Uno se llena con aire caliente a la temperatura de 373 K y el otro con vapor de agua a esa misma temperatura. Se comprueba que ambos balones pueden izar una masa total de 300 kg en la superficie terrestre. En esta masa está incluida la masa de la envoltura, de las cuerdas y de todos los elementos empleados en el experimento. La temperatura ambiente es T_o =293 K y la presión $p_o = 10^5$ Pa.

a) Calcular los volúmenes de los balones.

b) Determinar la cantidad de calor aportada al aire atmosférico para llenar el balón de aire y realizar el mismo cálculo para el balón que contiene el vapor de agua.

c) Se encuentra que justamente acabado de llenar el balón de aire se produce una pérdida de fuerza ascendente a razón de k_1=0,30 N/s. Se pide la pérdida k_2 para el balón de vapor de agua, para los dos casos siguientes. 1) El agua condensada procedente del vapor se retiene en el propio balón 2) El agua condensada se expulsa al exterior del balón.

Las envolturas de los balones son del mismo material, por tanto, conducen por igual el calor, además no permiten pérdidas ni de aire ni de vapor de agua. Se admite que tanto el aire como el vapor de agua se comportan como gases ideales.

Datos. Masa molar el aire M_A = 0,029 kg/mol, Masa molar el agua M_W = 0,018 kg/mol, capacidad calorífica a volumen constante Cv= (5/2) R , calor específico del agua líquida C_W=4200 $Jkg^{-1}K^{-1}$, temperatura de ebullición del agua a p_o, 373 K, calor de vaporización del agua λ = $2,3.10^6$ J/Kg

a) La fuerza ascensional es igual al empuje del aire sobre el balón menos el peso del contenido del balón.

$$V_1\rho_{293}\, g - V_1\rho_{373} g = 300 \cdot g \Rightarrow \quad V_1 = \frac{300}{\rho_{293} - \rho_{373}}$$

Para determinar las densidades hacemos uso de la ecuación de los gases perfectos, admitiendo que la presión del aire dentro del globo es la misma que la presión exterior p_o.

$$pV = nRT \;\Rightarrow p = \frac{n}{V}RT = \frac{g}{VM}RT \;\Rightarrow p = \frac{\rho}{M}RT$$

Aplicamos la elución anterior

$$p_0 = \frac{\rho_{293}}{M_A} R\, 293 \Rightarrow \;;\Rightarrow\; \rho_{293} = \frac{p_o M_A}{R\, 293} \quad ; \quad p_0 = \frac{\rho_{373}}{M_A} R\, 373 \Rightarrow \quad \rho_{373} = \frac{p_o M_A}{R\;373}$$

$$V_1 = \frac{300}{\frac{p_o M_A}{R\,293} - \frac{p_o M_A}{R\,373}} = \frac{300}{\frac{p_o M_A}{R}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{373}\right)} = \frac{300}{\frac{10^5 \cdot 0{,}029}{8{,}31 \cdot}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{373}\right)} = 1174\, m^3$$

Para el balón de agua partimos de la misma ecuación inicial, el empuje es el mismo que en el caso anterior pero el peso del contenido cambia ya que la densidad del vapor de agua es diferente de la del aire.

$$V_2 = \frac{300}{\rho_{293} - \rho_{373(W)}}$$

$$p_0 = \frac{\rho_{373(W)}}{M_w} R\, 373 \Rightarrow \quad \rho_{373(W)} = \frac{p_o\, M_w}{R\ 373} \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{300}{\frac{p_o M_A}{R\,293} - \frac{p_o M_W}{R\,373}} = \frac{300}{\frac{p_o}{R}\left(\frac{M_A}{293} - \frac{M_W}{373}\right)} = \frac{300}{\frac{10^5}{8{,}31}\left(\frac{0{,}029}{293} - \frac{0{,}018}{373}\right)} = 492\,m^3$$

b)

$$Q_1 = n\,C_p \Delta t = \frac{p_o V_1}{R\,T_1} \cdot \frac{7}{2} R \cdot (T_1 - T_o) = \frac{10^5 \cdot 1174}{373} \cdot \frac{7}{2}(373 - 293) = 8{,}81.10^7\ J$$

En el caso del balón de vapor de agua primero es preciso calentar el agua líquida desde 293ºC a 373 ºC y a continuación pasarla al estado de vapor.

$$Q_2 = m_W\, C_W (T_1 - T_o) + m_W \lambda \qquad p_o V_2 = \frac{m_W}{M_W} R\,T_1 \Rightarrow m_W = \frac{p_o V_2\, M_W}{R\,T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{p_o V_2\, M_W}{R\,T_1}\left[C_W (T_1 - T_o) + \lambda\right] = \frac{10^5 \cdot 492 \cdot 0{,}018}{8{,}31 \cdot 373}\left[4200 \cdot 80 + 2{,}3.10^6\right] = 75{,}3.10^7\ J$$

c) La pérdida de fuerza ascensional se debe a que en el caso del balón de aire hay una pérdida de energía calorífica al ambiente y esto determina una disminución de la temperatura del aire y, si la presión es la misma, a una disminución del volumen. Observamos que el peso del contenido del balón no cambia ya que el número de moles de aire es el mismo, puesto que la envoltura del balón permite el paso del calor pero no del aire.

Designamos con q_1 a la pérdida del calor por unidad de tiempo, en un tiempo posterior dt a que el balón se ha llenado. La pérdida de calor es q_1 dt; y la variación de la temperatura dT y del volumen del balón dV_1.

$$q_t dt = nC_p dT \quad ; \quad p_o dV_1 = n\,R\,dT \Rightarrow \quad n\,dT = \frac{p_o dV_1}{R} \Rightarrow \quad q_1 dt = C_p \frac{p_o dV_1}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad dV_1 = \frac{q_1\,R\,dt}{p_o\,C_p}$$

La variación de la fuerza ascensional es:

$$F_{asc} = V_1 \rho_o g \quad \Rightarrow \quad dF_{asc} = \rho_o g\, dV_1 = \rho_o g \frac{q_1 R\, dt}{p_o C_P} \quad \text{como} \quad \rho_o = \frac{p_o M_A}{R T_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF_{asc} = \frac{p_o M_A}{R T_o} g \frac{q_1 R\, dt}{p_o C_P} \quad \Rightarrow \quad dF_{asc} = \frac{M_A}{T_o C_P} g q_1 dt \Rightarrow \quad \frac{dF_{asc}}{dt} = k_1 = \frac{M_A}{T_o C_P} g q_1 \ (1)$$

Designamos con q_2 al calor emitido por unidad de tiempo. Un tiempo posterior dt a que el balón se ha llenado, el calor perdido es q_2 dt y ese calor perdido lo ha proporcionado el paso de una cantidad dm en kg de vapor de agua que se convierte en agua líquida.

$$q_2 dt = dm\lambda = dn\, M_W\, \lambda$$

En esta ecuación dn es el número de moles. La disminución del volumen debido a esos moles es dV_2.

$$p_o dV_2 = dn\, R\, T_1 = \frac{q_2 dt}{M_W \lambda} R\, T_1 \quad \Rightarrow \quad dV_2 = \frac{q_2 dt}{p_o\, M_W \lambda} R\, T_1$$

La variación de la fuerza ascensional es:

$$dF_{asc}(W) = \rho_O\, g\, dV_2 = \frac{p_o\, M_A}{R T_o} g \frac{q_2 dt}{p_o M_W \lambda} R\, T_1 = \frac{M_A}{T_o} g \frac{q_2 dt}{M_W \lambda} T_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dF_{asc}(W)}{dt} = k_2 = \frac{M_A}{T_o} g \frac{q_2}{M_W \lambda} T_1 \quad (2)$$

Los calores perdidos a través de las envolturas de los balones son proporcionales a la superficie

$$q_1 = k \cdot 4\pi R_1^2 \quad ; \quad q_2 = k \cdot 4\pi R_2^2 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 q_1$$

Poniendo los radios en función de los volúmenes

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \ ; \ V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \Rightarrow \quad \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q_2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} q_1$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (1)

$$\frac{k_2}{k_1}=\frac{\frac{M_A}{T_o}g\frac{q_2}{M_W\lambda}T_1}{\frac{M_A}{T_oC_P}g\,q_1}=\frac{\frac{q_2}{M_W\lambda}T_1}{\frac{1}{C_P}q_1}=\frac{T_1C_P}{M_W\lambda}\frac{q_2}{q_1}=\frac{T_1C_P}{M_W\lambda}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\frac{k_2}{k_1}=\frac{373\cdot\frac{7}{2}8{,}31}{0{,}018\cdot 2{,}3.10^6}\left(\frac{492}{1174}\right)^{\frac{2}{3}}=0{,}15\Rightarrow\quad k_2=0{,}15\cdot 0{,}30=0{,}045\frac{N}{s}$$

Para el caso de echar el agua fuera del balón, al término analizado anteriormente hemos de restar el peso de agua formados

$$dF_{asc}(W2)=\frac{M_A}{T_o}g\frac{q_2dt}{M_W\lambda}T_1-\frac{q_2dt}{\lambda}g\Rightarrow\frac{dF_{asc}(W2)}{dt}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{M_A}{T_o}\frac{g}{M_W\lambda}T_1-\frac{g}{\lambda}\right]q_1=k_3$$

$$\Rightarrow\frac{k_3}{k_1}=\frac{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{g}{\lambda}\left[\frac{M_A}{T_oM_w}T_1-1\right]}{\frac{M_A}{T_oC_P}g}=\frac{\left(\frac{492}{1174}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2{,}3.10^6}\left[\frac{0{,}029\cdot 393}{293\cdot 0{,}018}-1\right]}{\frac{0{,}029}{293\cdot\frac{7}{2}8{,}31}}=0{,}084\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad k_3=0{,}084\cdot 0{,}30=0{,}025\frac{N}{s}$$

421.-Un cilindro aislado térmicamente del exterior está dividido en dos compartimentos del mismo volumen por medio de un pistón móvil que carece de masa y de rozamiento y que no es conductor el calor. En cada compartimento existe un mol del mismo gas ideal a la misma presión y temperatura. Por medio de una resistencia se comunica calor al sistema de dos maneras diferentes. 1) El calor Q aportado se transmite al gas de uno de los compartimentos 2) La mitad de Q se transmite al gas de un compartimento y la otra mitad al otro. Determinar en qué caso se produce mayor aumento de la presión.

1) Designamos con P_o y V_o , T_o a las variables termodinámicas de los gases. El proceso 1 se escenifica en la figura 1.

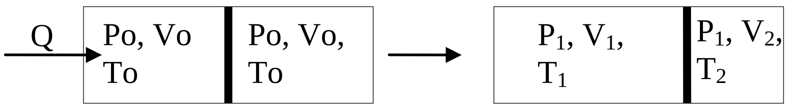


Fig.1

El calor Q recibido por el gas situado a la izquierda se emplea en aumentar su energía interna y en realizar un trabajo comprimiendo al gas de la derecha. El gas de la derecha se comprime, recibe una cierta cantidad de trabajo el cual determina que su volumen disminuya y su temperatura aumente. Las presiones de los gases serán iguales cuando el sistema alcance el equilibrio.
Las variaciones de energía interna de los gases son:

$$\Delta U_1 = C_V(T_1 - T_o) \quad ; \quad \Delta U_2 = C_V(T_2 - T_o)$$

Como el gas de la derecha no recibe calor y está aislado la variación de energía interna U_2 mide el trabajo realizado por el gas de la izquierda. El calor Q es igual a:

$$Q = C_V(T_1 - T_o) + C_V(T_2 - T_o) = C_V(T_1 + T_2 - 2T_o)$$

Según la ecuación de los gases perfectos

$$T_o = \frac{P_o V_o}{R} \; ; \; T_1 = \frac{P_1 V_1}{R} \quad ; \quad T_2 = \frac{P_1 V_2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; Q = C_V\left(\frac{P_1 V_1}{R} + \frac{P_1 V_2}{R} - 2\frac{P_o V_o}{R}\right) = \frac{C_V}{R}\left[P_1(V_1 + V_2) - P_o \cdot 2V_o\right]$$

Si designamos con V_T al volumen del cilindro: $V_T = 2V_0 = V_1 + V_2$
Sustituimos en la ecuación anterior

$$Q = \frac{C_V}{R}\left[P_1 V_T - P_o V_T\right] = \frac{C_V\,V_T}{R}(P_1 - P_o) \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_o + \frac{Q R}{C_V\,V_T} \quad (1)$$

2) Cuando se suministra la mitad de Q a cada gas, la presión de cada gas es siempre igual y por consiguiente el pistón no se mueve, no hay trabajo de expansión, el volumen se mantiene constante, varía la presión y la temperatura. Designamos con P´ la presión final de cada gas y con T´ la temperatura final.

El calor suministrado al gas de la izquierda es Q/2 y su efecto es aumentar su energía interna

$$\frac{Q}{2} = C_V\left(T' - T_o\right) = C_V\left(\frac{P'V_o}{R} - \frac{P_o V_o}{R}\right) = \frac{C_V V_o}{R}\left(P^{\cdot\cdot} - P_o\right) \Rightarrow Q = \frac{C_V\, 2V_o}{R}\left(P^{\cdot\cdot} - P_o\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{C_V V_T}{R}\left(P^{\cdot\cdot} - P_o\right) \Rightarrow \qquad P' = P_o + \frac{Q R}{C_V V_T} \quad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) se deduce que P = P´, esto es, la presión es la misma.

422.-Se dispone de un sistema de dos condensadores planos iguales e igualmente cargados, tal como se indica en la figura 1 a. Al condensador 2 se le hace variar la distancia entre sus placas a un valor d´, que puede ser menor o mayor que d.
a) Comparar la energía del sistema de la figura 1 b con la del sistema de la figura 1 a.
b) Comparar la fuerza entre las placas de los condensadores 1 y 2 de la figura 1b.

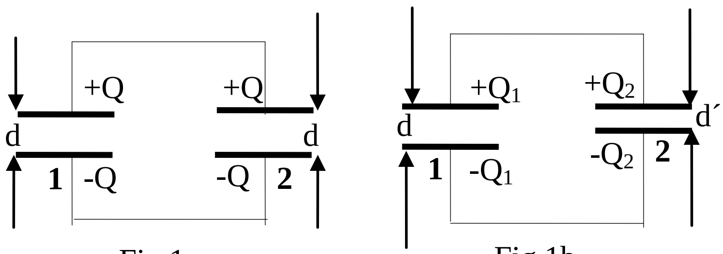


Fig.1a Fig.1b

a) La capacidad de un condensador plano cuyas armaduras tienen una superficie S cada una y la energía que almacena al estar cargado.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_o S}{d} \quad ; \quad E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_o S}$$

La energía almacenada en el sistema de la figura 1a es: $E_1 = \dfrac{Q^2 d}{\varepsilon_o S}$

La energía almacenada en el sistema de la figura 1b es: $E_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_1^2 d}{\varepsilon_o S} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_2^2 d´}{\varepsilon_o S}$

Una vez alcanzado el equilibrio en el sistema 1b, la diferencia de potencial entre los condensadores es la misma

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1 d}{\varepsilon_o S} = \frac{Q_2 d´}{\varepsilon_o S} \quad \Rightarrow \quad Q_1 d = Q_2 d´ \quad (1)$$

La conservación de la carga eléctrica supone que

$$Q_1 + Q_2 = 2Q \quad (2)$$

Despejando Q_2 de la ecuación (1) y sustituyendo en (2), siendo $k = \dfrac{d´}{d}$

$$Q_1 + Q_1\frac{d}{d´} = 2Q \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{2Q}{1+\frac{d}{d´}} = \frac{2Q}{1+\frac{1}{k}}$$

Despejando Q_1 de la ecuación (1) y sustituyendo en (2):

$$Q_2 \frac{d'}{d} + Q_2 = 2Q \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{2Q}{1+\frac{d'}{d}} = \frac{2Q}{1+k}$$

Si k es menor que 1 (las placas del condensador 2 se acercan), el condensador 1 pierde parte de su carga y la gana el condensador 2.

Si k es mayor que 1 (las placas del condensador se alejan), entonces gana carga el condensador 1 y la pierde el 2.

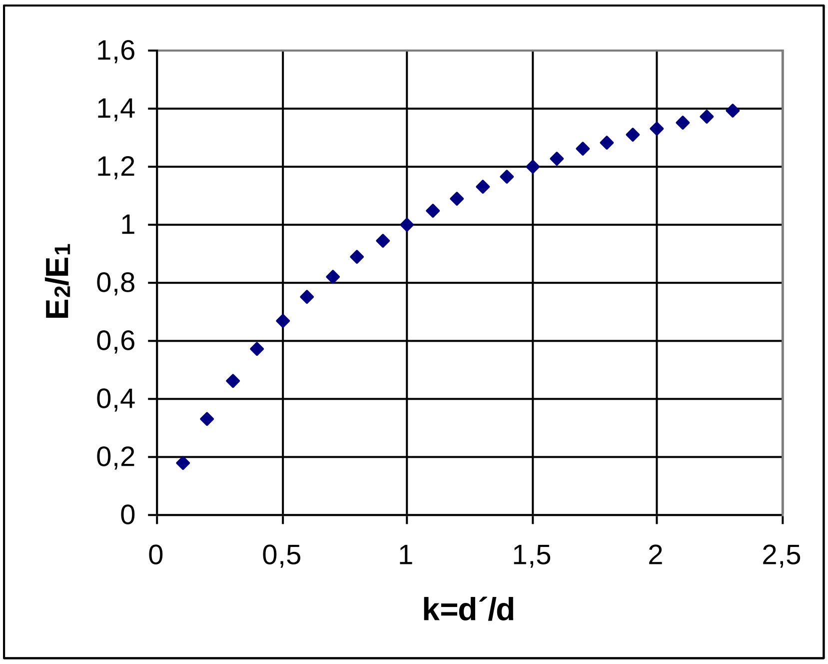
La energía del sistema de la figura 1b es:

$$E_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{4Q^2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_o S}{d}} + \frac{1}{2}\frac{4Q^2}{(1+k)^2 \cdot \frac{\varepsilon_o S}{d'}} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S}\left[\frac{k^2 d}{(1+k)^2} + \frac{d'}{(1+k)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2}\left[k^2 d + d'\right] = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2}\left[k^2 d + kd\right] = \frac{2Q^2\, k\, d\,(1+k)}{\varepsilon_o S(1+k)^2} = \frac{2Q^2\, k\, d}{\varepsilon_o S(1+k)}$$

Comparamos las energías del sistema de la figura 1b con el sistema de la figura 1a

$$\eta = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\dfrac{2Q^2 kd}{\varepsilon_o S(1+k)}}{\dfrac{Q^2 d}{\varepsilon_o S}} = \frac{2k}{1+k}$$



b) Un condensador plano de superficie S de armaduras y separación entre ellas x, ejerce una fuerza de atracción F entre las mismas, ya que están cargadas con distinto signo.
Si mediante una fuerza exterior F y de forma cuasiestática separamos las armaduras una distancia dx hemos de realizar un trabajo F dx que dará lugar a un aumento de la energía del condensador.

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2 x}{\varepsilon_o S} \Rightarrow dE = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o S}dx = Fdx \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_o S}$$

Aplicamos la ecuación anterior a los dos condensadores de la figura 1b.

$$F_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{\varepsilon_O S} = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{2Q}{1+\dfrac{1}{k}}\right)^2}{\varepsilon_O S} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^2} = \frac{2Q^2 k^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2} \;:\; F_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(\dfrac{2Q}{1+k}\right)^2}{\varepsilon_o S} = \frac{2Q^2}{\varepsilon_o S\,(1+k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{\dfrac{2Q^2}{\varepsilon_o S\,(1+k)^2}}{\dfrac{2Q^2 k^2}{\varepsilon_o S(1+k)^2}} = \frac{1}{k^2}$$