PROBLEMAS VARIADOS 5(2013-2015)

342.-Un avión vuela en dirección horizontal a una altura h sobre el suelo y con velocidad constante v. Desde tierra un dispositivo óptico sigue constantemente al avión. En el tiempo t =0 el avión se encuentra justamente encima del sistema óptico.
a) Determinar la velocidad angular y aceleración angular que debe tener el dispositivo óptico para que enfoque permanentemente al avión.
b) Determinar para qué ángulo θ la aceleración angular toma el valor mínimo.
c) Representar la velocidad angular y la aceleración angular frente al ángulo θ de un avión que vuela a una altura de h=1000 m con una velocidad constante de 140 m/s. Considerar un sistema de referencia XY estando el sistema óptico en el eje de coordenadas y el ángulo que forma el dispositivo óptico se mide respecto del eje Y.

En la figura 1 el avión se encuentra en t=0 sobre el eje Y y al cabo de un tiempo t forma un ángulo θ con el eje Y y su abscisa es x.

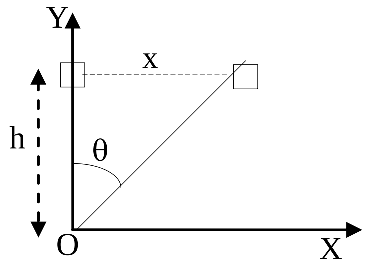


Fig. 1

a) La velocidad constante del avión es: $v = \frac{dx}{dt}$.La velocidad angular del dispositivo óptico es: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{d\theta}{dx}$.

Si h es grande podemos considerar que el aumento de x y de θ es muy pequeño: $\omega = v\frac{\Delta\theta}{\Delta x}$ (1)

De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag}\,\theta = \frac{x}{h} \;\Rightarrow\; x = h\,\text{tag}\theta \;\Rightarrow\; dx = \frac{h}{\cos^2\theta}d\theta \;\Rightarrow\; \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{\cos^2\theta}{h} (2)$$

De (1) y (2) $\omega = v\frac{\cos^2\theta}{h}$ (3)

Diferenciando en (3) :

$$d\omega = -\frac{v}{h}2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\;d\theta = -\frac{v}{h}\mathrm{sen}\,2\theta\;d\theta \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\Delta\theta} = -\frac{v}{h}\mathrm{sen}\,2\theta \quad (4)$$

La aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha = \frac{v}{h}\cos^2\theta\left(-\frac{v}{h}\mathrm{sen}\,2\theta\right) = -\left(\frac{v}{h}\right)^2\cos^2\theta\;\mathrm{sen}\,2\theta \quad (5)$$

b) Para hallar el mínimo derivamos la ecuación (5) respecto de la variable θ e igualamos a cero.

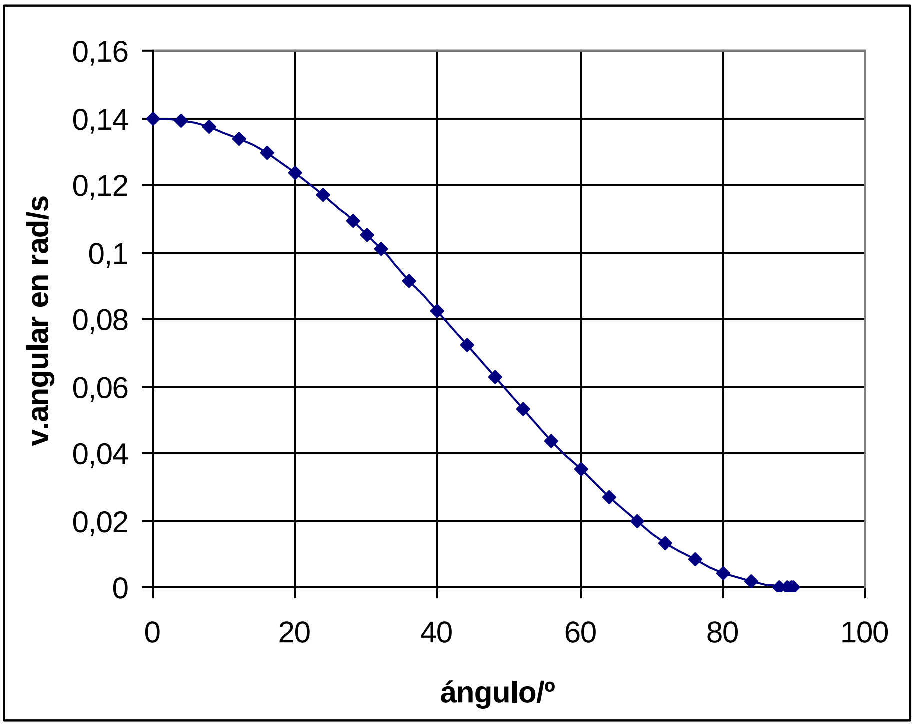
$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \left[-\left(\frac{v}{h}\right)^2\right]\left[\cos^2\theta\cdot\cos 2\theta\cdot 2 + \mathrm{sen}\,2\theta\cdot 2\cos\theta\;\mathrm{sen}\theta\cdot(-1)\right] = 0 \Rightarrow$$

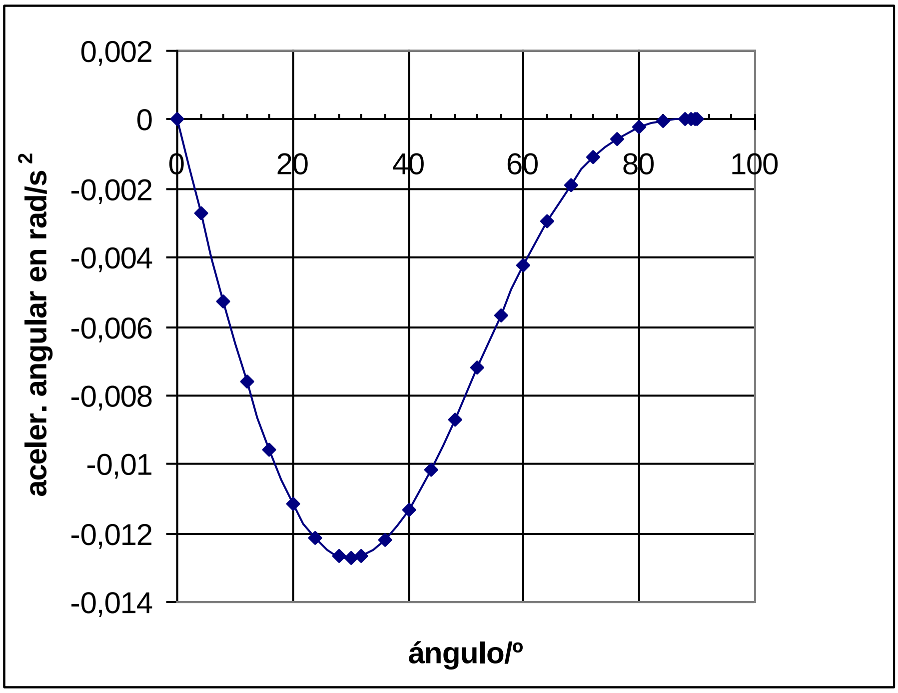
$$\Rightarrow \cos\theta\;\cos 2\theta = \mathrm{sen}\,2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,2\theta = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,2\theta\cdot\mathrm{tag}\,\theta = 1 \;\; (6)$$

La ecuación (6) se puede resolver por tanteo siendo θ = 30º, o se hace uso de la relación trigonométrica siguiente: $\mathrm{tag}\,2\theta = \frac{2\,\mathrm{tag}\,\theta}{1-\mathrm{tag}^2\theta}$

$$\frac{2\,\mathrm{tag}\,\theta}{1-\mathrm{tag}^2\theta}\cdot\mathrm{tag}\,\theta = 1 \Rightarrow \quad 2\,\mathrm{tag}^2\theta = 1-\mathrm{tag}^2\theta = 1 \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \quad \theta = 30^{\circ}$$

c)





0,002
0
-0,002
-0,004
-0,006
-0,008
-0,01
-0,012
-0,014
0
20
40
60
80
100
aceler. angular en rad/s 2
ángulo/º

343.-Comprobar que para un gas perfecto que realiza un proceso adiabático se cumple la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{H_2 - H_1 = \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}$$

El subíndice 2 señala el estado final y el 1 el inicial.

Para un gas perfecto, que efectúa un proceso adiabático reversible entre los estados termodinámicos 1 y 2, se cumplen las siguientes ecuaciones.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \;\; ; \;\; P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

Para un proceso adiabático $\quad H_2 - H_1 = C_P\left(T_{2-} T_1\right) \quad (1)$

Observando la ecuación del enunciado vamos a eliminar T_2 , ya que no aparece en la ecuación del enunciado, utilizando las ecuaciones anteriores:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} \quad ; \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \;\Rightarrow \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \Rightarrow T_2 = \frac{P_2}{P_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot T_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \frac{P_2^{1-\frac{1}{\gamma}}}{P_1^{1-\frac{1}{\gamma}}} = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2)$$

Ahora relacionamos C_p con γ.

$$C_P - C_V = R \quad ; \; \frac{C_P}{C_V} = \gamma \;\; \Rightarrow C_V = \frac{C_P}{\gamma} \Rightarrow C_P - \frac{C_P}{\gamma} = R \Rightarrow \quad C_P = \frac{R}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (3)$$

Sustituyendo en (1) , las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$H_2 - H_1 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\left[T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_1\right] = \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

344.-La ecuación de Clausius-Clapeyron se aplica a una sustancia pura que se encuentra en equilibrio entre dos fases, y su expresión matemática es la siguiente:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta H}{T\,\Delta V}$$

Si nos referimos a un equilibrio líquido vapor, p es la presión de vapor de la sustancia y ΔH su calor de vaporización por mol, ΔV es la diferencia de volúmenes por mol entre la fase vapor y la fase líquida.

a) Utilizando la ecuación anterior y los datos experimentales que aparecen en los datos del problema determinar a qué presión hervirá el agua pura cuando su temperatura es de 20º C.

b) Estimar a qué temperatura hervirá el agua pura en una montaña de 2000 m de altura, sabiendo que a nivel del mar la temperatura es 20ºC=293 K y que ésta disminuye según la ley T = 293 – λz, $\lambda = 6{,}5.10^{-3}$ K/m

Suponer que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

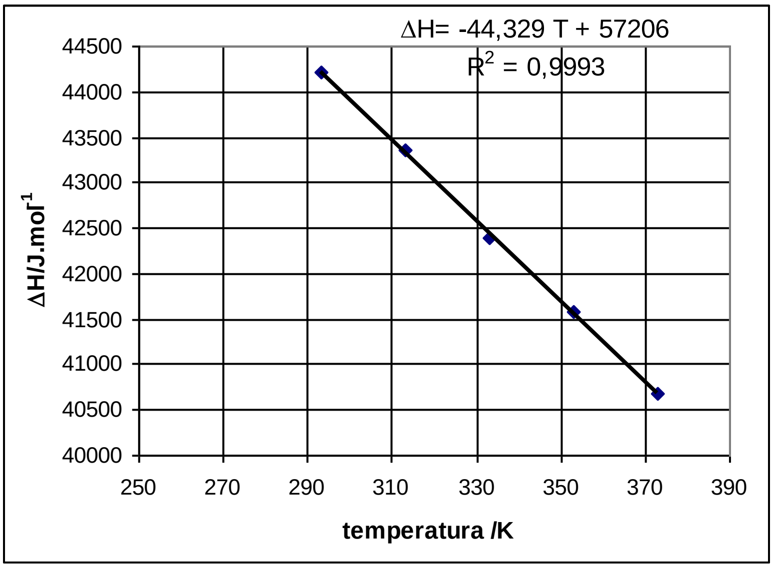
Datos:

Temperatura /K	***293***	***313***	***333***	***353***	***373***
ΔH en J/mol	***$44{,}2.10^3$***	***$43{,}4.\ 10^3$***	***$42{,}4.\ 10^3$***	***$41{,}6.\ 10^3$***	***$40{,}7.\ 10^3$***

Masa molar promedio del aire M= 29 g/mol.

a) Una sustancia pura en estado líquido hierve cuando su presión de vapor es igual a la presión externa que actúa sobre ella.

Si queremos integrar la ecuación de Clausius –Clapeyron debemos encontrar una relación entre la entalpía de vaporización y la temperatura. Para ello representamos en una gráfica los datos experimentales:



Los datos se ajustan bien mediante una relación lineal.

$$\frac{dp}{dT}=\frac{-44{,}329\,T+57206}{T\left(V_{vapor}-V_{líquido}\right)}$$

Dado que el volumen de un mol de agua en forma de vapor es mucho mayor que el volumen de ese mol en estado líquido, hacemos la aproximación de que la diferencia de volúmenes es el volumen de la fase vapor.
Aplicamos la ecuación de los gases perfectos a la fase vapor

$$pV=RT\ \Rightarrow\ V=\frac{RT}{p}$$

Sustituyendo en la ecuación y separando variables resulta:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{-44{,}329\,T+57206}{\frac{RT^2}{p}}\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=\frac{1}{R}\left[\int-\frac{44{,}329}{T}dT+\int\frac{57206}{T^2}dT\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ln p=-\frac{44{,}329}{8{,}31}\ \ln T-\frac{57206}{8{,}31\cdot T}+Cte=-5{,}32\ \ln\ T-\frac{6884}{T}+Cte\ \ (1)$$

Para hallar el valor de la constante de integración utilizamos el hecho experimental de que el agua pura hierve a 100 ºC = 373 K cuando la presión de vapor es 101 325 Pa= 1 atm.

$$\ln 101325=-5{,}32\ \ln 373-\frac{6884}{373}+Cte\Rightarrow Cte=11{,}53+31{,}5+18{,}46=61{,}49$$

Sustituyendo este valor de la constante en la ecuación (1)

$$\ln p=-5{,}32\ln(273+20)-\frac{6884}{(273+20)}+61{,}49\Rightarrow\ln p=7{,}78\Rightarrow p=2384\ \ Pa$$

$$p=\frac{2384}{101325}\cdot 760=17{,}9\quad mm\,Hg$$

b) Calculamos el valor de la presión que existe en lo alto de la montaña. La variación de la presión con la altura es:

$$dP=-\rho\,g\,dz\quad (2)$$

El signo menos indica que la presión disminuye con la altura. En la ecuación anterior puede admitirse, sin apenas error, que g es la misma que en la superficie terrestre y que la densidad del aire la expresamos en función de la presión y la temperatura, aplicando la ley de los gases perfectos.

$$PV=nRT=\ \frac{m}{M}RT\Rightarrow P=\frac{\rho RT}{M}=\frac{\rho R\left(293-\lambda z\right)}{M}\Rightarrow\quad \rho=\frac{PM}{R\left(293-\lambda z\right)}$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$dP = -\frac{PMg}{R(293-\lambda z)}dz \Rightarrow \int\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int\frac{dz}{293-\lambda z}$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable

$$293-\lambda z = a \;\Rightarrow\; da = -\lambda\, dz \;\Rightarrow\; dz = -\frac{da}{\lambda}$$

$$\int\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R}\int\frac{dz}{293-\lambda z} \Rightarrow \ln P = -\frac{Mg}{R}\int -\frac{da}{\lambda a} \Rightarrow \ln P = \frac{Mg}{R\lambda}\ln a + Cte \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln P = \frac{Mg}{R\lambda}\ln(293-\lambda z) + Cte$$

Para hallar la constante de integración, sabemos que cuando z=0 (nivel del mar) la presión es una atmósfera, P_o =101325 Pa

$$\ln P_o = \frac{Mg}{R\lambda}\ln 293 + Cte \;\Rightarrow\; Cte = \ln P_o - \frac{Mg}{R\lambda}\ln 293 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln P = \frac{Mg}{R\lambda}\ln(293-\lambda z) + \ln P_o - \frac{Mg}{R\lambda}\ln 293 \;\Rightarrow\; \ln\frac{P}{P_0} = \frac{Mg}{R\lambda}\left(\ln\frac{293-\lambda z}{293}\right)$$

Sustituyendo valores numéricos en la última ecuación

$$\ln\frac{P}{101325} = \frac{29.10^{-3}\cdot 9{,}8}{8{,}31\cdot 6{,}5.10^{-3}}\ln\frac{293-6{,}5.10^{-3}\cdot 2000}{293} = -0{,}239 \Rightarrow \frac{P}{101325}e^{-0{,}239} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 7{,}98.10^{4}\,Pa$$

Vayamos a la ecuación de Clausius-Clapeyron

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta H}{TV_{l_{iquido}}} = \frac{-44{,}329T + 57206}{T\cdot\frac{RT}{p}} \Rightarrow \frac{dp}{P} = \left(-\frac{44{,}329}{RT} + \frac{57206}{RT^2}\right)dT = \left(\frac{5{,}33}{T} + \frac{6884}{T^2}\right)dT \Rightarrow$$

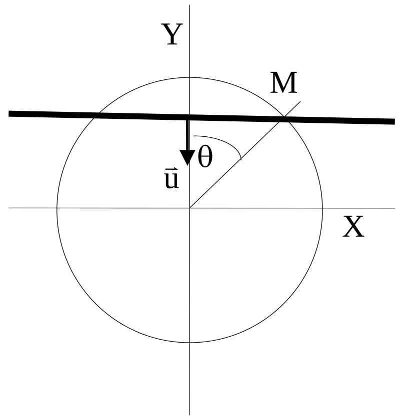
$$\Rightarrow \int_{101325}^{7{,}98.10^4}\frac{dp}{p} = -5{,}33\int_{373}^{T_E}\frac{dT}{T} + 6884\int_{373}^{T_E}\frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln\frac{7{,}98.10^4}{101325} = -5{,}33\ln\frac{T_E}{373} - 6884\left(\frac{1}{T_E} - \frac{1}{373}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0{,}239 = -5{,}33\ln\frac{T_E}{373} - \frac{6884}{T_E} + 18{,}46 \Rightarrow \qquad 18{,}70 = 5{,}33\ln\frac{T_E}{373} + \frac{6884}{T_E} \quad (3)$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo

T_E= 363 K 18,70<-0,14+18,96 ; T_E= 365 K 18,70<-0,12+18,86
T_E= 367 K 18,70>-0,086+18,76 ; T_E= 366,8 K 18,70>-0,089+18,76
T_E= 366,6 K 18,70 $\approx$ -0,092+18,78
Damos este último valor como solución T_E =366,6 K = 93,6 ºC

345.-El centro de una circunferencia de radio R coincide con el centro de coordenadas de un sistema de referencia XY. Un segmento lineal de longitud mayor que 2R se desplaza de forma paralela al eje X con una velocidad $\vec{u} = -u\vec{j}$. Dicho segmento corta a la circunferencia en dos puntos simétricos respecto del eje Y. Considerando el punto M de la figura, se pide: a) Calcular la velocidad del punto M y sus componentes sobre los ejes coordenados, b) sus aceleraciones.
Representar las mencionadas magnitudes frente a θ, si u= 0,2 m/s y R = 2 m.
c) Determinar la ecuación $\theta = f(t)$ y representarla para los valores anteriores de u y R.



Supongamos que en el tiempo t =0 la recta toca a la circunferencia en el punto superior y que un tiempo t después se encuentra en la posición M_1 indicada en la figura 2.

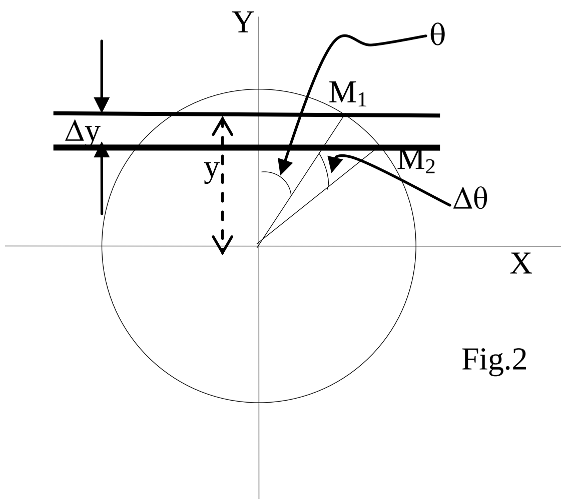


Fig.2

Transcurrido un tiempo muy pequeño Δt $(\Delta t \to 0)$ el punto M ha recorrido el arco M_1 M_2 y según el eje Y, el segmento lineal Δy. Designamos con v al módulo de la velocidad del punto M.

$$v_m = \frac{d(\text{arco}M_1M_2)}{dt} = \frac{R\ \Delta\theta}{\Delta t}\ ;\ u = -\frac{\Delta y}{\Delta t} \Rightarrow\ \frac{v_m}{R\ \Delta\theta} = -\frac{u}{\Delta y} \Rightarrow\ v_m = -u\frac{R\,\Delta\theta}{\Delta y}$$

En el límite escribimos $v = -u\dfrac{R\ d\theta}{dy}$

De la figura 2 se deduce:

$$y = R\cos\theta \Rightarrow \quad dy = -R\ \text{sen}\theta\ d\theta \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dy} = -\frac{1}{R\ \text{sen}\,\theta}$$

Finalmente:

$$v = u\,R\,\frac{1}{R\,\text{sen}\,\theta} = \frac{u}{\text{sen}\,\theta}\ (1)$$

v es el módulo de un vector que es tangente a la circunferencia en cada punto. Este vector tendrá una componente sobre el eje X y otra sobre el eje Y. En la figura 3 se ha dibujado este hecho.

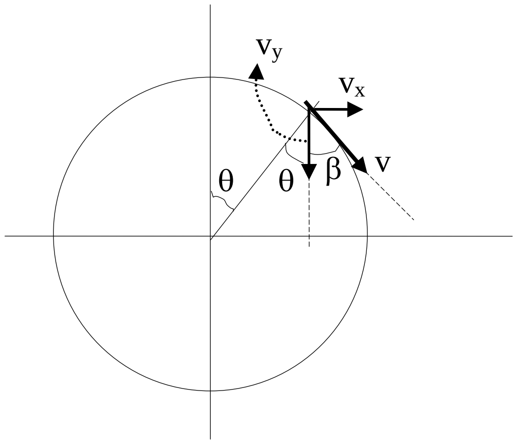


Fig.3

$$v_y = v\cos\beta = v\,\text{sen}\,\theta = \frac{u}{\text{sen}\ \theta}\cdot\text{sen}\,\theta = u\ \ ;\ v_x = v\,\text{sen}\,\beta = v\cos\theta = \frac{u}{\text{sen}\,\theta}\cdot\cos\theta = \frac{u}{\text{tag}\,\theta}\ (2)$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que la velocidad v tiene en cualquier punto de la circunferencia una componente sobre el eje Y constante y de módulo u. La componente x es variable.

Como M recorre una circunferencia posee aceleración centrípeta cuyo módulo es:

$$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{u^2}{R\,\text{sen}^2\theta}\quad (3)$$

Calculamos las componentes del vector aceleración sobre los ejes coordenados

La aceleración sobre el eje Y es nula ya que la componente de la velocidad es u y se mantiene constante. La componente de la aceleración sobre el eje X vale:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u}{\tan\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{-u\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = -\frac{u}{\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\left(-\frac{1}{R\operatorname{sen}\theta}\right)\cdot(-u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad a_x = -\frac{u^2}{R\operatorname{sen}^3\theta} \quad (4)$$

El signo menos de la ecuación anterior indica que la componente sobre el eje X tiene sentido contrario al positivo

c) De la figura 4 se deduce que en el intervalo de tiempo t, el ángulo ha pasado de valer cero a valer θ.

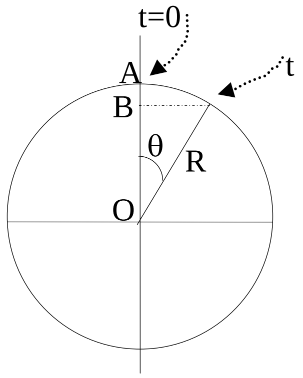


Fig. 4

$$\cos\theta = \frac{OB}{R} = \frac{R - AB}{R} = 1 - \frac{u}{R}t \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arco}\cos\left(1 - \frac{u}{R}t\right) \quad (5)$$

Alternativa

En la posición M_1 de la fig.2; correspondiente a un instante cualquiera t, en el que la posición angular $\theta(t) = \theta$ es cualquier ángulo, el vector de posición respecto del centro de la circunferencia es.

$$\vec{r} = R\,sen\theta\,\vec{i} + R\,cos\theta\,\vec{j}$$

El vector velocidad.

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\,R\,cos\theta\vec{i} - \dot{\theta}\,R\,sen\theta\,\vec{j}$$

Como la velocidad según el eje Y es constante y vale –u podemos igualar:

$$-\dot{\theta}R\,sen\theta = -u \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{u}{R\,sen\,\theta}$$

Sustituyendo:

$$\vec{v} = \frac{u\,R}{R\,sen\theta}cos\theta\,\vec{i} - u\,\vec{j} = \frac{u}{tg\theta}\vec{i} - u\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{u^2}{tg^2\theta} + u^2} = \frac{u}{tg\theta}\sqrt{1 + tg^2\theta} = \frac{u}{tg\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \frac{u}{sen\,\theta}$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración:

$$|\overrightarrow{a_N}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{u^2}{R\ sen^2\theta}$$

$$|\overrightarrow{a_t}| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = -\frac{u\ cos\theta}{sen^2\theta}\ \dot{\theta} = -\ \frac{u^2}{R}\frac{cos\theta}{sen^3\theta} \qquad (6)$$

El vector aceleración y sus componentes cartesianas, se obtienen de derivar respecto del tiempo el vector velocidad.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{u\,\frac{1}{\cos^2\theta}}{tg^2\theta}\dot{\theta}\vec{i} = -\ \frac{u^2}{R\ \ sen^3\ \theta}\vec{i}$$

Si hacemos una aplicación para el instante en el que la posición angular es de $\theta = 90º$.

$$|\overrightarrow{a_N}| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{u^2}{R\ sen^2 90} = \frac{u^2}{R}; \qquad |\overrightarrow{a_t}| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = -\frac{u}{R}\frac{\cos 90}{sen^3 90} = 0$$

$$\vec{a} = -\ \frac{u^2}{R\ \ sen^3\ 90}\vec{i} = -\ \frac{u^2}{R}\vec{i}$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{u}{R \cdot sen\ \theta}$$

Separando variables e integrando resulta:

$$-cos\theta = \frac{u}{R}t + C$$

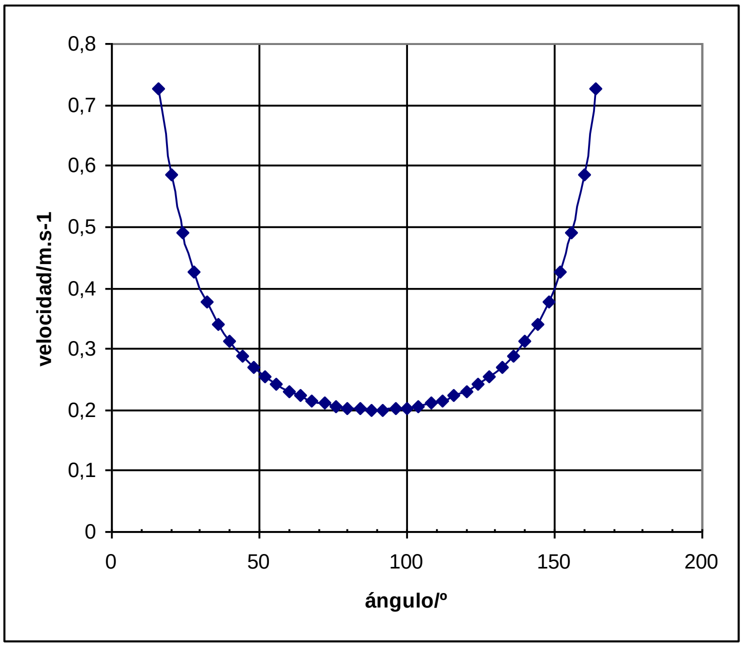
Para $t = 0$; $\theta = 0$ y $cos\ 0 = 1$; con lo que la constante $C = -1$

Resultando finalmente que las posiciones angulares del punto M varían con el tiempo por la ecuación:

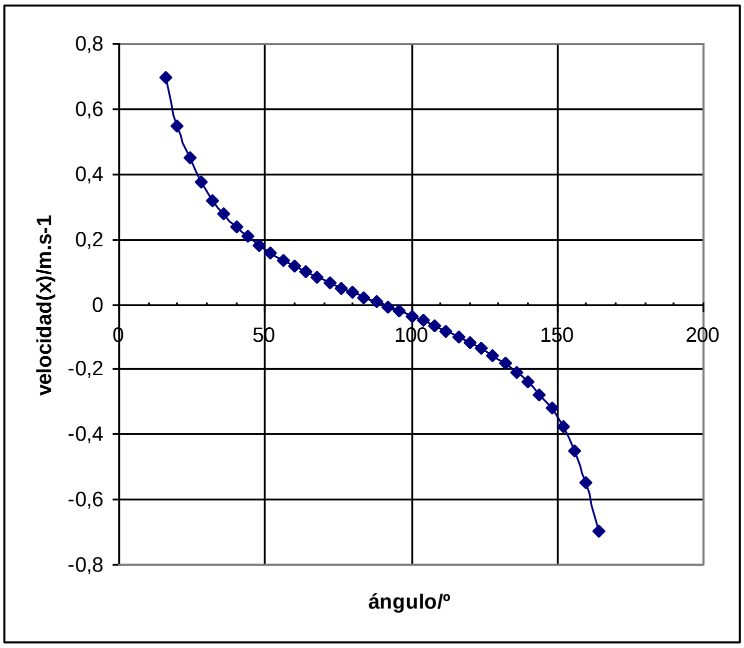
$$\cos\theta = 1 - \frac{u}{R}\ t$$

Las gráficas son las siguientes:

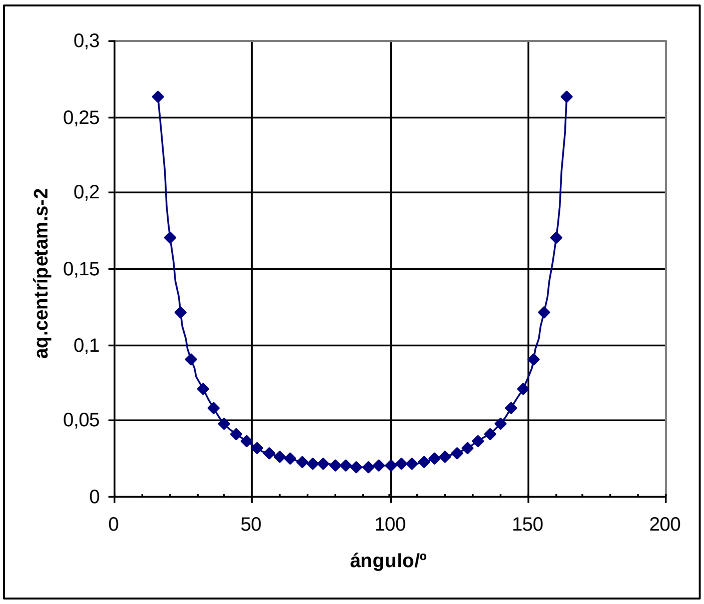
Esta gráfica corresponde a la ecuación (1)



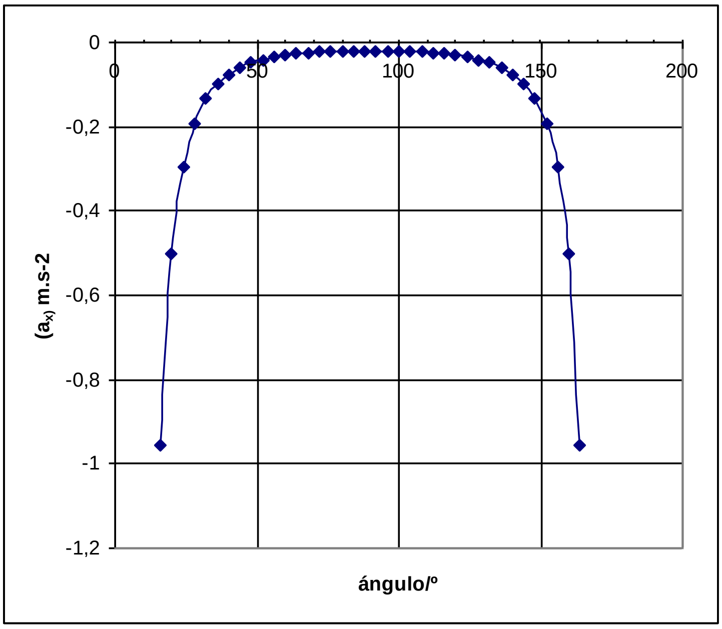
Esta gráfica corresponde a la ecuación (2)



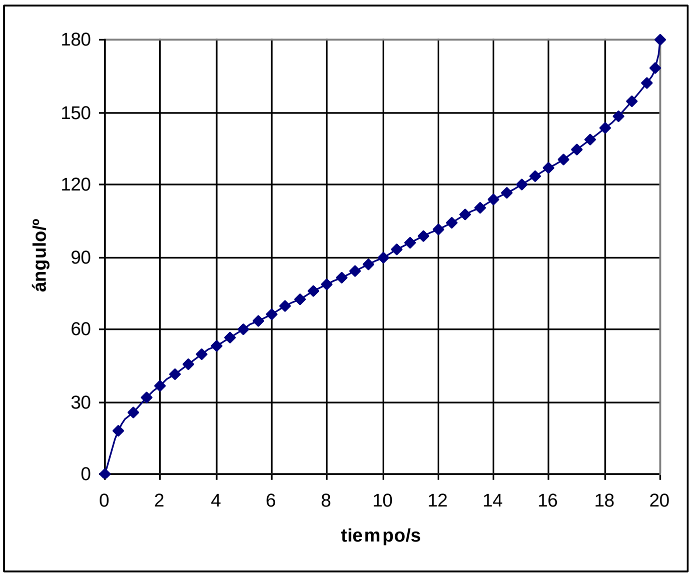
Esta gráfica corresponde a la ecuación (3)



Esta gráfica corresponde a la ecuación (4)



Esta gráfica corresponde a la ecuación (5)



Esta gráfica corresponde a la ecuación (6)