OLIMP-PVARIADOS5-2019

489.-Un gas ideal monoatómico ocupa un volumen V_1 a la presión P_1 y a la temperatura T_1. Ese mismo gas ocupa otro volumen V_2 a la presión P_2 y a la temperatura T_2. Si se unen ambos volúmenes cuáles serán la presión y la temperatura. Los volúmenes están termoaislados del espacio circundante.

Al ser gases ideales los volúmenes son aditivos, por tanto, el volumen de la mezcla es la suma de los volúmenes

$$V = V_1 + V_2$$

Calculamos los moles de cada uno de los gases

$$n_1 = \frac{P_1 V_1}{R\,T_1} \quad ; \quad n_2 = \frac{P_2 V_2}{R\,T_2}$$

Estos moles se encuentran después de la mezcla en el volumen V y a una presión que designamos con P.

$$P(V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) R\,T = \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} \right) T \qquad (1)$$

La energía de cada molécula de gas es directamente proporcional a la temperatura.

La energía que aporta cada gas es

$$E_1 = n_1 K\,T_1 \quad ; \quad E_2 = n_2 KT$$

Teniendo en cuenta que el sistema está aislado la energía se conserva

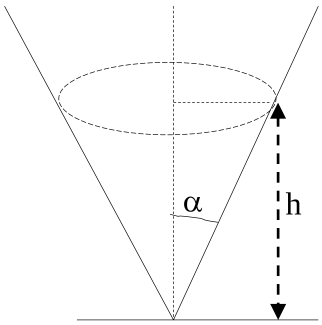
$$n_1 K\,T_1 + n_2 K\,T_2 = (n_1 + n_2) K\,T \;\Rightarrow\; \frac{n_1 T_1}{n_1 + n_2} + \frac{n_2 T_2}{n_1 + n_2} = T \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T = \frac{\frac{P_1 V_1}{R\,T_1} \cdot T_1 + \frac{P_2 V_2}{R\,T_2} \cdot T_2}{\frac{P_1 V_1}{R\,T_1} + \frac{P_2 V_2}{R\,T_2}} = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2}} = T_1 T_2 \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1} \qquad (2)$$

Despejamos T de la ecuación (1) y la igualamos con la ecuación (2)

$$\frac{P(V_1 + V_2)}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1} T_1 T_2 = T_1 T_2 \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1} \;\Rightarrow\; P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V_1 + V_2}$$

490.- Una partícula de masa m describe una circunferencia, sin rozamiento, a lo largo de la pared de un cono de ángulo α tal como se observa en la figura. El plano que contiene a la circunferencia es paralelo al suelo y está a una altura h sobre él. El momento angular de la partícula se designa por L.
a) Encontrar el valor de h en función de L, m , g y α.
b) Calcular la energía mecánica de la partícula en función de h, Tomar el suelo como referente de energía potencial nula
c) Suponiendo que existe rozamiento entre la superficie del cono y la partícula, siendo el coeficiente de rozamiento μ, determinar la fuerza mínima que se debe ejercer sobre ella para que se desplace a velocidad constante en módulo.



a) Sobre la partícula de masa m actúan dos fuerzas: el peso mg perpendicular al suelo y N perpendicular a la pared del cono.(Fig.1).

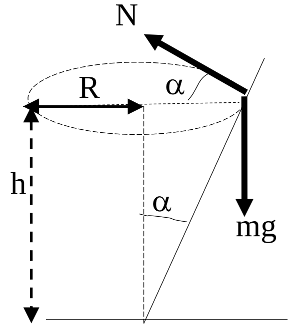


Fig.1

La componente horizontal de N es la fuerza centrípeta que la partícula necesita para describir la circunferencia y la componente vertical y dirigida hacia arriba es igual al peso de la partícula y por ello ésta se mantiene en el plano horizontal.

$$N\cos\alpha = \frac{m v^2}{R} \quad ; \quad N\,\text{sen}\alpha = mg \quad (1)$$

El módulo del momento angular L de la partícula es   L= mvR..

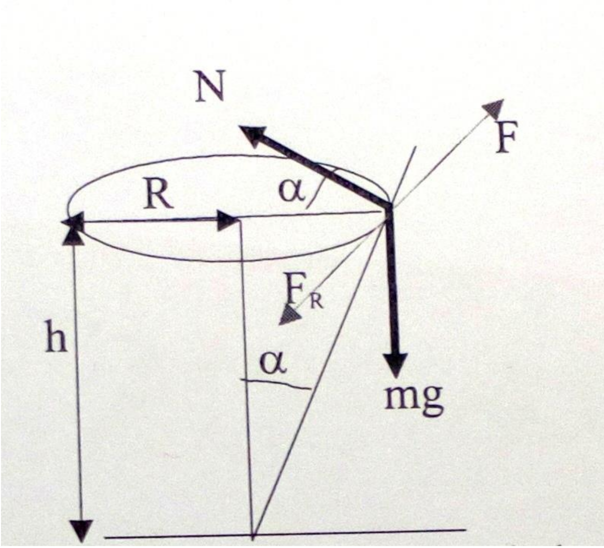
Dividiendo entre sí las ecuaciones de (1)

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{g R}{v^2} \;\Rightarrow\; v = \frac{L}{mR} \;\Rightarrow\; \text{tag}\,\alpha = \frac{g R \cdot m^2 R^2}{L^2} \;\Rightarrow\; R^3 = \frac{\text{tag}\,\alpha\; L^2}{m^2\, g} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tag}\,\alpha = \frac{R}{h} \;\Rightarrow\; h^3 \left(\text{tag}\,\alpha\right)^3 = \frac{\text{tag}\,\alpha\, L^2}{m^2\, g} \;\Rightarrow\; h = \sqrt[3]{\frac{L^2}{m^2 g \left(\text{tag}\,\alpha\right)^2}}$$

b) $E_m = m g h + \frac{1}{2} m v^2 = m g h + \frac{1}{2} m \frac{g R}{\text{tag}\,\alpha} = m g h + \frac{1}{2} m \frac{g}{\text{tag}\,\alpha} h\, \text{tag}\,\alpha = \frac{3}{2} m g h$

c) La fuerza mínima que habría que aplicar a la partícula para que se moviera en su trayectoria a velocidad constante debería ser tal que la suma de las fuerzas aplicadas a la misma, en la dirección de su movimiento en todo instante, fuera nula.
La fuerza de rozamiento es en cada posición de la trayectoria tangencial a la misma y de sentido opuesto a su movimiento, en consecuencia, habría de aplicarse una fuerza igual y opuesta a la fuerza de rozamiento $\vec{F} = -\vec{F}_R$



Nuestro propósito es calcular loa fuerza de rozamiento, ya que una vez conocida se sabrá la otra fuerza. El módulo de la fuerza de rozamiento es: $F = \mu N$ .La fuerza N proporciona dos componentes: una la fuerza centrípeta y otra la que equilibra el peso de la partícula.

A partir de las ecuaciones (1), se deduce

$$N^2\cos^2\alpha = \left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 \quad ; \quad N^2 sen^2\alpha = (mg)^2 \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores

$$R = h\,tag\,\alpha \;\; ; \;\; v = \frac{L}{m\,R} = \frac{L}{m\,h\,tag\,\alpha} \quad ; \;\; h = \sqrt[3]{\frac{L^2}{m^2 g\;tag\,\alpha^2}} \;\Rightarrow \quad h^3 = \frac{L^2}{m^2 g\;tag\,\alpha^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h^3 = \frac{L^2}{m^2 g\;tag\,\alpha^2} = \frac{v^2\,m^2 h^2\;tag^2\alpha}{m^2 g\;tag\,\alpha^2} \;\Rightarrow \quad v^2 = g\,h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = m\sqrt{\frac{v^4}{R^2} + g^2} = m\sqrt{\frac{g^2 h^2}{h^2 tag^2\alpha} + g^2} = m\,g\sqrt{1 + \frac{1}{tag^2\alpha}}$$

La fuerza de rozamiento

$$F_R = \mu\,N = \mu\,m\,g\sqrt{1 + \frac{1}{tag^2\alpha}}$$

La fuerza que se debe aplicar es de la misma dirección, igual módulo y sentido contrario

$$\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F}_R\right| = \mu\,m\,g\sqrt{1 + \frac{1}{tag^2\alpha}}$$

491.- Un punto está obligado a moverse por la rama positiva de la cúbica $x=y^3/3$ y su movimiento vertical viene dado por $y=t^2/4$ donde x e y se miden en centímetros y t en segundos. Determinar la velocidad y aceleración del punto para t= 2 s.

Propuesto en el libro Mecánica de J.L.Meriam

La coordenada y nos la dan en función del tiempo y la coordenada x se puede poner en función del tiempo

$$x = \frac{y^3}{3} = \frac{\left(\frac{t^2}{4}\right)^3}{3} = \frac{t^6}{192}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\right) = \frac{t}{2} \quad ; \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^6}{192}\right) = \frac{6t^5}{192} = \frac{t^5}{32} \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{t^{10}}{1024} + \frac{t^2}{4}} \quad ; \quad v(2s) = \sqrt{\frac{2^{10}}{1024} + \frac{4}{4}} = \sqrt{2}\ \frac{cm}{s}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^5}{32}\right) = \frac{5t^4}{32} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{25}{1024}t^8 + \frac{1}{4}} \quad ; \quad a(2s) = \sqrt{\frac{25\cdot 2^8}{1024} + \frac{1}{4}} = \sqrt{6,5} = \frac{\sqrt{26}}{2}\ \frac{cm}{s^2}$$

El problema lo resolvemos empleando el cálculo vectorial

El vector de posición respecto de un origen de referencia situado en el origen de coordenadas, al tratarse de un movimiento plano es:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = \frac{t^2}{192}\vec{i} + \frac{t^2}{4}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = \frac{t^5}{32}\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j}$$

La velocidad a t= 2 s

$$\vec{v}(2s) = \frac{2^5}{32}\vec{i} + \frac{2}{2}\vec{j} = \vec{i} + \vec{j} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}(2s)| = \sqrt{2}\ \frac{cm}{s}$$

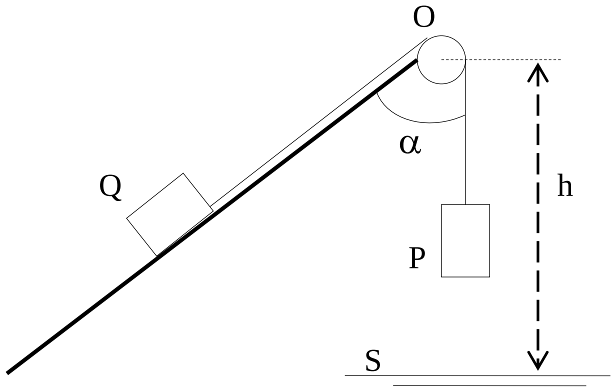
El vector aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j}$$

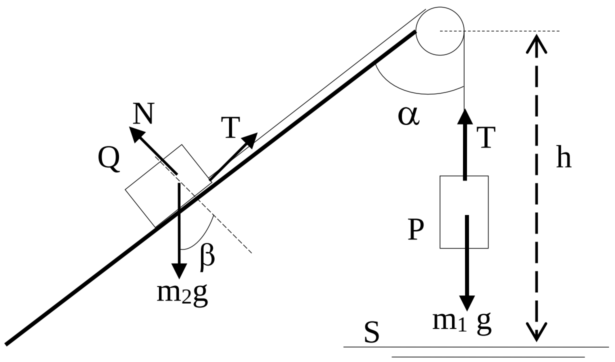
El vector aceleración a los dos segundos

$$\vec{a}(2s) = \frac{5 \cdot 2^4}{32}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \Rightarrow \left|\vec{a}(2s)\right| = \sqrt{\left(\frac{80}{32}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{6,5} = \frac{\sqrt{26}}{2}\ \frac{cm}{s^2}$$

492.- En el dispositivo de la figura se supone que no hay rozamientos y la polea carece de masa. La masa de P es m_1; e inicialmente está en lo alto (punto O) sin velocidad inicial. La masa de Q es m_2 y la longitud de la cuerda es L y carece de masa. La masa P se deja en libertad y recorre la distancia h y ahí se detiene de forma prácticamente instantánea y a partir de ese instante la masa Q sigue desplazándose hacia arriba y al llegar a O su velocidad es nula. Se pide el valor de h, expresándolo en función de las masas, del ángulo α y la longitud de la cuerda.



Cuando la masa P recorre la distancia h está ligada a la masa Q que se mueve hacia arriba del plano inclinado y ambas llevan la misma velocidad durante ese trayecto. Pero al llegar P a S y pararse, la cuerda se afloja y la masa Q queda desligada de P y se desliza hacia arriba del plano hasta llegar a O sin velocidad inicial.
Analizamos el movimiento de las dos masas cuando aún están ligadas.



Las fuerzas que actúan sobre P son su peso m_1g y la tensión T de la cuerda y sobre Q su peso m_2g, la tensión de la cuerda y la fuerza N con que el plano empuja al cuerpo
Aplicamos a cada masa la segunda ley de Newton

$$m_1g - T = m_1a \quad ; \quad T - m_2g\,\mathrm{sen}\,\beta = m_2a \quad \Rightarrow \quad T - m_2g\cos\alpha = m_2a$$

A partir de las dos ecuaciones eliminamos T y tenemos en cuenta, tal como hemos hecho en la ecuación anterior, que los ángulos α y β son complementarios.

$$T = m_1g - m_1a \;\; ; \;\; T = m_2a + m_2g\;\cos\alpha \;\Rightarrow\; m_1g - m_1a = m_2a + m_2g\;\cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a(m_1 + m_2) = g(m_1 - m_2\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{m_1 - m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2} = g\,Y$$

Por comodidad en el cálculo hemos hecho $Y = \dfrac{m_1 - m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2}$. .Para que haya

movimiento descendiente de P se debe cumplir que $m_1 > m_2\cos\alpha$

Las ecuaciones cinemáticas de la masa P son.

$$h = \frac{1}{2}a\,t^2 \qquad v = a\,t \quad \Rightarrow \quad v = a\sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{2ha} = \sqrt{2hgY}$$

Esta velocidad de P es la misma que tiene Q y dado que a partir de este instante la masa Q está desligada de P, seguirá un movimiento retardado ascendente por el plano con una aceleración constante $a_Q = -g\,\mathrm{sen}\beta = -g\cos\alpha$ y una velocidad inicial . $v_o = \sqrt{2hgY}$.
La longitud que recorre Q hasta llegar a lo alto del plano inclinado es L-h y las ecuaciones de su movimiento son:

$$L - h = \sqrt{2hgY}\,t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\,t^2 \quad ; \quad v_f = 0 = \sqrt{2hgY} - g(\cos\alpha)t$$

Despejando t en la segunda ecuación y sustituyéndolo en la primera

$$L - h = \sqrt{2hgY}\cdot\frac{\sqrt{2hgY}}{g\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2hgY}}{g\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{2hgY}{g\cos\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = L - \frac{hgY}{g\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad hg\cos\alpha = Lg\cos\alpha - hgY \;\Rightarrow h\;(\cos\alpha + Y) = L\;\cos\alpha \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{L\cos\alpha}{\cos\alpha + Y} = \frac{L\cos\alpha}{\cos\alpha + \dfrac{m_1 - m_2\cos\alpha}{m_1 + m_2}} = \frac{L\cos\alpha\;(m_1 + m_2)}{m_1(1 + \cos\alpha)} = \frac{L\cos\alpha\left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)}{1 + \cos\alpha}$$

493.- Un material aislante tiene forma de semicircunferencia de radio R. La mitad de esa circunferencia tiene distribuida de forma uniforme una carga +Q y la otra mitad una carga –Q.
Calcular el campo en el centro P de esa semicircunferencia.

En la figura 1 se ha representado el sistema. En el cuadrante primero se ha situado la carga negativa y en el segundo la carga positiva

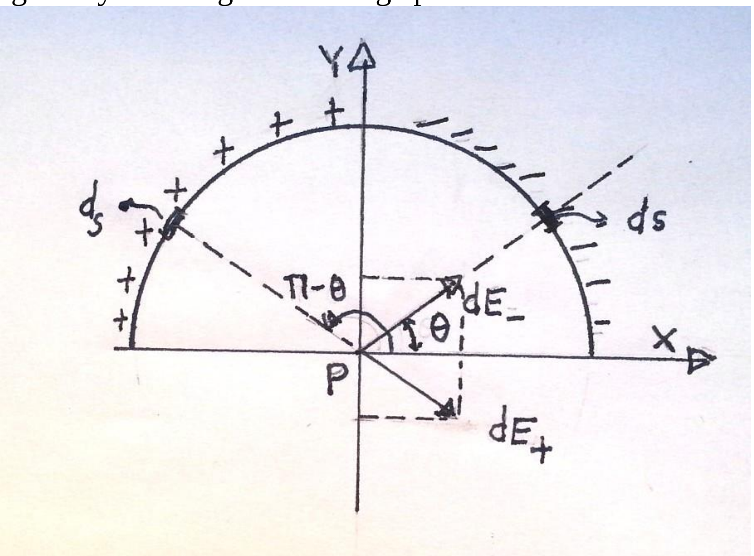


Fig 1

En la parte negativa escogemos un elemento del arco ds el cual crea un campo vectorial de módulo dE_{-} formando el vector un ángulo θ con el semieje positivo de abscisas. Existe en la parte positiva un elemento ds simétrico al anterior respecto del eje Y que crea un campo vectorial de módulo dE_{+}, siendo $dE_{-} = dE_{+}$.
De la figura 1 se deduce que las componentes sobre el eje Y de los campos se anulan entre sí, pero se suman respecto del eje X., en consecuencia, sabemos que el campo total está sobre el eje X y en sentido positivo y por ello prestamos nuestra atención a la componente sobre el eje X.

$$dE_{-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2} \quad \Rightarrow (dE_{-})_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2}\cos\theta$$

La densidad de carga en cada cuadrante es $\lambda = \dfrac{Q}{\pi\dfrac{R}{2}} \quad \Rightarrow \quad dq = \lambda\, ds = \dfrac{2Q}{\pi R}\cdot ds$

Además $ds = R\, d\theta$, luego

$$(dE_-)_X = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi R^3}\,ds\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^3}R\,d\theta\cos\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^2}d\theta\,\cos\theta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (dE_-)_X = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta \;\Rightarrow (E_-)_X = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\pi R^2}\operatorname{sen}\theta\Big|_o^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi^2\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}$$

El módulo del campo creado por la parte positiva es el mismo que el de la parte negativa

$$E_T = (E_-)_x + (E_+)_X = 2(E_-)_X = \frac{1}{\pi^2\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}$$

El vector campo en función del unitario $\vec{i}$

$$\vec{E}_T = \frac{Q}{\pi^2\varepsilon_o R^2}\vec{i}$$