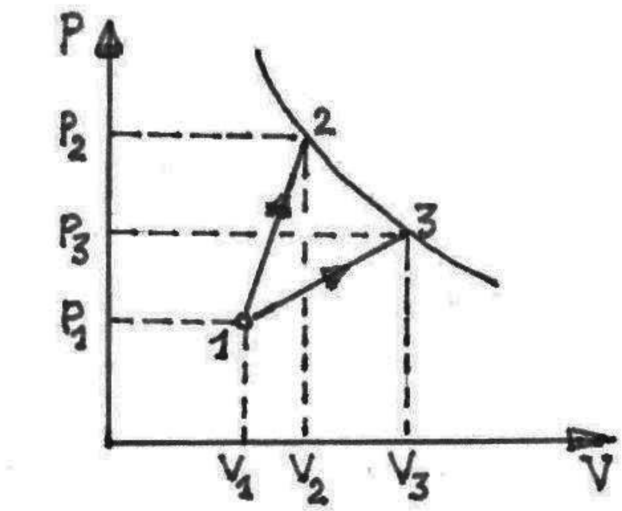
PROBLEMAS VARIADOS 5-2018

443.- Un mol de un gas ideal inicialmente en el punto 1 de la gráfica inferior, efectúa la transformación 1-2. Ese mismo gas ahora realiza la transformación 1-3. Los puntos 2 y 3 pertenecen a una isoterma de temperatura T. a) Determinar qué proceso de los dos se verifica con mayor aporte de calor.



Olimpiadas de Moscú

a) Las coordenadas termodinámicas del los puntos 1 , 2 y 3 las designamos :

$$(P_1, V_1, T_1) \quad ; (P_2, V_2, T) \quad ; (P_3, V_3, T)$$

La primera ley de la termodinámica se expresa mediante la ecuación

$$\Delta U = C_v\left(T_{final} - T_{inicial}\right) = Q + W$$

El primer miembro de la ecuación anterior es igual para el proceso 1-2 que 1-3, por tanto, la diferencia de los calores viene medida por la diferencia de los trabajos.

Los trabajos están medidos por los valores numéricos de las áreas de los trapecios (V_1, 2 , V_2) y (V_1 , 3 , V_3.)

$$W_{13} = \left(\frac{P_1 + P_3}{2}\right)\cdot\left(V_3 - V_1\right) \quad ; \quad W_{12} = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)\cdot\left(V_2 - V_1\right)$$

$$W_{13}-W_{12}=\frac{P_1V_3}{2}-\frac{P_1V_1}{2}+\frac{P_3V_3}{2}-\frac{P_3V_1}{2}-\frac{P_1V_2}{2}+\frac{P_1V_1}{2}-\frac{P_2V_2}{2}+\frac{P_2V_1}{2}$$

Teniendo en cuenta que 2 y 3 se encuentran en la isoterma de temperatura T.

$$P_2V_2=P_3V_3$$

Simplificando en la ecuación resulta:

$$W_{13}-W_{12}=\frac{P_1V_3}{2}-\frac{P_3V_1}{2}-\frac{P_1V_2}{2}+\frac{P_2V_1}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow W_{13}-W_{12}=\frac{P_1}{2}\left(V_3-V_2\right)+\frac{V_1}{2}\left(P_2-P_3\right)$$

En la ecuación anterior P_1 es +. ; V_3-V_2 es + ; V_1 es + y P_2-P_3 es +, por consiguiente, la diferencia W_{13}-W_{12} es +, esto es, $Q_{13}>Q_{12}$.

444.- Una figura tridimensional de volumen V, expuesta al aire, consta de un cilindro de radio R y altura H. Una de las bases del cilindro se apoya en un suelo horizontal y sobre la otra base se asienta un cubo (exaedro) de lado λ. La base del cubo está inscrita en el círculo de la base del cilindro.
a) Determinar las medidas de la figura si se desea que la superficie de la figura expuesta al aire sea la mínima posible.
b) Representar la superficie frente al radio del cilindro cuando V = 1 m^3.
c) Con una figura semejante a la anterior y con superficie expuesta al aire S, determinar sus dimensiones si el volumen de la figura es máximo
d) Representar el volumen frente al radio del cilindro cuando S = 6 m^2
e) Calcular la altura del centro de masas de la figura para el caso b). Toda la figura esta hecha con el mismo material.

a) El volumen de la figura es:

V= Volumen del cilindro + Volumen del cubo: $V=\pi R^2H+\lambda^3$

El área expuesta al aire es la suma del área lateral del cilindro más el área de la base superior menos el área de la base del cuadrado que se apoya sobre esa base más el área de las cinco restantes caras del cubo

$$S = 2\pi R\,H + \left(\pi R^2 - \lambda^2\right) + 5\lambda^2 = 2\pi R\,H + \pi R^2 + 4\,\lambda^2$$

Entre el lado del cubo y el radio de la base del cilindro existe una relación:

$$\lambda^2 + \lambda^2 = 4R^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = R\sqrt{2}$$

Sustituyendo en V y S el valor de λ

$$V = \pi R^2 H + 2^{\frac{3}{2}} R^3 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{V - 2^{\frac{3}{2}} R^3}{\pi R^2} \quad (1)$$

$$S = 2\pi R\left(\frac{V - 2^{\frac{3}{2}} R^3}{\pi R^2}\right) + \pi R^2 + 4 \cdot 2R^2 = \frac{2V}{R} - 2^{\frac{5}{2}} R^2 + \pi R^2 + 8R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{2V}{R} + R^2\left(\pi + 8 - 2^{\frac{5}{2}}\right) \quad (2)$$

Si nos piden el valor mínimo de S, derivamos S=f(R) con respecto a R e igualamos a cero

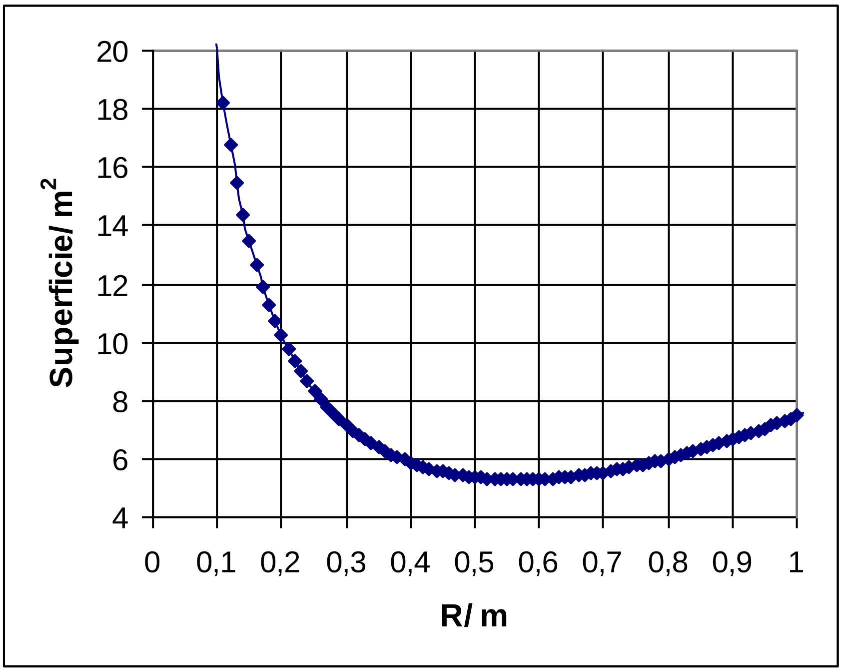
$$\frac{dS}{dR} = -\frac{2V}{R^2} + 2R\left(\pi + 8 - 2^{\frac{5}{2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2V = 2R^3\left(\pi + 8 - 2^{\frac{5}{2}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{V}{\pi + 8 - 2^{\frac{5}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{V}{5,485}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,567.V^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

$$\lambda = \sqrt{2} \cdot 0,567.V^{\frac{1}{3}} = 0,802V^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

$$H = \frac{V - 2^{\frac{3}{2}}\left(0,567V^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\pi\left(0,567^2 \cdot V^{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{V - 0,516V}{1,01V^{\frac{2}{3}}} = \frac{0,484V}{1,01V^{\frac{2}{3}}} = 0,480V^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

b) En la ecuación (2) sustituimos V por 1 m^3 y representamos S frente a R



c) Volumen máximo

$$V = \pi R^2 H + \lambda^3 = \pi R^2 H + 2^{\frac{3}{2}} R^3 \quad ; \quad S = 2\pi R H + \pi R^2 + 4\lambda^2 = 2\pi R H + \pi R^2 + 8R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; H = \frac{S - R^2(8+\pi)}{2\pi R} \Rightarrow \qquad V = \pi R^2 \frac{S - R^2(8+\pi)}{2\pi R} + 2^{\frac{3}{2}} R^3 = \frac{SR}{2} - \frac{R^3(8+\pi)}{2} + 2^{\frac{3}{2}} R^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; V = \frac{SR}{2} - R^3\left(\frac{8+\pi}{2} - 2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{SR}{2} - 2{,}742\,R^3 \qquad (6)$$

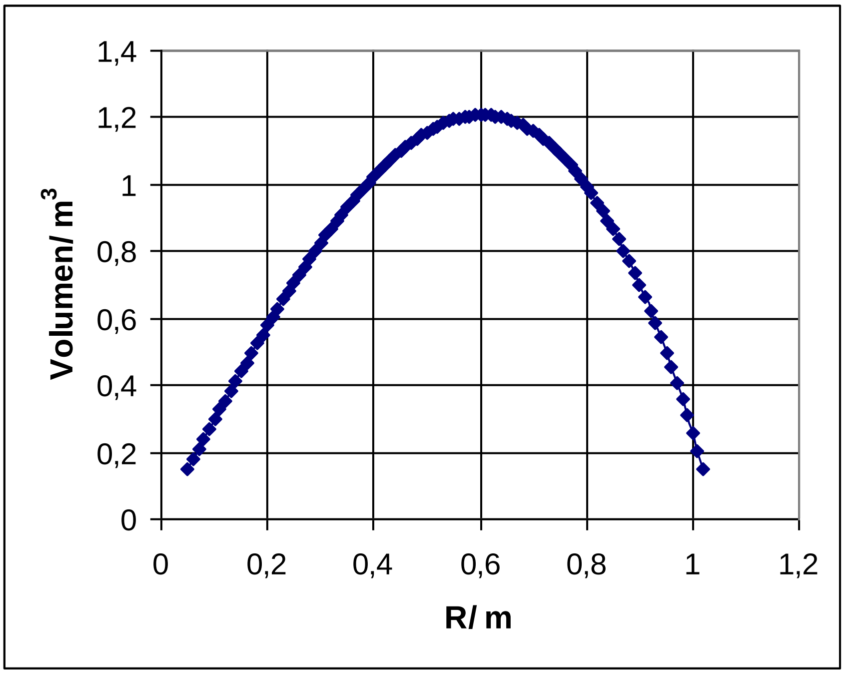
Derivamos V=f(R) respecto de R e igualamos a cero

$$\frac{dV}{dR} = \frac{S}{2} - 8{,}227\,R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{S}{16{,}45}} = 0{,}247\; S^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \sqrt{2}\,R = \sqrt{2} \cdot 0{,}247 \cdot S^{\frac{1}{2}} = 0{,}349\; S^{\frac{1}{2}}$$

$$H = \frac{S}{2\pi\, 0{,}349 \cdot S^{\frac{1}{2}}} - \frac{0{,}247 \cdot S^{\frac{1}{2}}(8+\pi)}{2\pi} = 0{,}456 S^{\frac{1}{2}} - 0{,}438 S^{\frac{1}{2}} = 0{,}018 S^{\frac{1}{2}}$$

d) En la ecuación (2) sustituimos S por 6 m^2 y representamos V frente a R



d) Datos de la primera figura: V= 1 m^3 ; R = 0,567 m ; λ = 0,802 m ; H = 0,480 m

Tomamos el eje Z en el centro de la base y sentido positivo hacia arriba desde el suelo y dada su simetría, el centro de masas estará sobre este eje.

$$z_{CM} = \frac{m_{cil} \cdot z_{cil} + m_{cubo} z_{cubo}}{m_{cil} + m_{cubo}} = \frac{V_{cil}\, \rho \cdot \frac{0{,}480}{2} + V_{cubo}\, \rho \left(0{,}480 + \frac{0{,}802}{2}\right)}{V_{cubo}\, \rho + V_{cubo}\, \rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{CM} = \frac{\pi \cdot 0{,}567^2 \cdot 0{,}480 \cdot 0{,}240 + 0{,}802^3 \cdot 0{,}881}{\pi \cdot 0{,}567^2 \cdot 0{,}480 + 0{,}802^3} = 0{,}61 \text{ m}$$

445.- Un conductor cilíndrico muy largo de radio R está recorrido por una corriente de intensidad I. El mencionado conductor tiene un hueco de radio r y está situado como indica la figura 1. O O´ = b. En la figura 1 se representa una sección del conductor R situada sobre el plano XY

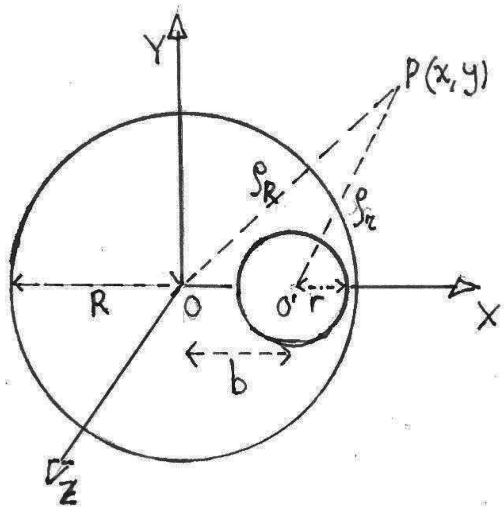


Fig1

La corriente se encuentra uniformemente distribuida sobre la parte sólida del conductor y está dirigida según el eje +Z, esto es, perpendicular al plano del papel y saliendo de él.
a) Calcular el módulo campo magnético en un punto P situado fuera del conductor y de coordenadas (x,y,0).
Universidad de Florida

Tratar de resolver el problema por integración directa es prácticamente imposible, pues falta simetría en el conductor debido al hueco. Por ello hay que recurrir a un procedimiento en que se utilicen problemas en que haya simetría.
Si todo el conductor de radio R fuese macizo el cálculo en P se hace aplicando el teorema de Ampère. Para contrarrestar el efecto del agujero se supone que el conductor de radio r es recorrido por una corriente pero de sentido contrario a la que recorre R, esto es, según el eje Z negativo. A este conductor también le podemos aplicar el teorema de Ampère pues existe simetría.
Este procedimiento ya lo hemos empleado en un problema de mecánica para calcular centros de masa (problema 116 en el almacén de la sección *Problemas para preparar una Olimpiada* (apartado Mecánica).

Teniendo en cuenta que I es la intensidad de corriente repartida uniformemente por la parte maciza del conductor con hueco, al imaginario conductor macizo c
de radio R le corresponde una intensidad

$$\frac{I}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{I_R}{\pi R^2} \Rightarrow I_R = I\frac{R^2}{R^2 - r^2}$$

Al hueco le corresponde una intensidad

$$\frac{I}{\pi\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{I_r}{\pi r^2} \Rightarrow I_r = I\frac{r^2}{R^2 - r^2}$$

Con centro en O trazamos una circunferencia de radio ρ_R y en el punto P trazamos el vector tangente a esa circunferencia.: El vector $\vec{B}_R$ y ρ_R son perpendiculares. Y el sentido del vector lo podemos determinar por la regla de la mano derecha cuya representación es la figura 2

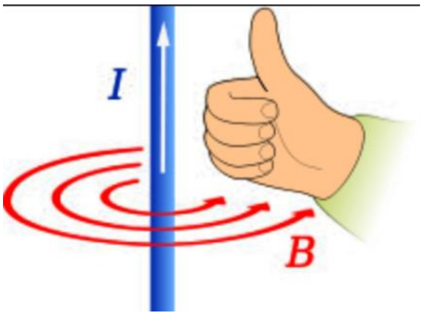


Fig.2

Con centro en O´ trazamos una circunferencia de radio ρr y en el punto P trazamos el vector $\vec{B}_r$ siguiendo la regla de la mano derecha de la figura 2, teniendo en cuenta que ahora la corriente en el hueco es de sentido contrario al del conductor macizo.

En la figura 3 hemos representado los vectores y hemos considerado unos ejes cartesianos de referencia

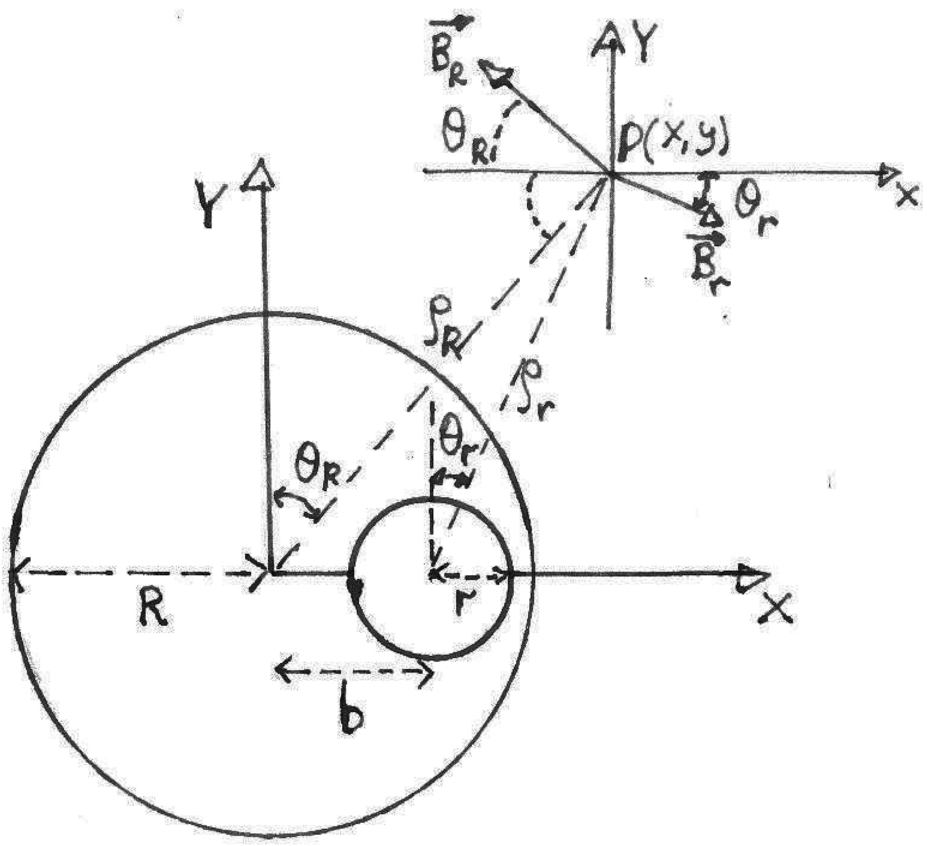


Fig.3

Los módulos de los vectores los calculamos aplicando para cada conductor el teorema de Ampère a lo largo de las correspondientes circunferencias.

$$\oint \vec{B}_R \cdot d\vec{l} = \mu_O I_R \Rightarrow B_R \cdot 2\pi\rho_R = \mu_O I_R \Rightarrow \quad B_R = \frac{\mu_o I_R}{2\pi\rho_R}$$

$$\oint \vec{B}_r \cdot d\vec{l} = \mu_O I_r \Rightarrow B_r \cdot 2\pi\rho_r = \mu_O I_r \Rightarrow \quad B_r = \frac{\mu_o I_r}{2\pi\rho_r}$$

Para calcular el campo en P debemos sumar los dos vectores $\vec{B}_R$ y $\vec{B}_r$. Empleamos el procedimiento de calcular sus componentes cartesianas y luego hacer las correspondientes sumas de sus componentes.

Componentes de $\vec{B}_R$

$$B_R(X) = -\left|\vec{B}_R\right| \cos\theta_R = -\frac{\mu_o I_R}{2\pi\rho_R}\frac{y}{\rho_R} = -\frac{\mu_o I_R}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$B_R(Y) = \left|\vec{B}_R\right| \text{sen}\,\theta_R = \frac{\mu_o I_R}{2\pi\rho_R}\frac{x}{\rho_R} = \frac{\mu_o I_R}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

Componentes de $\vec{B}_r$

$$B_r(X) = \left|\vec{B}_r\right| \cos\theta_r = \frac{\mu_o I_r}{2\pi\rho_r}\frac{y}{\rho_r} = \frac{\mu_o I_r}{2\pi}\frac{y}{(x-b)^2 + y^2}$$

$$B_r(Y) = -\left|\vec{B}_r\right| \operatorname{sen}\theta_r = -\frac{\mu_o I_r}{2\pi\rho_r}\frac{x-b}{\rho_R} = -\frac{\mu_o I_r}{2\pi}\frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2}$$

Componentes de $\vec{B}_T = \vec{B}_R + \vec{B}_r$

$$B_T(X) = -\frac{\mu_o I_R}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\mu_o I_r}{2\pi}\frac{y}{(x-b)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$B_T(X) = -\frac{\mu_o I \dfrac{R^2}{R^2 - r^2}}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\mu_o I \dfrac{r^2}{R^2 - r^2}}{2\pi}\frac{y}{(x-b)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_T(X) = \frac{\mu_o I\; y}{2\pi\left(R^2 - r^2\right)}\left[\frac{r^2}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right]}$$

$$B_T(Y) = \frac{\mu_o I_R}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\mu_o I_r}{2\pi}\frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$B_T(Y) = \frac{\mu_o I \dfrac{R^2}{R^2 - r^2}}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\mu_o I \dfrac{r^2}{R^2 - r^2}}{2\pi}\frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{B_T(Y) = \frac{\mu_o I}{2\pi\left(R^2 - r^2\right)}\left[\frac{x\,R^2}{x^2 + y^2} - \frac{(x-b)\,r^2}{(x-b)^2 + y^2} - \right]}$$

446.- N gotas de mercurio de forma esférica se cargan simultáneamente a un potencial V. Si estas gotas se unen entre sí formando una sola, calcular el potencial de ella.

Designamos con q a la carga de cada gota, r su radio y con ρ a la densidad del mercurio. Calculamos en primer lugar la carga de una gota. El campo creado por una esfera de radio r en su superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow -V = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad q = 4\pi\varepsilon_o rV \quad (1)$$

La carga de la gota única es $Q = Nq = N\cdot 4\pi\varepsilon_o rV$

La densidad de una gota pequeña es la misma que la de la gota grande de radio R

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \quad M = m\left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \quad Nm = m\left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \quad R^3 = Nr^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{N}\ r$$

Aplicamos la ecuación (1) a la gota grande radio R

$$Q = 4\pi\varepsilon_o R\,V' = N\,4\pi\varepsilon_o\,rV \quad \Rightarrow \quad V' = V\frac{Nr}{R} = V\frac{N\,r}{\sqrt[3]{N}\ r} = N^{\frac{2}{3}}V$$

447.- Una mosca vuela en dirección horizontal con velocidad -v_o, y justamente pasa por encima, a una altura H, de una gota de miel. La mosca puede desarrollar una aceleración $\vec{a}$ en cualquier dirección. Una vez elegido el vector aceleración este permanece fijo

a) Determinar cómo debe dirigir la aceleración para llegar a la miel y el tiempo que emplea en hacerlo.

b) Representar la trayectoria y la velocidad en el supuesto de que H = 1 m, v_o=0,20 m/s y a= 0,4 m/s^2

Tomamos un sistema de referencia inercial cuyo origen de coordenadas está en la gota de miel.

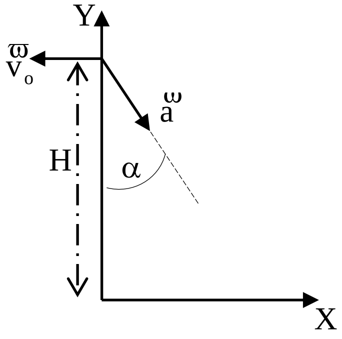


Fig.1

Consideramos el origen de tiempos cuando la mosca tiene de coordenadas (0,H). Teniendo en cuenta que al cabo del tiempo t de vuelo, la mosca debe estar en el origen de coordenadas, el vector aceleración debe formar un ángulo α con la vertical H (fig 1), de esta manera la componente horizontal del vector $\vec{a}$ puede anular la velocidad inicial y la componente vertical proporcionar velocidad en dirección vertical hacia la miel. El ángulo α dependerá del módulo de la aceleración, y ese α hemos de calcularlo en el problema..

Las ecuaciones de la velocidad de la mosca respecto del sistema de referencia de la figura 1 son:

$$v_x = -v_o + a(\operatorname{sen}\alpha)\, t = \frac{dx}{dt} \quad ; \quad v_y = -a(\cos\alpha) t = \frac{dy}{dt}$$

De las ecuaciones anteriores integrándolas se deduce:

$$x = -v_o t + a(\operatorname{sen}\alpha)\frac{t^2}{2} + Cte, \ \text{ cuando } \ t = 0 \to x = 0 \to \qquad x = -v_o t + a(\operatorname{sen}\alpha)\frac{t^2}{2}$$

$$y = -a(\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + Cte \ \ \text{ cuando } \ t = 0 \to y = H \to \qquad y = -a(\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + H$$

Si τ representa el tiempo que emplea la mosca en llegar a la miel, entonces x =0 e y =0

$$0 = -a(\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2} + H \ \Rightarrow \ \tau = \sqrt{\frac{2H}{a(\cos\alpha)}} \ \Rightarrow$$

$$0 = -v_o\tau + a(\operatorname{sen}\alpha)\frac{\tau^2}{2} = -v_o\sqrt{\frac{2H}{a(\cos\alpha)}} + \frac{a}{2}(\operatorname{sen}\alpha)\frac{2H}{a(\cos\alpha)}$$

De la última ecuación

$$v_o^2 \frac{2H}{a\cos\alpha} = \frac{H^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Rightarrow v_o^2 \frac{2}{aH} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \frac{2v_o^2}{aH}\cos\alpha - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\frac{2v_o^2}{aH} \pm \sqrt{\frac{4v_o^4}{a^2H^2}+4}}{2} = -\frac{v_o^2}{aH} \pm \sqrt{\frac{v_o^4}{a^2H^2}+1} = -\frac{v_o^2}{aH} \pm \frac{\sqrt{v_o^4 + a^2H^2}}{aH}$$

La solución válida es: $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{v_o^4 + a^2H^2} - v_o^2}{aH}$ Sustituyendo en el tiempo τ

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{a(\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{2H}{a\left(\frac{\sqrt{v_o^4 + a^2H^2} - v_o^2}{aH}\right)}} = \sqrt{\frac{2H^2}{\sqrt{v_o^4 + a^2H^2} - v_o^2}}$$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{0{,}2^4 + 0{,}4^2} - 0{,}2^2}{0{,}4} = 0{,}905$; $\alpha = 25{,}18º$; $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}425$

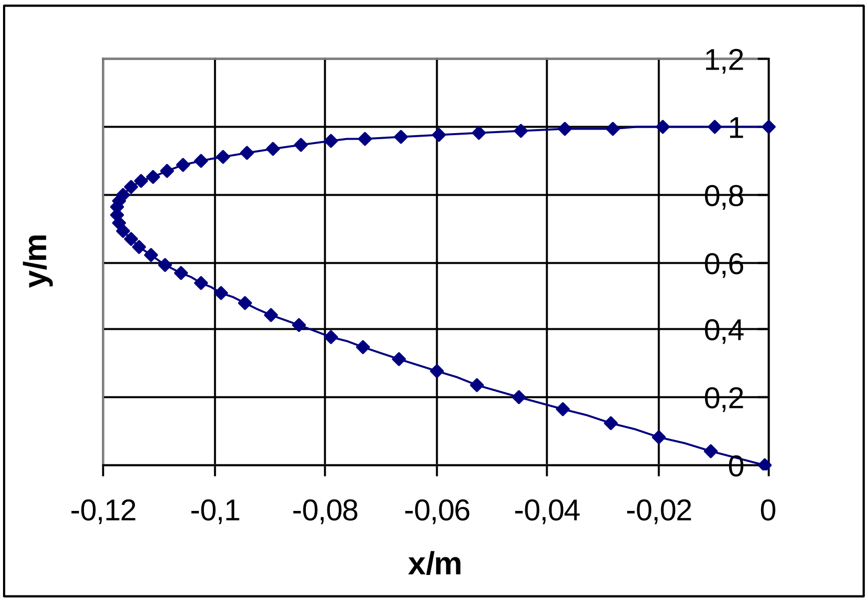
Sustituimos en las ecuaciones de las posiciones

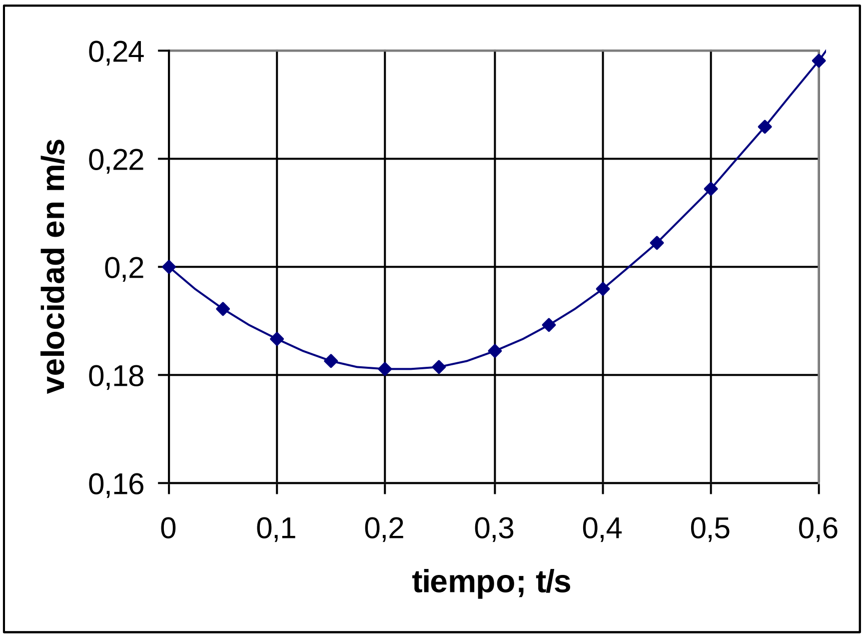
$$x = -0{,}2\,t + 0{,}4\cdot 0{,}425\frac{t^2}{2} = -0{,}2\,t + 0{,}085\,t^2 \qquad y = -0{,}4\cdot 0{,}905\frac{t^2}{2} + 1 = -0{,}181t^2 + 1$$

$$v_x = -0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}425\,t = -0{,}2 + 0{,}17\,t \ ; \ v_y = -0{,}4\cdot 0{,}905\,t = --0{,}362\,t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-0{,}2 + 0{,}17t)^2 + (-0{,}362\,t\ )^2}$$

Las gráficas correspondientes a las anteriores ecuaciones son:





Calculamos analíticamente el tiempo de la velocidad mínima

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(-0{,}2 + 0{,}17t\right)^2 + \left(-0{,}362\,t\right)^2} = \sqrt{0{,}1599\,t^2 - 0{,}068t + 0{,}04} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{0{,}3198\,t - 0{,}068}{2\sqrt{0{,}1599\,t^2 - 0{,}068t + 0{,}04}} = 0 \quad \Rightarrow \qquad t = \frac{0{,}068}{0{,}3198} = 0{,}213\,s$$