PROBLEMAS VARIADOS 5-2017
+

413.-Un recipiente cilíndrico de altura H, está lleno de un líquido cuya densidad en la superficie es ρ_o y ésta aumenta linealmente desde la superficie al fondo $2\rho_o$. En la superficie se coloca un cuerpo de volumen V y densidad ρ_c sin velocidad inicial.

a) Obtener la ecuación de la velocidad del cuerpo en función de la profundidad.

b) Si la altura del recipiente es H=1m, calcular el valor de ρ_c para que la velocidad del cuerpo sea nula en el fondo. .

c) Calcular la profundidad cuando la velocidad del cuerpo sea máxima. Obtener el valor numérico del apartado b).

Se considera despreciable la viscosidad del líquido.

a) Determinamos la densidad del líquido en función de la profundidad. En la figura 1 está representado cómo varía la densidad con la profundidad.

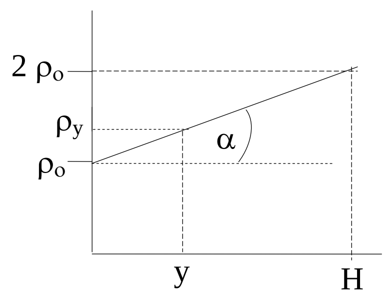


Fig. 1

De la figura 1 se deduce

$$\tan\alpha = \frac{2\rho_0 - \rho_o}{H} = \frac{\rho_y - \rho_o}{y} \Rightarrow \quad \rho_o \frac{y}{H} = \rho_y - \rho_o \Rightarrow \qquad \rho_y = \rho_o\left(1 + \frac{y}{H}\right)$$

A una profundidad y, el cuerpo está sometido a dos fuerzas: una vertical hacia abajo que es su peso y otra vertical hacia arriba que es el empuje del líquido sobre el cuerpo. La diferencia de estas fuerzas crea la aceleración descendente del cuerpo

$$V\rho_c g - V\rho_y g = V\cdot\rho_c\cdot a_y \Rightarrow \frac{g\left(\rho_c - \rho_y\right)}{\rho_c} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{dv_y}{dy}\cdot v_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\,\frac{\rho_c - \rho_o\left(1+\frac{y}{H}\right)}{\rho_c} = \frac{dv_y}{dy}\cdot v_y \Rightarrow \quad \int g\left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} - \frac{\rho_o}{\rho_c}\frac{y}{H}\right)dy = \int v_y\, dv_y$$

$$\Rightarrow \quad g\,y - g\frac{\rho_o}{\rho_c}y - \frac{\rho_o}{\rho_c}\frac{g\,y^2}{2H} = \frac{v_y^2}{2} + Cte$$

Cuando y=0 (en la superficie), la velocidad es nula y la Cte=0.

$$v_y = \sqrt{2\,g\,y - 2g\frac{\rho_o}{\rho_c}\,y - \frac{\rho_o}{\rho_c}\frac{g\,y^2}{H}} \qquad (1)$$

b)

$$0 = \sqrt{2\,g\,H - 2g\frac{\rho_o}{\rho_c}\,H - \frac{\rho_o}{\rho_c}\,g\,H} \quad \Rightarrow \quad 2 - 2\frac{\rho_o}{\rho_c} - \frac{\rho_o}{\rho_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3\frac{\rho_o}{\rho_c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho_o}{\rho_c} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_c = \frac{3}{2}\rho_o$$

c) Si la velocidad es la máxima también será un máximo el cuadrado de la velocidad.

$$v_y^2 = 2\,g\,y - 2g\frac{\rho_o}{\rho_c}\,y - \frac{\rho_o}{\rho_c}\frac{g\,y^2}{H} \Rightarrow \frac{dv_y^2}{dy} = 2\,g - 2\,g\frac{\rho_o}{\rho_c} - \frac{\rho_o}{\rho_c}\frac{2\,g\,y}{H} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\rho_o}{\rho_c} - \frac{\rho_o}{\rho_c}\frac{y}{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{H} = \left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_c}\right)\frac{\rho_c}{\rho_o} \Rightarrow \quad y = H\left(\frac{\rho_c}{\rho_o} - 1\right) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}\,m$$

414.-Una carretera tiene un ancho D = 20 m. En uno de sus bordes se colocan dos altavoces idénticos separados entre sí una distancia 2d. Sea M el punto medio de la recta que une los altavoces y O el punto que se encuentra enfrente de M en el otro borde de la carretera. Los dos altavoces está alimentados por una corriente de f=50 Hz, estando ambos en fase, siendo la velocidad del sonido 340 m/s. Determinar los máximos y mínimos que se producen a la derecha e izquierda de O, para:2d=10 m. Si se aumenta la distancia entre los altavoces calcular las posiciones de los máximos y mínimos.

Nota .Si este problema se resuelve gráficamente es preciso el uso de una hoja de cálculo.

En la figura 1 se ha representado un esquema del dispositivo

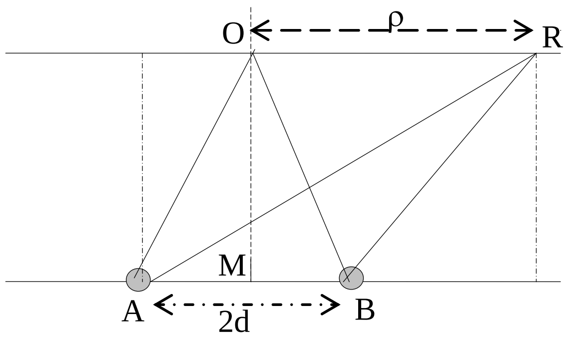


Fig.1

En figura 1, A y B representan los altavoces. R es un punto cualquiera a la derecha de O.

Las distancias AR y BR se designan como LA y LB respectivamente. De la figura se deduce:

$$LA^2 = 20^2 + (\rho + d)^2 \quad ; \quad LB^2 = 20^2 + (\rho - d)^2$$

La diferencia de marcha entre LA y LB será un máximo cuando se cumpla

$$LA - LB = k\lambda$$

Y un mínimo cuando

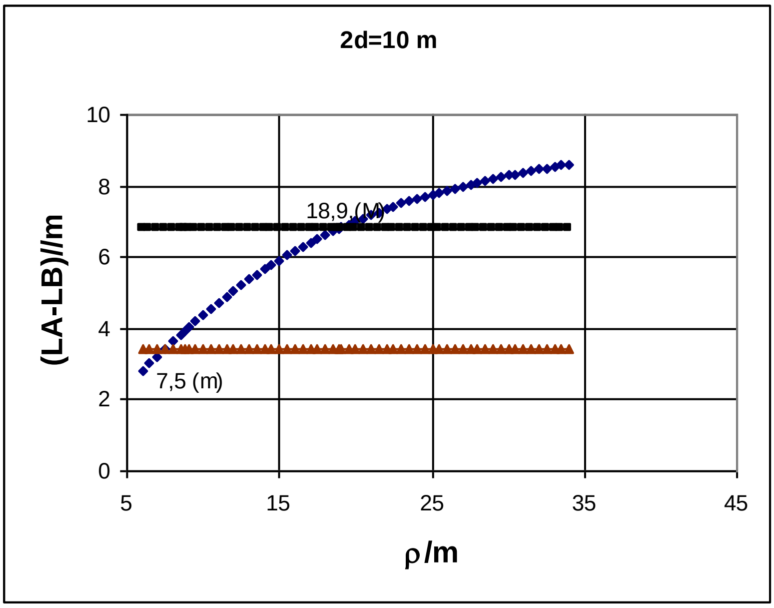
$$LA - LB = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Calculamos la longitud de onda del sonido: $\lambda = \dfrac{340\,\frac{m}{s}}{50\,s^{-1}} = 6{,}8\,m$.

$$LA = \sqrt{400 + (\rho+5)^2} \;\; ; \;\; LB = \sqrt{400 + (\rho-5)^2}; \;\; LA - LB = \sqrt{400 + (\rho+5)^2} - \sqrt{400 + (\rho-5)^2}$$

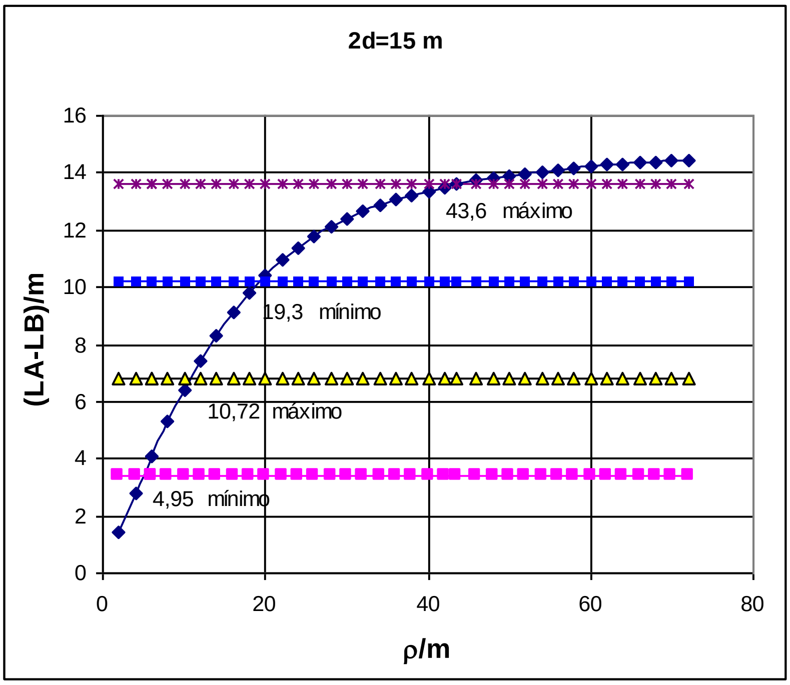
La ecuación (1) cuando 2d=10 m si es un máximo será un múltiplo de λ y un mínimo un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

La forma de resolver (2) es dar valores a ρ y obtener $L_A - L_B$ y encontrar los que cumplan las condiciones de máximo y mínimo. La forma mejor de verlo es hacer una representación gráfica utilizando la hoja de cálculo.

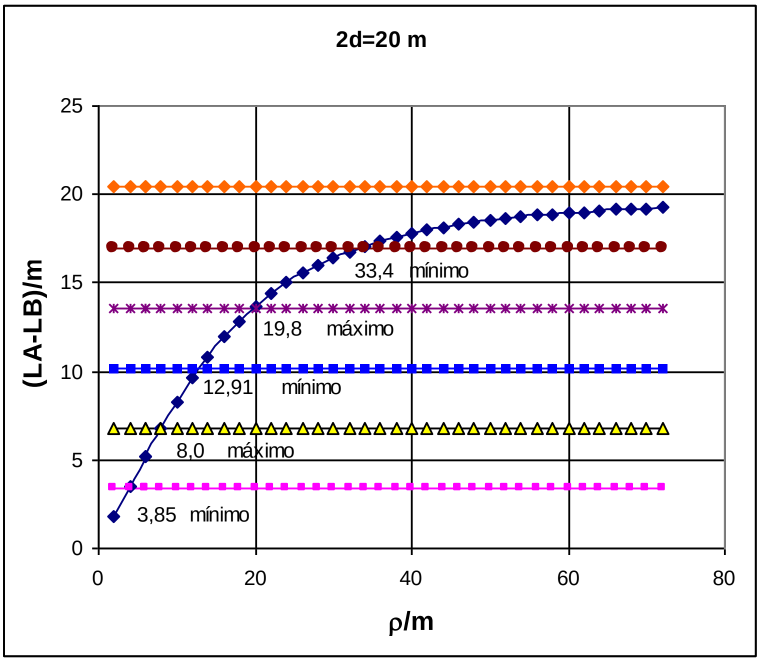


A la derecha de O hay un mínimo a la distancia de 7,5 m y un máximo a la distancia de 18,9 m. A la izquierda de O, debido a la simetría del dispositivo, existen a las mismas distancias un mínimo y un máximo. Observe que s ik=2 ,LA-LB=13,6 m y no hay solución . El siguiente mínimo sería 3/2 .6,8=10,2 m y tampoco hay solución.
El procedimiento de cálculo es el mismo y como se verá aumenta el número de máximos y mínimos y se sitúan a menor distancia de O a medida que d crece.

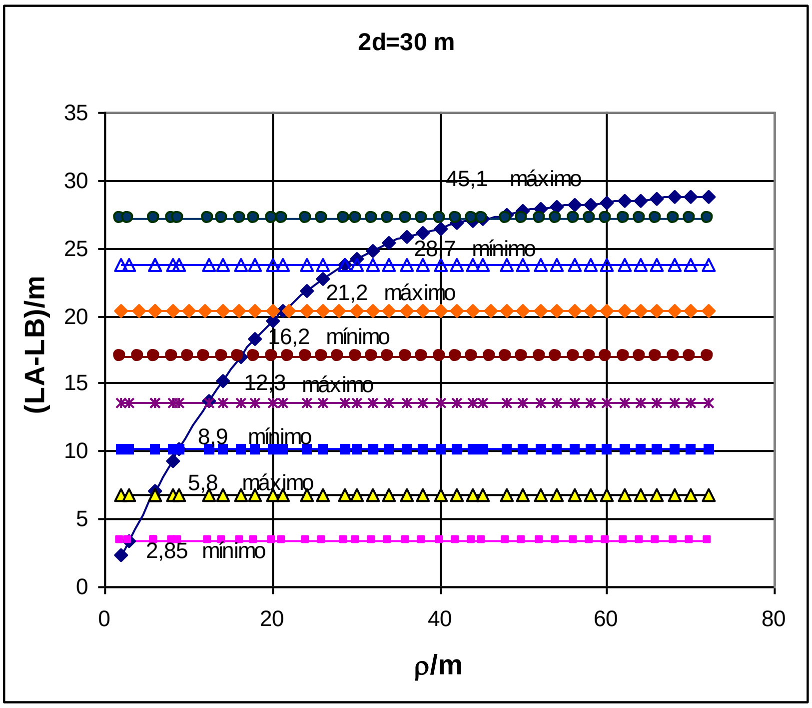
$$\mathrm{LA} - \mathrm{LB} = \sqrt{400 + (\rho + 7{,}5)^2} - \sqrt{400 + (\rho - 7{,}5)^2}$$



2d=15m , Posición de los mínimos 4,95 m y 19,3 m
Posición de los máximos 10,72 m y 43,6 m

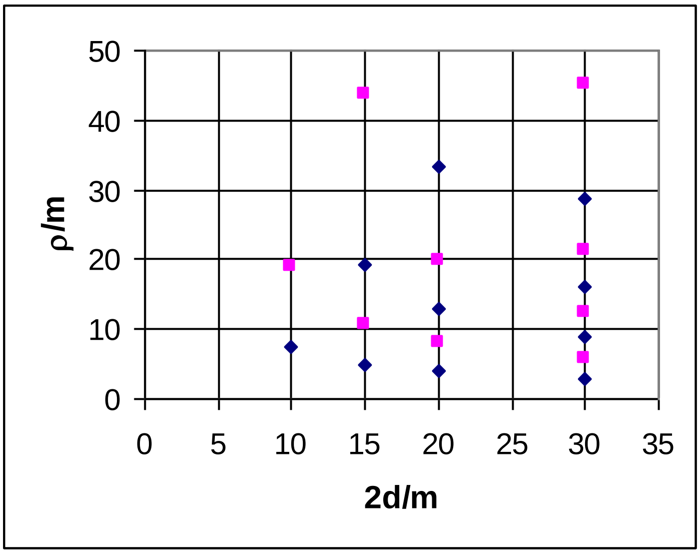


2d=20m ,Posición de los mínimos 3,95 m ,12,91, 33,4 m m
Posición de los máximos 8,0 m , 19,8 m,



2d=30m , Posición de los mínimos 2,85 m ,8,9 m, 16,2 m, 28,7 m
Posición de los máximos 5,8m , 12,3 m, 21,2 m , 45,1 m

En el siguiente gráfico representamos los mínimos(rombos) y máximos (cuadrados) en función de la distancia entre los altavoces (eje de abscisas) y la distancia de ellos al punto O. Un cuadro semejante vale para los puntos situados a la izquierda de O.



415.-Un cuerpo A realiza un movimiento circular de periodo T_o con velocidad constante en una habitación oscura. Se dispone de un estroboscopio de luz, cuyos destellos se producen a un ritmo de T segundos. T puede variar. Si se realizan fotografías de los destellos, determinar lo que se deduciría del movimiento real en función del valor de T.

.

a) Supongamos que $T = T_o$. La primera fotografía se realiza y aparece el móvil en una determinada posición; en la fotografía siguiente transcurre un tiempo T, el móvil real ha dado una vuelta completa y vuelve a estar en la posición anterior y así sucesivamente, por tanto, de las fotografías se deduce que el móvil no se ha movido, pues siempre se encuentra en la misma posición.

Si $T = 2T_o$, el móvil real entre una fotografía y la siguiente ha dado dos vueltas completas y vuelve a estar en la misma posición, en las fotografías aparece el móvil en la misma posición como en el caso anterior.. Esto ocurre siempre que $T = nT_o$ siendo n un número entero positivo..

* Sea $\frac{1}{2}T_o < T < T_o$. Veremos que en las fotografías el móvil aparece como si se desplazase en sentido contrario al móvil real.

Para mayor sencillez haremos el siguiente supuesto $T_o = 1$ segundo, T= 0,9 segundos.

Admitamos que inicialmente el móvil real ocupa la posición O de la figura 1. y que éste se desplaza en el sentido de las agujas de un reloj.(fotografía cero).
Cuando se verifica la siguiente fotografía (foto 1), el móvil real se encuentra

$$\omega_{real} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow \varphi_{real} = 2\pi.0{,}90 = 5{,}655\,\text{rad} = 324^o$$

Cuando se realiza la siguiente fotografía 2, el móvil se ha desplazado otros 324º y se encuentra en la posición 324º*2= 648º = 1 vuelta completa +288º.

Cuando se realiza la siguiente fotografía 3, el móvil ha recorrido 648º+324º= 972º = 2 vueltas completas +252º

Fotografía 4, el móvil ha recorrido 972º+324º= 1296º = 3 vueltas completas +216º

Fotografía 5, el móvil ha recorrido1296º+324º= 1620º = 4 vueltas completas +180º

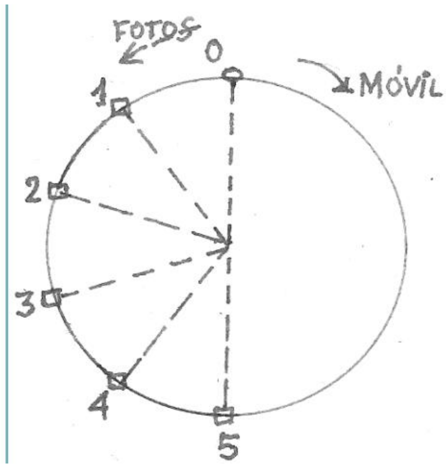


Fig.1

En la figura 1 están colocadas las posiciones del móvil en las fotos, el observador que analice únicamente esas fotografías, concluye que el móvil se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj con una velocidad angular

$$\omega' = \frac{324^{o} - 288^{o}}{0{,}9} = \frac{36^{o}}{0{,}9} = 0{,}698\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Vamos a generalizar el cálculo con un T cualquiera que cumpla la condición de $\frac{1}{2}T_o < T < T_o$

La velocidad angular real del móvil es: $\omega = \frac{2\pi}{T_o}$. En el tiempo t=0 , el móvil ocupa la posición O de la figura 1 al cabo de un tiempo T, el ángulo que detecta el observador es:

$$\varphi' = \frac{2\pi}{T_o}T - 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{\frac{2\pi}{T_o}T - 2\pi}{T} = 2\pi\left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T}\right) = 2\pi\frac{T - T_o}{T\,T_o}$$

**Consideramos el caso: $T_o < T < \frac{3}{2}T_o$. Como hicimos anteriormente elegimos un caso particular, T_o= 1 segundo, T =1,15 segundos.

Admitamos que inicialmente el móvil real ocupa la posición O de la figura 2 y que éste se desplaza en el sentido de las agujas de un reloj (fotografía cero).

Cuando se verifica la siguiente fotografía (foto 1), el móvil real se encuentra $\omega_{real} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow \varphi_{real} = 2\pi.\cdot 1{,}15 = 7{,}2257\,\text{rad}$ = 414º =1 vuelta completa +54º.

Cuando se realiza la siguiente fotografía 2, el móvil se ha desplazado otros 414º y se encuentra en la posición 2*414º= 828º º= 2 vueltas completas+108º.

Cuando se realiza la siguiente fotografía 3, el móvil ha recorrido 828º+414º= 1242º = 3 vueltas completas +162º

Fotografía 4, el móvil ha recorrido 1242º+414º= 1656º = 4 vueltas completas +216º

Fotografía 5, el móvil ha recorrido1656º+414º= 2070º = 5 vueltas completas +270º

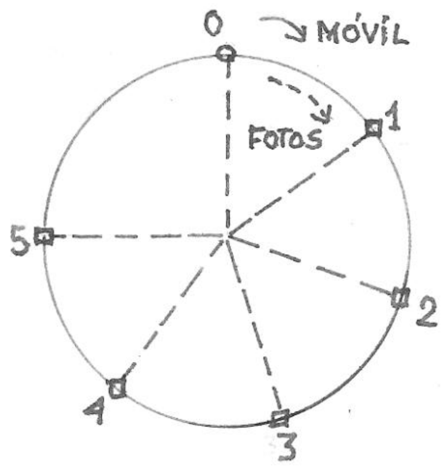


Fig.2

En la figura 2 están colocadas las posiciones del móvil en las fotos, el observador que analice exclusivamente esas fotografías, concluye que el móvil se desplaza en el sentido del, movimiento de las agujas del reloj con una velocidad angular:

$$\omega' = \frac{54^{o}}{1{,}15\,s} = 0{,}82\,\frac{rad}{s}$$

La velocidad en este caso es:

$$\omega' = \frac{\frac{2\pi}{T_o}T - 2\pi}{T} = 2\pi\left(\frac{1}{T_o} - \frac{1}{T}\right) = 2\pi\,\frac{T - T_o}{T\,T_o}$$

A partir de las fotografías se puede medir la velocidad de rotación del disco, midiendo el ángulo en las fotos y el periodo del estroboscopio.

En el caso primero

$$-36\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{T_o}0{,}9 - 2\pi \quad\Rightarrow\quad -0{,}1 = \frac{0{,}9}{T_o} - 1 \Rightarrow \quad T_o = 1s$$

En el caso segundo

$$54\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{T_o}1{,}15 - 2\pi \quad\Rightarrow\quad 0{,}15 = \frac{1{,}15}{T_o} - 1 \Rightarrow \quad T_o = 1s$$

Supongamos que $T < \frac{1}{2}T_o$.

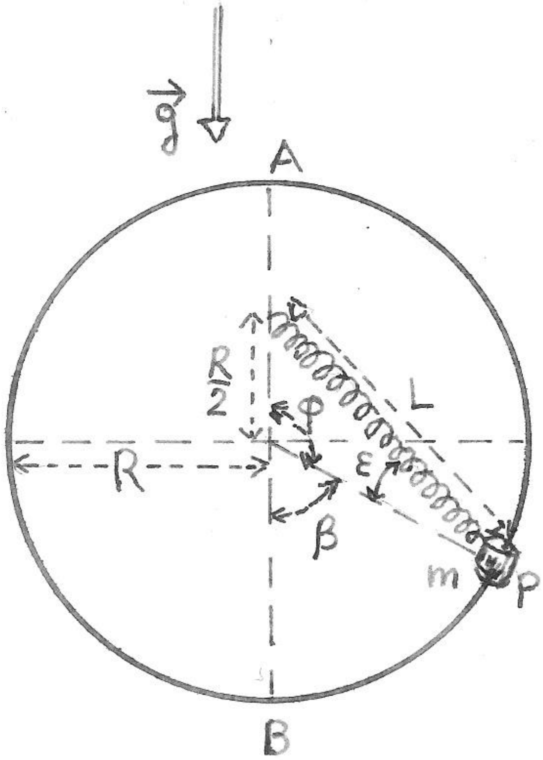
El ángulo descrito por el móvil real es: $\varphi = \frac{2\pi}{T_o}T \Rightarrow K = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_o}T} = \frac{T_o}{T}$

Si K es un número entero En la fotografía después de una vuelta el proceso se repite, por ejemplo, sea To=1 s y T =0,2 s , K =5 , los ángulos serían

$$\varphi = 72º\ ,\ 144º\ ,216º\ \ ,288º\ ,360º$$

Una fotografía detectaría estos ángulos en la primera vuelta del disco real y se repetirían en vueltas sucesivas. En el caso particular de que $T = \frac{1}{2}T_0$, aparecerían dos ángulos separados 180º , esto es, a los extremos de un diámetro.

416.-Un cuerpo de masa m, unido a un muelle de constante elástica K, se puede desplazar por un anillo vertical de radio R sin rozamiento, en un dispositivo como el de la figura.



La longitud del muelle es R/2 cuando se encuentra sin tensión

a) Determinar las energías potencial y elástica de la masa m cuando ésta se encuentre en la posición B. Si la masa pude girar totalmente en el aro determinar la energía cinética mínima que debe tener en A para que esto ocurra.

b) Suponer que K=6 N/m , m=0,1 kg, g= 10 m/s^2, R =1 m y que la energía cinética en A es doble que el valor mínimo obtenido en el apartado anterior .Determinar la velocidad de m por el aro.

c) Calcular la fuerza de interacción entre el aro y la masa m, en el caso anterior.

Tomamos como referencia para la energía potencial gravitatoria nula, la posición B. escogemos un punto P de la posición de la masa m, que forma un ángulo β con la dirección vertical.

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p(g) = m\,g\,h = m\,g\left(R - R\cos\beta\right) = m\,g\,R\left(1 - \cos\beta\right)$$

La longitud L del muelle estirado cuando m ocupa la posición P vale:

$$L = \sqrt{\left(\frac{R}{2} + R\cos\beta\right)^2 + R^2\,\text{sen}^2\beta} = R\sqrt{\frac{1}{4} + \cos^2\beta + \cos\beta + \text{sen}^2\beta} = R\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\beta}$$

El aumento de longitud que experimenta el muelle desde la posición A a la P es.

$$\Delta x = R\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\beta} - \frac{R}{2} = R\left(\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\beta} - \frac{1}{2}\right)$$

La energía potencial elástica es:

$$E_p(e) = \frac{1}{2}K\,\Delta x^2 = \frac{1}{2}KR^2\left(\frac{5}{4} + \cos\beta + \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\beta}\right) = \frac{1}{2}KR^2\left(\frac{3}{2} + \cos\beta - \sqrt{\frac{5}{4} + \cos\beta}\right)$$

Si la masa m puede girar completamente, y dado que el sistema es conservativo se cumple: Ec(A)+Ep(A)=Ec(B)+Ep(B).Como nos piden la energía cinética mínima en A esto conlleva que la energía cinética en B sea nula

$$E_{CA\,(\text{mínima})} = Ep(B) - Ep(A) = m\,g\,R\left(1 - \cos 0^{o}\right) + \frac{1}{2}KR^2\left(\frac{3}{2} + \cos 0^{o} - \sqrt{\frac{5}{4} + \cos 0^{o}}\right) - 2m\,gR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{CA\,(\text{mínima})} = \frac{1}{2}KR^2\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right) - 2\,m\,gR = \frac{1}{2}K\,R^2 - 2m\,g\,R$$

b) Energía cinética en A: $KR^2 - 4mg$; Energía potencial gravitatoria en A: mg2R ; energía potencial elástica en A,cero.
Energía total en A

$$E_T(A) = KR^2 - 4mgR + 2mgR = KR^2 - 2m\,gR = 6\cdot 1 - 2\cdot 0{,}1\cdot 10\cdot 1 = 4\,J$$

Energía potencial gravitatoria en P: $mg\,h = mg\left(R - R\cos\beta\right) = m\,g\,R\left(1 - \cos\beta\right)$

Energía potencial elástica en P: $\frac{1}{2}K\,\Delta x^2 = \frac{1}{2}KR^2\left(\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\beta} - \frac{1}{2}\right)^2$

Energía cinética en P: $\frac{1}{2}m\,v_P^2$

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica

$$4 = m\,g\,R(1-\cos\beta) + \frac{1}{2}KR^2\left(\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\beta}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\,v_P^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 1-\cos\beta + 3\left(\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\beta}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{0{,}1v_P^2}{2} \Rightarrow$$

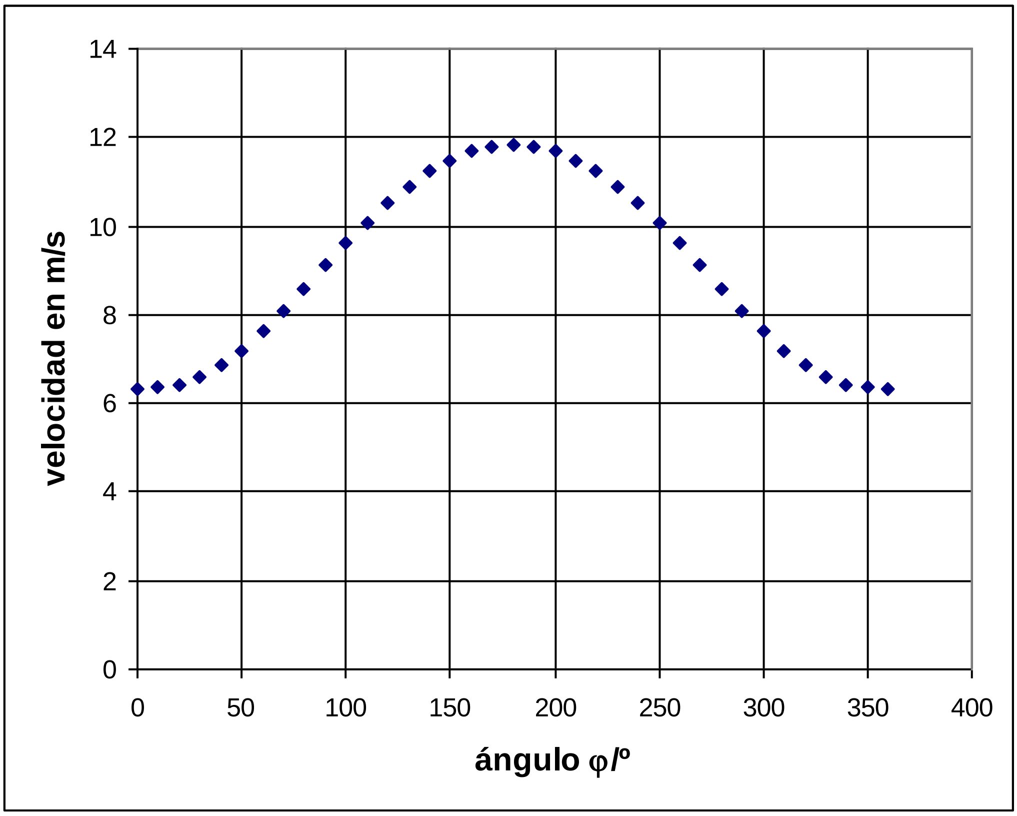
$$v_P^2 = 80-20+20\cos\beta+60\left(\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\beta}-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_P = \sqrt{60+20\,\cos\beta+60\left(\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\beta}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

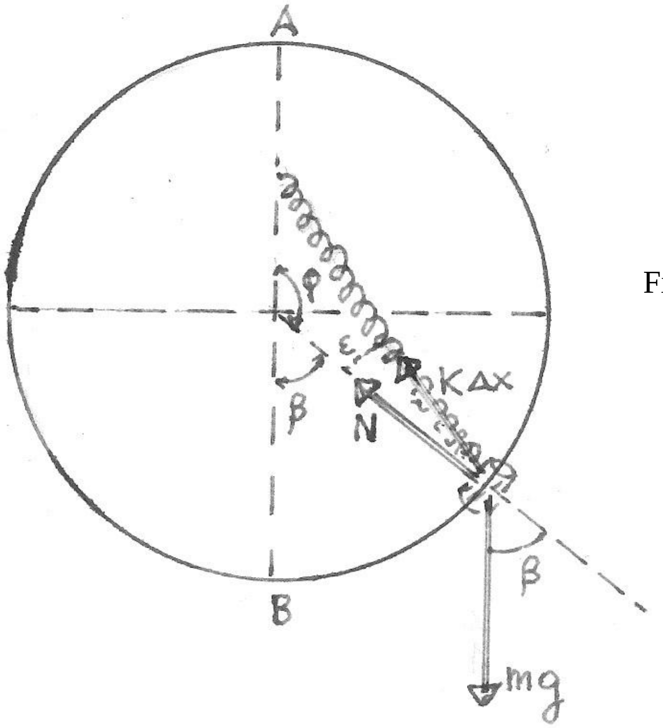
Si v_P se pusiese en función del ángulo φ , como φ y β son suplementarios, resulta

$$\Rightarrow v_P = \sqrt{60-20\,\cos\varphi+60\left(\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\varphi}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

La gráfica de la velocidad frente al ángulo φ es la siguiente.



c) En la figura 1 se representan las fuerzas reales que actúan sobre la masa m. Como m esta girando, aparece una fuerza centrípeta que es proporcionada por la acción simultánea de las fuerzas, cumpliéndose:



Fig, 1

$$N + K\Delta x\ \cos\varepsilon - m\,g\cos\beta = m\frac{v_P^2}{R}\ \ (1)$$

En la figura 1, aplicamos el teorema de los senos

$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{R}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{L} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\beta}} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{R\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\varphi}} \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varepsilon = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\varphi}} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{5-4\cos\varphi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varepsilon = \sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{5-4\cos\varphi}}$$

$$\Delta x = R\left(\sqrt{\frac{5}{4}+\cos\beta} - \frac{1}{2}\right)$$

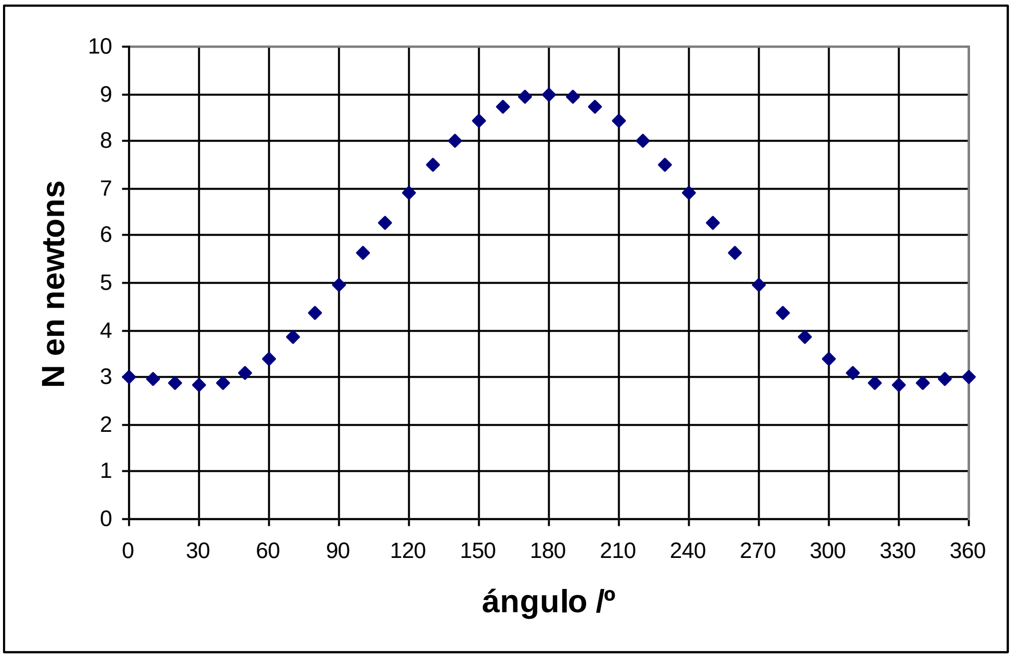
Sustituyendo en la ecuación (1)

$$N = \frac{m\,v_P^2}{R} - mg\cos\varphi - K\,\Delta x\cos\varepsilon = \frac{m\,v_P^2}{R} - m\,g\cos\varphi - KR\left(\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\varphi}-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{5-4\cos\varphi}}$$

Aplicando esta ecuación con los valores numéricos del problema resulta:

$$N = 0{,}1\cdot\left[60-20\cos\varphi+\left(\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\varphi}-\frac{1}{2}\right)^2\right]-\cos\varphi-6\left(\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\varphi}-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{5-4\cos\varphi}}$$

la gráfica de N frente al ángulo φ es:



417.-Una varilla de masa despreciable se encuentra en equilibrio apoyada sobre una semiesfera de radio R (figura 1). La varilla lleva incorporado una masa m cuyo peso es W. La distancia entre el punto de contacto A de la varilla con el interior de la semiesfera y la masa m, se puede variar siendo AP =L.

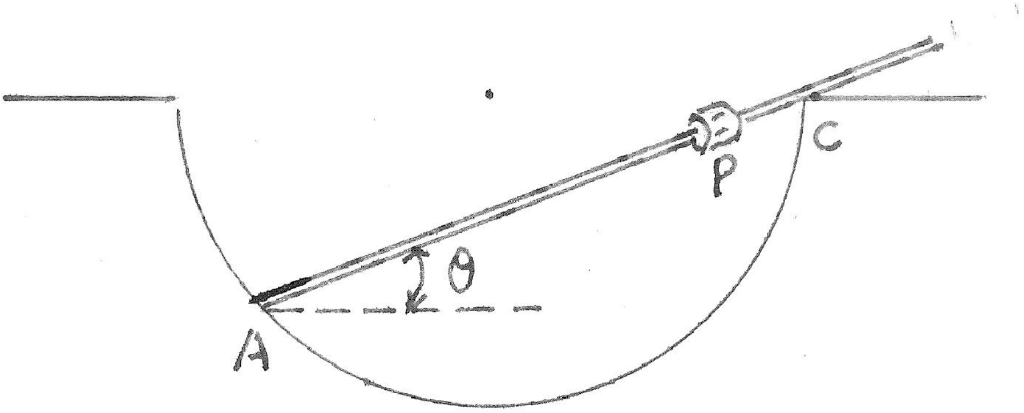


Fig.1

a) Determinar el ángulo θ de equilibrio en función de R y L.
b) Calcular las fuerzas con que la semiesfera empuja a la varilla.
c) Si W =1,0 N y R = 0,5 m, determinar las gráficas del ángulo θ frente a L y N_1 y N_2 frente a L. Admitir que no existe rozamiento.

En la figura 2 se han representado Las fuerzas que actúan sobre la varilla.

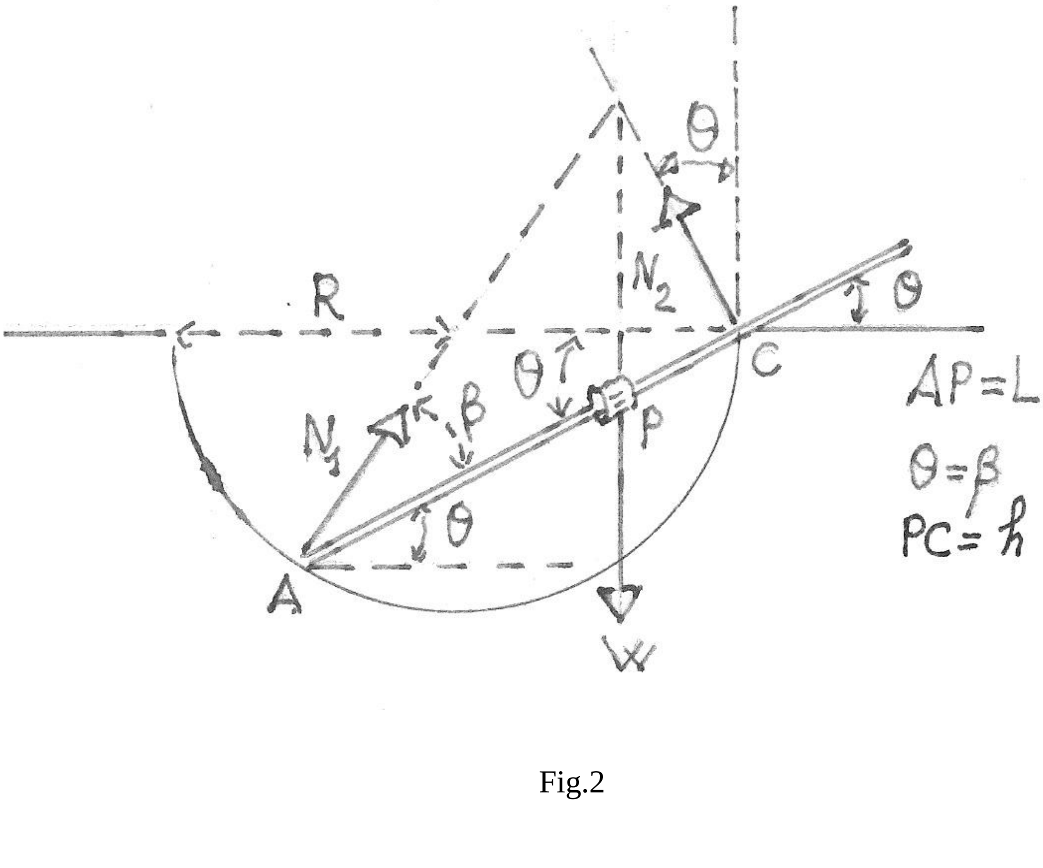


Fig.2

Como el sistema se encuentra en equilibrio las fuerzas N_1, N_2 y W son coplanarias y se cortan en un punto.
La suma de esas fuerzas es nula y al ser las fuerzas magnitudes vectoriales, la suma de las fuerzas en dirección vertical es nula y también lo es la suma en dirección horizontal. Considerando los módulos:

$$W = N_1 \operatorname{sen}(\beta+\theta) + N_2 \cos\theta = N_1 \operatorname{sen} 2\theta + N_2 \cos\theta \quad (1) \qquad ; \qquad N_1 \cos 2\theta = N_2 \operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

La suma de los momentos respecto del punto de contacto A es nula

$$N_2 (L+h) = W L \cos\theta \quad (3)$$

De la figura 2 obtenemos la relación siguiente:

$$(L+h)\cos\theta = R + R\cos(\beta+\theta) = R(1+\cos 2\theta).$$

Sustituyendo en (3): $N_2 = \dfrac{W L \cos\theta}{\dfrac{R(1+\cos 2\theta)}{\cos\theta}} = \dfrac{W L \cos^2\theta}{R(1+\cos 2\theta)} \quad (4)$

Hacemos uso de las relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad ; \quad 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

$$N_2 = \frac{W L \cos\theta}{\dfrac{R(1+\cos 2\theta)}{\cos\theta}} = \frac{W L \cos^2\theta}{R \cdot 2\cos^2\theta} = \frac{W L}{2 R}$$

Despejamos N_1 en la ecuación (2) y lo sustituimos en la ecuación (1) y llevamos (4) a (1)

$$W = \frac{N_2 \operatorname{sen}\theta}{\cos 2\theta} \operatorname{sen} 2\theta + N_2 \cos\theta = \frac{W L}{2R} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta} + \cos\theta \right]$$

$$1 = \frac{L}{2R} \left[\frac{\operatorname{sen}\theta \cdot 2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \cos\theta \cdot \cos 2\theta}{\cos 2\theta} \right] = \frac{L\cos\theta}{2R} \left[\frac{2 - 2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta - 1}{\cos 2\theta} \right] \Rightarrow$$

$$1 = \frac{L\cos\theta}{2R} \cdot \frac{1}{\cos 2\theta} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{L}{2R}\cos\theta \Rightarrow \quad 2\cos^2\theta - 1 = \frac{L}{2R}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\theta - \frac{L}{R}\cos\theta - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\cos\theta = \frac{\frac{L}{R} \pm \sqrt{\frac{L^2}{R^2}+32}}{8} = \frac{\frac{L}{R} \pm \frac{\sqrt{L^2+32R^2}}{R}}{8} = \frac{L \pm \sqrt{L^2+32R^2}}{8R} \quad (5)$$

Dado que cos θ es positivo la solución es: $\cos\theta = \frac{L + \sqrt{L^2+32R^2}}{8R}$

Para hallar el valor de N_1 sustituimos N_2 en la ecuación (2)

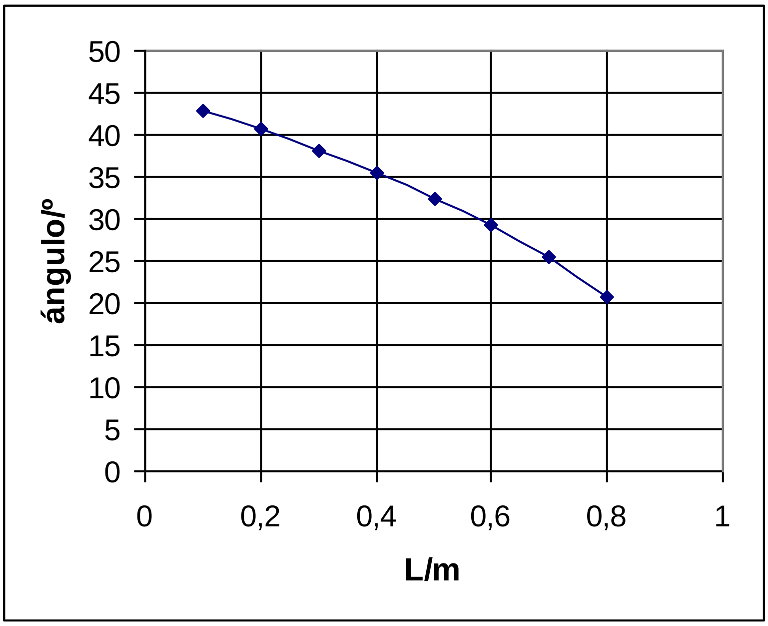
$$N_1 = N_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos 2\theta} = N_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos^2\theta - 1} = N_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\left(1-\operatorname{sen}^2\theta\right)-1} = N_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-2\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = \frac{WL}{2R}\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{1-2\operatorname{sen}^2\theta}$$

c) Sustituyendo los valores numéricos del enunciado en la ecuación (5) resulta:

$$\cos\theta = \frac{L + \sqrt{L^2+8}}{4}$$

Se dan valores a L y se obtiene cos θ y de ahí el valor del ángulo..



Sustituimos valores numéricos en $N_2 = \frac{WL}{2R} = \frac{1\cdot L}{2\cdot 0,5} = L$. La representación de N_2 frente a L es una línea recta que pasa por el origen.

Para N_1 resulta: $N_1 = L\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-2\operatorname{sen}^2\theta}$