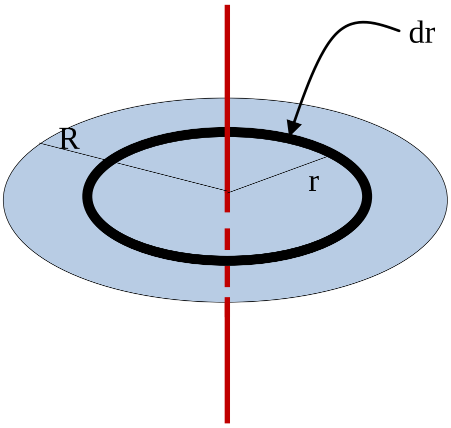
PROBLEMAS VARIADOS 4(2013-2014)

338.- Un disco delgado de radio R y no conductor tiene una densidad de carga superficial uniforme σ y un eje de rotación que pasa por el centro del disco y es perpendicular a él. El disco gira con velocidad angular constante ω. Calcular: a) el módulo del campo magnético creado en el centro del disco, b) el módulo del momento magnético

a)Consideramos una superficie elemental del disco que es una corona circular de ancho dr y situado a una distancia r del centro del disco, cuya superficie es: $dS = 2\pi r\cdot dr$. Ver la figura inferior.



Esa superficie tiene una carga elemental que vale

$$dq = \sigma\cdot dS = \sigma\cdot 2\pi r\cdot dr$$

Ahora imaginemos un observador situado en un punto frente a corona que determina la carga que pasa ante él, deduce que cuando el disco dé una vuelta completa toda la carga de la corona pasa frente él y considera que ha pasado una corriente elemental.

$$di = \frac{dq}{t}$$

Siendo t el tiempo que el disco emplea en dar una vuelta completa

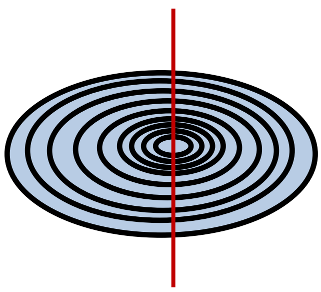
$$\omega = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad di = \frac{2\sigma\pi\, rdr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \sigma\omega\, rdr$$

Dado que la corona está a una distancia r del centro del disco, de acuerdo con la ley de Biot-Savart crea en el centro del mismo un campo magnético elemental de módulo

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{di\cdot l}{r^2}$$

Siendo l la longitud de la orona, $l = 2\pi r$

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{di\cdot l}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{di\cdot 2\pi r}{r^2} = \frac{\mu_o}{2}\sigma\omega dr$$



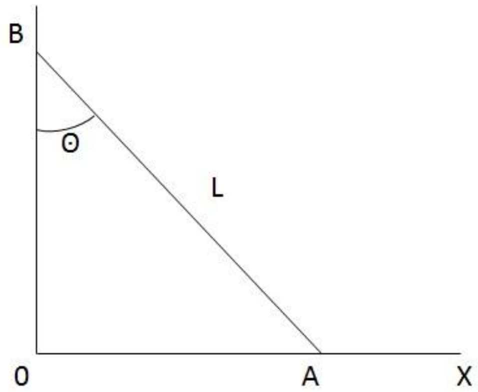
La contribución al campo se debe conjunto de todas las coronas en que descomponemos el disco, por tanto, hemos de sumar cada contribución

$$B = \frac{\mu_o}{2}\sigma\omega\int_0^R dr = \frac{\mu_o}{2}\sigma\omega R$$

b) El módulo del momento magnético de una espira es el producto de la intensidad de corriente por el área de la espira. Para la corona que hemos considerado vale dm y para el disco completo m.

$$dm = di\cdot\pi r^2 = \sigma\omega\ r dr\cdot\pi r^2 \quad\Rightarrow\quad m = \sigma\pi\omega\int_0^R r^3 dr = \sigma\pi\omega\frac{R^4}{4}$$

339.- Una barra homogénea de longitud L se desplaza por medio de dos guías que la obligan a moverse por los ejes coordenados XY.



El desplazamiento del extremo A de la barra por el eje x se realiza a velocidad constante v_o. Determinar: a) la velocidad y aceleración angular de la barra en función del tiempo, b) La velocidad y aceleración del extremo B. En el tiempo t =0 la barra se encuentra en posición vertical.

El movimiento de la barra es un movimiento plano que puede descomponerse en la suma de dos movimientos, primero uno de traslación del extremo B seguido de una rotación alrededor de un eje perpendicular a la barra en el extremo A. Ambos movimientos pueden observarse en la figura 1.

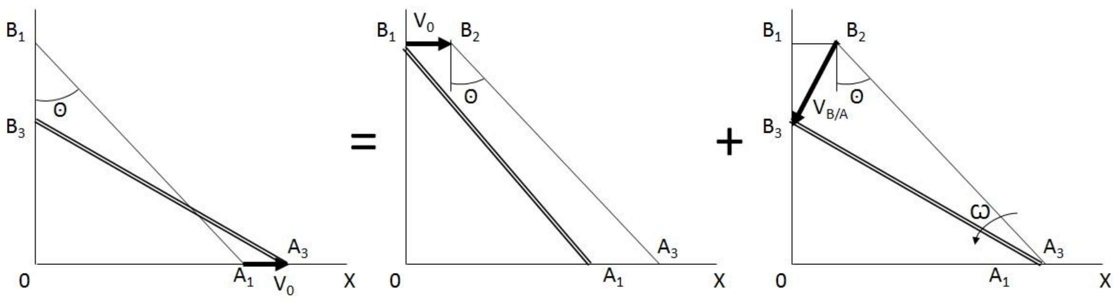
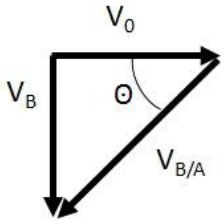


Fig.1

El extremo B está obligado a desplazarse por el eje y en sentido negativo, debido a la ligadura a la que se encuentra sometido; designamos su velocidad en un determinado instante como v_B . En ese mismo instante la velocidad del extremo A es v_o. Con $v_{B/A}$ designamos a la velocidad del extremo B respecto de A, que es la diferencia entre la velocidad absoluta de B menos la de A.

De donde se cumple que.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_o + \vec{v}_{B/A}$$

Designamos con $\vec{\omega}$ a la velocidad angular de la barra, que es un vector perpendicular al plano xy, y, por tanto, también a la barra

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \Rightarrow \quad v_{B/A} = \omega\, L \operatorname{sen} 90^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{B/A}}{L}$$

$\vec{L}$ es un vector de módulo L dirigido a lo largo de la barra desde el extremo A al B.

Volviendo a la figura 1 en ella están representados los vectores. Designamos con t al tiempo que ha empleado el extremo A de la barra en desplazarse desde O a A_1.

$$OA_1 = x = v_o t$$

La velocidad del extremo B es v_y y su ordenada es: $y = L\cos\theta$

Del triángulo de velocidades se deduce: $v_{B/A} \cdot \cos\theta = v_o$, con lo que el módulo de $\vec{\omega}$ es: $\omega = \dfrac{v_o}{L\cos\theta}$

De la figura 1 también se deduce que:

$$x^2 + y^2 = L^2 \;\Rightarrow v_o^2\, t^2 + (L\cos\theta)^2 = L^2 \;\Rightarrow\; L\cos\theta = \sqrt{L^2 - v_o^2\, t^2}$$

Finalmente

$$\omega = \frac{v_o}{\sqrt{L^2 - v_o^2\, t^2}}$$

La aceleración angular de la barra la obtenemos derivando la ecuación anterior respecto del tiempo.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{-v_o \dfrac{-2 v_o^2 t}{2\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}}{L^2 - v_o^2 t^2} = \frac{v_o^3 t}{\left(L^2 - v_o^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La velocidad del extremo B es:

$$v_B = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}\right) = \frac{-2 v_o^2\, t}{2\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}} = -\frac{v_o^2 t}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}$$

Para hallar la aceleración de B nos basta con derivar v_B con respecto a la variable tiempo.

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\frac{v_o^2\, t}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}\right] = -\frac{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}\cdot v_o^2 - v_o^2 t \cdot \dfrac{-2 v_o^2 t}{2\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}}{L^2 - v_o^2 t^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_B = -\frac{L^2 v_o^2 - v_o^4 t^2 + v_o^4 t^2}{\left(L^2 - v_o^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{L^2\, v_o^2}{\left(L^2 - v_o^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Otra forma de abordar el problema, y probablemente de forma más sencilla, es considerar una rotación pura alrededor del centro instantáneo de rotación en un movimiento plano, que en el caso que nos ocupa se determina por el corte de las perpendiculares a las velocidades de los extremos A y B. El punto C de la figura 2 es el centro instantáneo de rotación en un determinado instante. Se puede escribir

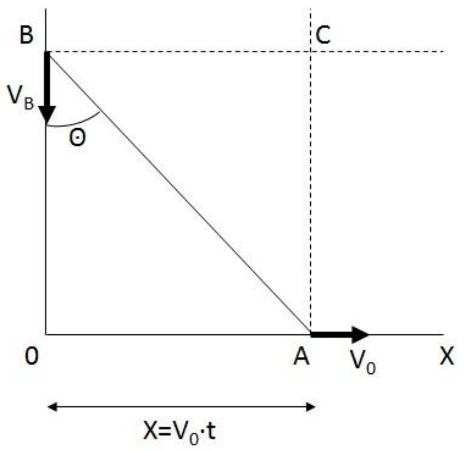


Fig.2

$$v_o = \omega \cdot CA = \omega \cdot \sqrt{L^2 - x^2} = \omega\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2} \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_o}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}$$

$$\left|v_B\right| = \omega \cdot CB = \omega \cdot v_o t = \frac{v_o}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}} \cdot v_o t = \frac{v_o^2 t}{\sqrt{L^2 - v_o^2 t^2}}$$

. 340.- Un pistón móvil de masa y rozamiento despreciables, separa un recipiente rígido en dos partes inicialmente a la misma presión p_i.. El recipiente está aislado del exterior. Una parte contiene 3,00 gramos de hidrógeno molecular a la temperatura de 300 K y la otra 16,00 g de oxígeno molecular a la temperatura de 400 K. El pistón conduce suavemente el calor entre el oxígeno y el hidrógeno, por lo que la temperatura de ambos gases se iguala. Todos los procesos son cuasiestáticos. Calcular.

a) La temperatura final del sistema

b) La relación entre la presión final p_f y la inicial p_i.

c) La cantidad de calor Q transferida desde el oxígeno al hidrógeno

Datos: Masa molar del hidrógeno 2,00g/mol, Masa molar del oxígeno 32 ,00 g/mol, R=8,31 J/(mol K).

Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

a) Inicialmente el sistema no está en equilibrio porque existe un gradiente de temperatura entre sus partes. En consecuencia pasa energía calorífica desde el oxígeno al hidrógeno hasta alcanzar el equilibrio mecánico, lo cual implica que exista uniformidad de temperatura y presión.

Designamos con T la temperatura de los gases en el equilibrio, V_H el volumen inicial del hidrógeno y V_O el volumen inicial del oxígeno, V_{H1} el volumen final del hidrógeno, V_{O1} el volumen final del oxígeno, y con p_i la presión inicial y p_f la final.

Consideramos como sistema el recipiente, que está aislado del exterior, lo que supone que no pueda intercambiar ni calor ni trabajo y por ello la variación de energía interna del sistema es cero. Ahora bien, dentro del sistema hay un aumento de energía interna por parte del hidrógeno y una disminución por parte del oxígeno, ambas variaciones deben sumar cero. La variación de energía interna es $\Delta U = nC_V(T-T_i)$ y $C_V = 5R/2$ por tratarse de un gas diatómico.

$$\Delta U_H = \frac{3,00}{2,00} C_v (T-300) \quad ; \quad \Delta U_O = \frac{16,00}{32,00} C_v (T-400) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U_{sistema} = 0 = \frac{3,00}{2,00} C_v (T-300) + \frac{16,00}{32,00} C_v (T-400) \Rightarrow \quad T = 325 \text{ K}$$

b) Aplicamos a los gases la ecuación de los gases perfectos antes y después del proceso

$$V_H = \frac{1,5R \cdot 300}{p_i} \; ; \; V_{H1} = \frac{1,5R \cdot 325}{p_f} \quad ; \quad V_O = \frac{0,5R \cdot 400}{p_i} \; ; \; V_{O1} = \frac{0,5R \cdot 325}{p_f}$$

Dado que el recipiente es rígido la suma de volúmenes antes y después del proceso es el mismo

$$V_H + V_O = V_{H1} + V_{O1} \;\Rightarrow\; \frac{1,5R \cdot 300}{p_i} + \frac{0,5R \cdot 400}{p_i} = \frac{1,5R \cdot 325}{p_f} + \frac{0,5R \cdot 325}{p_f} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{450}{p_i} + \frac{200}{p_i} = \frac{487,5}{p_f} + \frac{162,5}{p} \;\Rightarrow\; \frac{650}{p_i} = \frac{650}{p_i} \;\Rightarrow\; p_i = p_f$$

c) Aplicamos el primer principio de la termodinámica al oxígeno: $\Delta U_O = Q_O + W_O$, siendo Q_O el calor perdido por el oxígeno y que es transferido al hidrógeno y W_O es el trabajo recibido por el oxígeno y suministrado por el hidrógeno.

$$\Delta U_o = 0,5 C_V (325-400) = -0,5 \cdot \frac{5}{2} R \cdot 75 = -779 \text{ J}$$

Calculamos el trabajo realizado por el hidrógeno y tenemos en cuenta que el proceso es cuasiestático, lo cual implica que en todo el proceso se puede sustituir la presión exterior, esto es, p_O por la del hidrógeno

$$W_H = -\int p_O dV = -\int p_H dV = -\int_{300}^{325} 1,5R\, dT = -1,5R(325-300) = -1,5 \cdot 8,31 \cdot 25 = -312 \text{ J}$$

El signo menos indica que es un trabajo perdido por el hidrógeno y que es ganado por el oxígeno, luego Wo =+312 J

$$Q_O = \Delta U_O - W_O = -779 - 312 = -1091 \text{ J}$$

El signo menos indica que es un calor perdido por el oxígeno y que ha ganado el hidrógeno.

341.- La fosa de las Marianas situada en el Océano Pacífico tiene una profundidad de H=10920 m. La densidad del agua del mar en la superficie es: ρ_o = 1025 kg/m^3, la aceleración de la gravedad 9,81 m/s^2 y el coeficiente de compresibilidad del agua

$$\alpha = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_{T=Cte} \quad ; \quad K = 2{,}1.10^9\ Pa$$

Despreciando el cambio de temperatura, la variación de la aceleración de la gravedad con la profundidad y la presión atmosférica, determinar la presión p(H) en el fondo de la fosa.

Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

La presión hidrostática, en función de la densidad del fluido y de la profundidad, despreciando la presión atmosférica y la variación de temperatura y considerando g constante, está dada por la ecuación

$$p = \rho(h)\ g\ h$$

Cuando h es pequeña se considera que la densidad es constante. En este problema hemos de encontrar cómo varía la densidad con la profundidad.

El volumen y la densidad son magnitudes inversamente proporcionales y podemos en consecuencia, escribir:

$$V = \frac{k}{\rho} \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{k}{\rho^2}d\rho$$

Sustituyendo en el coeficiente de compresibilidad

$$\alpha = -\frac{\rho}{k}\left(\frac{-\frac{k}{\rho^2}d\rho}{dp}\right)_{T=Cte} \quad \Rightarrow \quad \alpha\, dp = \frac{d\rho}{\rho}$$

Por otra parte:

$$dp = \rho\, g\, dh \quad \Rightarrow \quad \alpha\, \rho\ g\, dh = \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \int \alpha\, g\, dh = \int \frac{d\rho}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha\, g\, h = -\frac{1}{\rho} + Cte$$

Cuando h=0 la densidad es ρ_o

$$\alpha\, g\, h = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_o} - \frac{g\, h}{K} = \frac{K - \rho_o\, g\, h}{\rho_o K} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_o K}{K - \rho_o\, g\, h}$$

Calculamos la presión.

$$dp = \rho\, g\, dh \Rightarrow p(H) = g\int_0^H \frac{\rho_o K}{K - \rho_o g\, h}dh = \rho_o g K \int_0^H \frac{dh}{K - \rho_o g h} = \rho_o g K\left[-\frac{1}{\rho_o g}\ln\left(K - \rho_o g\, h\right)\right]_0^H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(H) = K\left[-\ln\left(K - \rho_o g\, H\right) + \ln K\right] = K \ln \frac{K}{K - \rho_o g\, H} =$$

$$= 2{,}1.10^9 \ln \frac{2{,}1.10^9}{2{,}1.10^9 - 1025 \cdot 9{,}81 \cdot 10920} \Rightarrow \quad p(H) = 1{,}13.10^8\ Pa$$