OLIMP-PVARIADOS 4-2020

529.- Una estación espacial de masa 10^4 kg contiene aire a la presión p_o $=10^5$ Pa , T=293 K y volumen 40 m^3. De forma repentina se produce un agujero de área S = 1 mm^2 en la pared de la estación, debido a ello parte del aire escapa al exterior de modo que al cabo del tiempo la presión del aire se ha reducido a la mitad. Se supone que la descompresión de la estación es un proceso isotérmico Considerar al aire como gas perfecto.
a) Calcular el tiempo en que se produce la disminución de la presión
b) Calcular la velocidad de retroceso de la estación, en el supuesto de que el agujero no provoca rotación de la misma.
Nota,. La presión exterior puede considerarse despreciable frente a la presión interior.Dato. Masa molar promedio del aire 29 g/mol

a) Calculamos la velocidad de salida del gas por aplicación del teorema de Bernouilli

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

El primer punto de aplicación es en el interior de de la nave a presión p_o y el segundo en el centro del agujero con presión exterior p_{ext} , que en este caso consideramos despreciable frente a la interior, además el segundo término, presión debida a la altura, es el mismo en los dos miembros. La velocidad de desplazamiento del aire dentro de la nave v_1 puede considerarse tendiendo a cero frente a la velocidad de salida por el orificio v_2.

$$p_o = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2p_o}{\rho}}$$

Según la ecuación de los gases perfectos

$$p_0 = \frac{m}{V \cdot M_A} RT = \frac{\rho RT}{M_A} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2RT}{M_A}}$$

ρ es la densidad del aire y M_A la masa molar promedio del aire.

El gasto volumétrico es el volumen de aire que sale en la unidad de tiempo

$$G = \frac{dV}{dt} = S v_2$$

dV es el volumen de aire que estaba en la estación y que ha salido fuera en el tiempo dt. Consideramos un tiempo después de que haya empezado a salir aire, la presión en la estación es p, menor que p_o y mayor que $p_o/2$

$$V = \frac{nRT}{p} \quad \Rightarrow \quad dV = \frac{RT}{p} dn$$

dn es el número de moles que salen en el tiempo dt, y también dV su volumen

$$\frac{RT}{p}\frac{dn}{dt} = -S v_2 \quad \Rightarrow \quad dn = -\frac{Sp}{RT}\sqrt{\frac{2RT}{M_A}} dt \quad (1)$$

El signo negativo es porque dn/dt disminuye con el tiempo
La disminución del número de moles conlleva una disminución de la presión

$$dp = dn\,\frac{R\,T}{V}$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{dp\ \ V}{RT} = -\frac{S\,p}{RT}\sqrt{\frac{2RT}{M_A}}\,dt \quad\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{S}{V}\sqrt{\frac{2RT}{M_A}}dt \quad\Rightarrow \int_{p_o}^{\frac{p_o}{2}}\frac{dp}{p} = -\frac{S}{V}\sqrt{\frac{2RT}{M_A}}\int_0^t dt \quad\Rightarrow$$

–

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{p_o}{2} - \ln p_o = -\ln 2 = -\frac{S}{V}\sqrt{\frac{2RT}{M_A}}t \quad\Rightarrow\ t = \frac{\ln 2\cdot V}{S}\sqrt{\frac{M_A}{2R\,T}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{0{,}693\cdot 40\,m^3}{1.10^{-6}\,m^2}\sqrt{\frac{29.10^{-3}\ \frac{kg}{mol}}{2\cdot 8{,}31\frac{J}{mol\,K}\cdot 293\,K}} = 6{,}76.10^4\,s = 18{,}8\,horas$$

b) La variación de velocidad de la nave depende del tiempo ya que a medida que sale el aire disminuye la masa del conjunto estación más aire que hay en su interior, pero la masa de aire que sale es la mitad de la inicial

$$p_oV = \frac{m(\text{aire inicial})}{M_A}RT \quad\Rightarrow m(\text{aire inicial}) = \frac{p_oVM_A}{RT} = \frac{10^5\cdot 40\cdot 29.10^{-3}}{8{,}31\cdot 293} = 47{,}6\,kg$$

$$\text{Masa de aire expulsado} = \ 47{,}6/2 = 28{,}3\,kg$$

y es despreciable frente a la masa de la estación, hacemos el cálculo aplicando el principio de la conservación del movimiento considerando que la masa de la estación no varía

$$M\ \ \Delta v = \text{masa aire expulsado}\cdot v \quad\Rightarrow\quad \Delta v = \frac{28{,}3\cdot\sqrt{\frac{2\,R\,T}{M_A}}}{10^4} = \frac{28{,}3}{10^4}\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 293}{29.10^{-3}}} = 0{,}98\,\frac{m}{s}$$

530.- Un balón esférico de goma inflado con aire tiene un radio de r_1= 0,1 m, una presión p_1= 1,10.10^5 Pa y una temperatura T_o= 300 K.
a) ¿Cuál será la presión si se añade más aire al balón hasta que su radio sea r_2 = 3/2 r_1? La energía elástica de la goma del balón es $E_S = \frac{1}{2}\alpha S^2$, siendo α una constante y S la superficie del balón. La presión del aire circundante al balón es P_o= 1,10.10^5 Pa. Se supone que la temperatura no varía. El aire se comporta como un gas perfecto siendo Cv = 5/2 R.
b) Cuando el balón tiene un radio r_2 se sumerge en agua de forma lenta y cuidadosa hasta una profundidad en la que el radio del balón es r_3= r_1 = 0,1 m. Calcular la profundidad y la temperatura y presión del aire del balón. Se supone que en el proceso no hay pérdida ni ganancia de calor. Densidad del agua ρ_w= 1000 kg//m^3. Se considera despreciable la densidad del aire frente a la del agua.

c) Calcular el trabajo necesario para realizar el proceso anterior.

a) Al aumentar el tamaño del balón aumenta la superficie del mismo y eso supone aumentar su energía elástica. Esa energía proviene del trabajo que se ha de realizar para la expansión del balón.

Sea r el radio del balón en un momento del inflado y posteriormente sea r+dr y p la presión del gas. El trabajo de expansión es.

$$dW = (p - p_o)dV = (p - p_o)\left[\frac{4}{3}\pi(r + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right]$$

$$dW = (p - p_o)\left[\frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2 dr + 3r\,dr^2 + dr^3) - \frac{4}{3}\pi r^3\right] \Rightarrow \quad dW = (p - p_o)4\pi r^2\,dr$$

Las diferenciales de segundo y tercer orden pueden considerarse despreciables.
El aumento de energía elástica es:

$$E_i = \frac{1}{2}\alpha S_i^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(4\pi r^2\right)^2 = 8\alpha\pi^2 r^4 \quad ; \quad E_f = \frac{1}{2}\alpha\left[4\pi(r + dr)^2\right]^2 \Rightarrow$$

$$E_f = \frac{1}{2}\alpha\left[4\pi\left(r^2 + 2rdr\right)\right]^2 = 8\pi^2\alpha\left(r^4 + 4r^3\,dr\right) = 8\pi^2\alpha r^4 + 32\pi^2\alpha r^3\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dE_E = E_f - E_i = +32\pi^2\alpha r^3\,dr - 8\pi^2\alpha r^4 = 32\pi^2\alpha r^3\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p - p_o)4\pi r^2\,dr = 32\pi^2\alpha r^3\,dr \quad \Rightarrow \quad p - p_o = 8\pi\alpha r \quad (1)$$

Nótese que el trabajo de expansión del gas se transfiere como energía elástica, razón por la que se igualan. Además al ser wel radio del balón menor que la unidad el término en r^4 menor que r^3 puede despreciarse

Aplicando la ecuación (1) a los radios del balón inicial y final

$$p_1 - p_o = 8\pi\alpha r_1 \quad ; \quad p_2 - p_o = 8\pi\alpha r_2 \quad \Rightarrow \frac{p_2 - p_o}{p_1 - p_o} = \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_o + \frac{r_2}{r_1}\left(p_1 - p_o\right)$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$p_2 = 1{,}00.10^5 + \frac{\frac{3}{2} r_1}{r_1}\left(1{,}10{,}10^5 - 1{,}00.10^5\right) = 1{,}15.10^5\,\text{Pa}$$

b) Según el enunciado el proceso es adiabático $PV^{\gamma} = \text{Cte}$

$$p_2 V_2^{\gamma} = p_3 V_3^{\gamma} = p_2 V_1^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad p_2\left(\frac{4}{3}\pi\, r_2^3\right)^{\gamma} = p_3\left(\frac{4}{3}\pi\, r_1^3\right)^{\gamma} \quad \Rightarrow p_2\, r_2^{3\gamma} = p_3\, r_1^{3\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_3 = p_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3\gamma} \quad ; \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R + R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_3 = 1{,}15.10^5\left(\frac{\frac{3}{2}r_1}{r_1}\right)^{3\cdot 1{,}4} = 6{,}31.10^5\ \text{Pa}$$

Aplicamos la ecuación (1) y tengamos en cuenta que por estar sumergido el balón a una profundidad h, actúa sobre su superficie una presión hidrostática $\rho g h$.

$$p_3 - p_W = 8\pi\alpha r_3 = 8\pi\alpha r_1 \quad \Rightarrow \; p_W = p_3 - 8\pi\alpha r_1 = p_3 - \left(p_1 - p_o\right) = p_o + \rho g h \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{p_3 - \left(p_1 - p_o\right) - p_o}{\rho g} = \frac{6{,}31.10^5 - 1{,}10.10^5}{10^3 \cdot 9{,}8} = 53\ \text{m}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos al aire del balón en la superficie y sumergido.

$$p_2 V_2 = nRT_o \quad ; \quad p_3 V_1 = nRT' \;\Rightarrow \frac{p_2\, V_2}{p_3\, V_1} = \frac{T_o}{T'} \;\Rightarrow \frac{p_2\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)}{p_3\left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)} = \frac{T_o}{T'} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; T' = T_o\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \cdot \frac{p_3}{p_2} = 300\left(\frac{r_1}{\frac{3}{2}r_1}\right)^3 \cdot \frac{p_3}{p_2} = 300 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{6{,}31.10^5}{1.15.10^5} = 488\,\text{K}$$

c) Se considera despreciable el peso del balón., para hundirlo aplicamos una fuerza vertical y hacia abajo que en todo momento es igual al empuje del agua sobre el balón.(empuje de Arquímedes).

La fuerza que hay que aplicar es igual y de sentido contrario al empuje. Si ρ_W es la densidad del agua reasulta

$$F = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w g$$

En la ecuación anterior r es variable y toma los valores extremos r_2 y r_1. Si el balón se desplaza una distancia dz el trabajo vale

$$dW = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_W g\ dz$$

En esta ecuación hay dos variables r y z que hay que relacionar. Aplicamos la relación deducida en el apartado b)

$$p_Z = p_2 \frac{r_2^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} \quad ; \quad p_z = p_o + \rho_W g z \quad \Rightarrow \quad p_o + \rho_W g z = p_2 \frac{r_2^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} = p_2\ r_2^{3\gamma}\ r^{-3\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_W g \ \ dz = p_2\ r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma - 1} dr \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{p_2\ r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr}{\rho_W g} \quad \Rightarrow$$

$$dW = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w g \cdot \frac{p_2\ r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr}{\rho_W g} \quad \Rightarrow dW = \frac{4}{3}\pi r^3\ p_2\ r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ dW = \frac{4}{3}\pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma)\ r^{-3\gamma+2} dr$$

Par evaluar el trabajo integramos entre los límites r_2 y $r_3 = r_1$

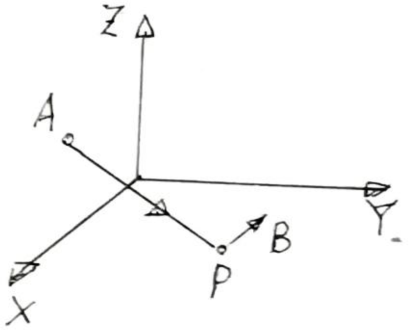
$$W = \int_{r_2}^{r_1} \frac{4}{3}\pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma)\ r^{-3\gamma+2} dr = \left[r^{-3\gamma+3} \right]_{r_2}^{r_1} \quad \Rightarrow \frac{4}{3}\pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) \left[\frac{1}{-3\gamma+3} \right] \left[r^{-3\gamma+3} \right]_{r_2}^{r_1}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{4}{3}\pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) \left[\frac{1}{-3\gamma+3} \right] \left[r_1^{-3\gamma+3} - r_2^{-3\gamma+3} \right]$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$W = \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}15.10^5 \cdot 0{,}15^{4,2} \cdot \left(\frac{-3 \cdot 1{,}4}{-3 \cdot 1{,}4 + 3} \right) \left(0{,}1^{-1,2} - 0{,}15^{-1,2} \right) = 3{,}6.10^3\ J$$

531.- Un espejo plano está situado en el plano Z=0. Desde A, de coordenadas (2,0,2) parte un rayo luminoso el cual incide en el punto P del espejo y después de reflejarse alcanza el punto B de coordenadas (2, 5, 1).



a) Aplicando el principio de Fermat deducir las coordenadas del punto P.
b) Calcular los ángulos de incidencia y reflexión

a) El tiempo que emplea la luz es la suma de los tiempos en recorrer AP más el que emplea en recorrer PB. El principio de Fermat dice *que la trayectoria entre dos puntos recorrida por la luz es aquella para la que el tiempo mínimo*.

$$\tau = t_{AP} + t_{PB} = \frac{AP}{c} + \frac{PB}{c}$$

Teniendo en cuenta que el rayo incidente el reflejado y la normal están en el mismo plano, las coordenadas del punto P son: (2, y, 0) .

$$\tau = \frac{1}{c}\left(\sqrt{2^2 + y^2} + \sqrt{(5-y)^2 + 1^2} \right)$$

Al ser τ un tiempo mínimo derivamos con respecto a y e igualamos a cero

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{c}\left[\frac{2y}{2\sqrt{4+y^2}} + \frac{2(5-y)\cdot(-1)}{2\sqrt{\left((5-y)^2+1\right)}} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{4+y^2}} = \frac{(5-y)}{\sqrt{\left((5-y)^2+1\right)}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4+y^2}{y^2} = \frac{(5-y)^2+1}{(5-y)^2} \Rightarrow \frac{4}{y^2} + 1 = 1 + \frac{1}{(5-y)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{y} = \frac{1}{5-y} \quad \Rightarrow$$

b)

$$\Rightarrow \; 10 - 2y = y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10}{3}$$

$$\operatorname{tag} i = \frac{y}{2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \; i = 59^{o} \quad ; \quad \operatorname{tag} r = \frac{5 - \frac{10}{3}}{1} = \frac{5}{3} \; \Rightarrow \; r = 59^{o}$$

La ley de la reflexión indica que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

532.- Dos aros de radio R cada uno se encuentran uno frente otro, con un eje común que pasa por sus centros. La distancia entre ellos es 4/3R, Uno de los aros tiene distribuida de forma uniforme una carga Q y el otro una -2Q.
a) Calcular el potencial en el eje común.
b) Dibujar en una gráfica las curvas de los potenciales de cada aro y del conjunto de los dos siendo R = 1 m y Q= 10^{-9} C.
c) Determinar analíticamente las posiciones del máximo y mínimo del potencial común

Nota. El problema ha de hacerse con ayuda de una hoja de cálculo

a) Consideramos al eje común como eje de las X (ver la figura 1) y en él un punto P de coordenada x.

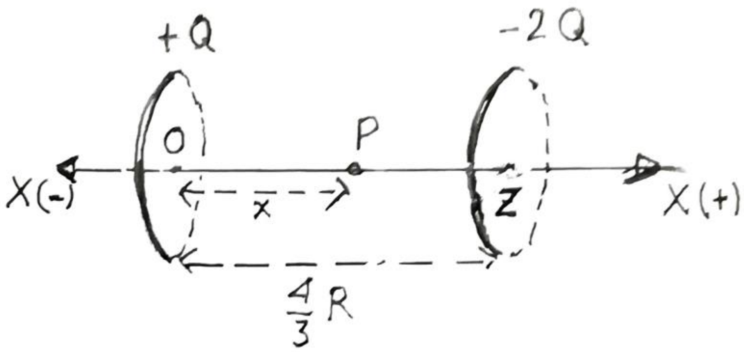


Fig. 1

Cualquier zona que escojamos del aro de la izquierda dista de P una distancia $d=\sqrt{R^2+x^2}$, el potencial que origina dicho aro en P es:

$$V_Q=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}\,.$$

Para el otro aro la distancia es $d' = \sqrt{R^2+\left(\frac{4}{3}R-x\right)^2}$ y el potencial es

$$V_{-2Q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-2Q}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4}{3}R-x\right)^2}}$$

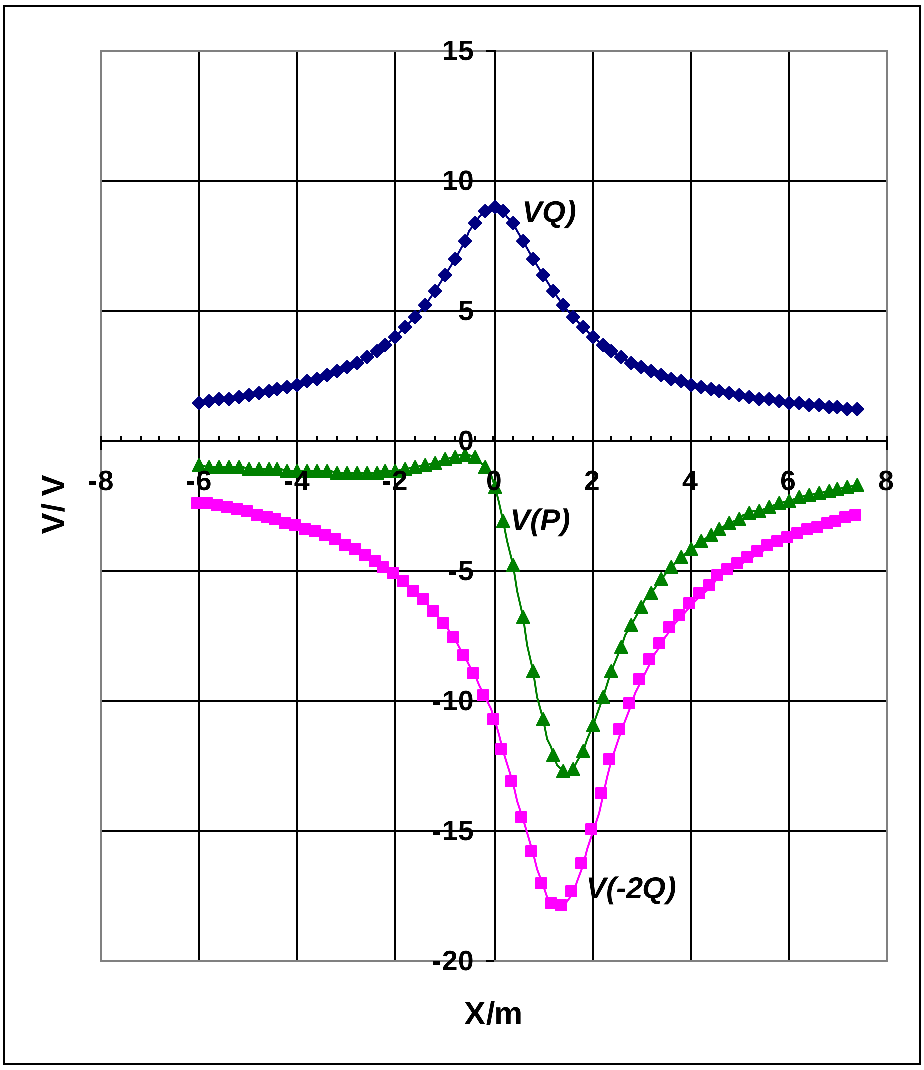
Al ser el potencial un escalar el potencial en P es la suma de los dos potenciales

$$V_P=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}-\frac{2Q}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4}{3}R-x\right)^2}}\right)$$

b) Sustituyendo datos en V_Q, V_{-2Q} y V_P

$$V_Q = 9\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \quad ; \quad V_{-2Q} = 9\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}}\right) \quad ; \quad V_P = 9\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}}\right)$$

Dando valores a la variable x en las ecuaciones anteriores y utilizando una hoja de cálculo obtenemos las siguientes curvas Asintóticamente tienden al valor cero en el infinito.

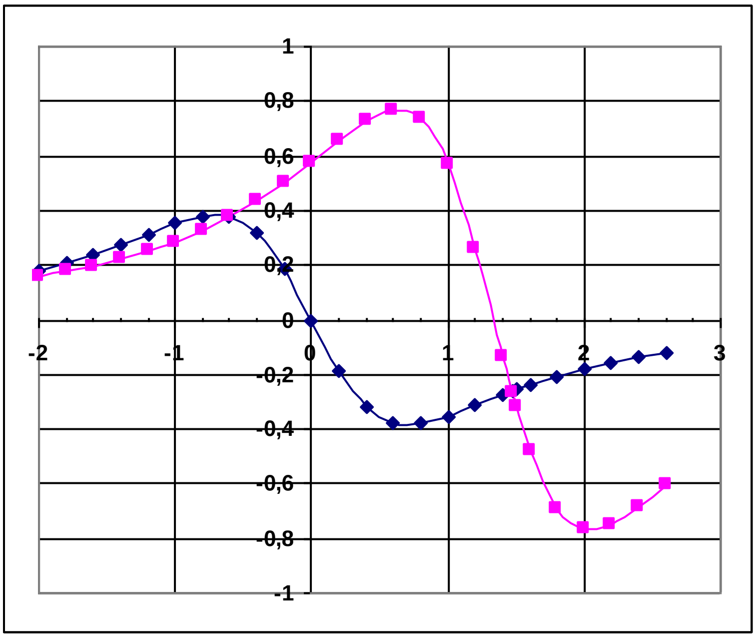


c) La curva V(P) tiene un máximo para un valor negativo de x y un mínimo para un valor positivo de x. Para hallar analíticamente esos valores debemos derivar V(P) con respecto de la variable x e igualar a cero.

$$\frac{dV(P)}{dx}=9\left[\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}-\frac{-\dfrac{2\left[2\left(\frac{4}{3}-x\right)\right](-1)}{2\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}}}{1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2}\right]=0 \quad \frac{dV(P)}{dx}=-\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\left(\frac{4}{3}-x\right)}{\left[1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$-\frac{x}{\left[1+x^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\left(\frac{4}{3}-x\right)}{\left[1+\left(\frac{4}{3}-x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

Resolvemos la ecuación (1) con auxilio de la hoja de cálculo. Damos valores a la variable x y hacemos la presentación de la gráfica correspondiente al primer miembro y al segundo de (1). Dónde ambas se corten esos son los valores de x. ya que esos puntos pertenecen a las dos curvas simultáneamente.

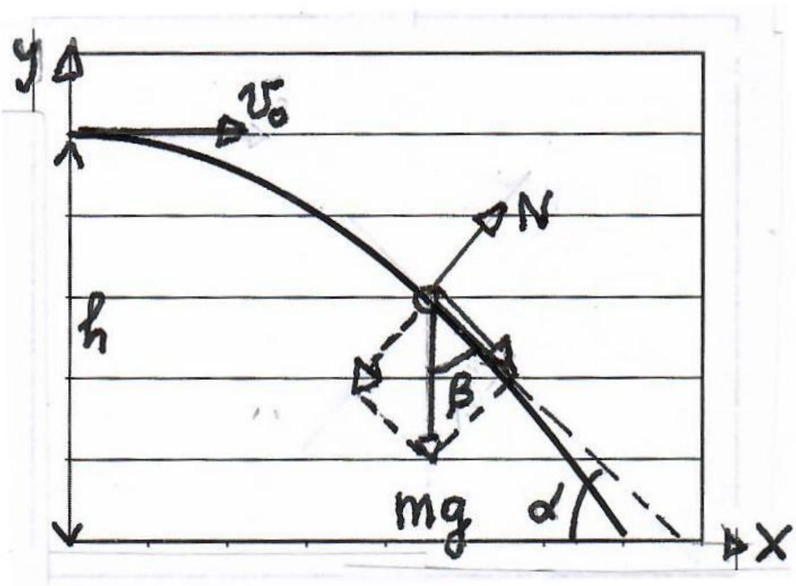


El valor máximo ocurre para x = -0,6 m y el mínimo para x = +1,47 m

533.- Un cuerpo de masa m se lanza desde lo alto(h) de una pista cuyo perfil es una parábola con velocidad horizontal v_o , dicha velocidad es tal que el cuerpo no se despega de la pista y se admite que el movimiento se efectúa sin rozamiento. La ecuación de la parábola es $y = h - \frac{1}{2} k\, x^2$

a) Calcular la reacción N de la pista sobre el cuerpo en función de k, v_o y la abscisa x. Recordatorio: Radio de curvatura $R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$

0a) En la figura inferior se ha representado las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en una abscisa de la parábola



La fuerza que acelera al cuerpo vale $mg\cos\beta = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha$. El cuerpo describe una curva, por tanto, actúa sobre él una fuerza centrípeta

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \; N = mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{R}\,(1)$$

v es la velocidad del cuerpo y R el radio de curvatura en cada lugar de la parábola. Obsérvese que en la ecuación anterior α , v y R son variables

Al no existir rozamiento se conserva la energía mecánica. Aplicamos este principio entre la posición inicial y un punto de la parábola de coordenadas (x,y) en el cual la tangente a la parábola forma un ángulo α

..

$$\frac{1}{2}m\,v_o^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg\,y \Rightarrow \quad v^2 = v_o^2 + 2g\,(h-y) = v_o^2 + 2\,g\frac{1}{2}kx^2 = v_o^2 + g\,k\,x^2$$

Calculamos la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto de coordenadas (x,y)

$$\frac{dy}{dx} = -k\,x = \mathrm{tag}\,\alpha$$

Relacionamos la tangente de α con el coseno de α

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tag}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(-k\,x)_2}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}}$$

Calculamos el valor de R

$$y' = \frac{dy}{dx} = -k\,x \quad ; \quad y'' = -k \Rightarrow \quad R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(1+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{k}$$

R es positivo

Sustituimos en la ecuación (1)

$$N = m\,g\,\frac{1}{\sqrt{1+k^2x^2}} - \frac{m\,(v_o^2 + g\,k\,x^2)}{\frac{(1+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{k}} = m\,\frac{g\,(1+k^2x^2) - kv_o^2 - gk^2x^2}{(1+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = m\,\frac{g - kv_o^2}{(1+k^2x^2)^{\frac{3}{2}}}$$