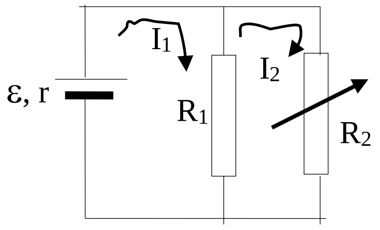
OLIMP-PVARIADOS4-2019

484.-En el circuito de la figura inferior, r es la resistencia interna de la batería de fuerza electromotriz ε, R_1 es una resistencia fija y R_2 variable.



Calcular R_2 en función de r , R_1 y ε, para que la potencia consumida en R_2 sea máxima

Olimpiada de Moscú

Dibujar la gráfica potencia frente a R_2 , siendo ε =4,5 V , r =30 Ω, R_1 =100 Ω

Aplicamos Kirchhoff a las dos mallas del circuito. Designamos con I_1 la intensidad de la primera malla y con I_2 la de la segunda

$$(I_1 - I_2)R_1 + I_1 r = \varepsilon \qquad ; \qquad I_2 R_2 + (I_2 - I_1)R_1 = 0$$

Despejamos I_1 de la primera ecuación: $I_1 = \dfrac{\varepsilon + I_2 R_1}{R_1 + r}$

Despejamos I_2 de la segunda ecuación y sustituimos I_1 de la primera

$$I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_1+R_2} = \frac{\frac{\varepsilon + I_2 R_1}{R_1 + r}\cdot R_1}{R_1+R_2} \Rightarrow \quad I_2 (R_1+R_2) = \frac{\varepsilon R_1 + I_2 R_1^2}{R_1+r} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_2\left(R_1+R_2\right) - I_2 \frac{R_1^2}{R_1+r} = \frac{\varepsilon R_1}{R_1+r} \Rightarrow \quad I_2\left[(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2\right] = \varepsilon R_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{\varepsilon R_1}{(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2}$$

La potencia disipada en la resistencia R_2 vale:

$$P = I_2^2 R_2 = \left(\frac{\varepsilon R_1}{(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2}\right)^2 \cdot R_2 = \varepsilon^2 R_1^2 \frac{R_2}{\left[(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2\right]^2}$$

Como piden la potencia máxima derivamos la función anterior respecto de R_2 e igualamos a cero

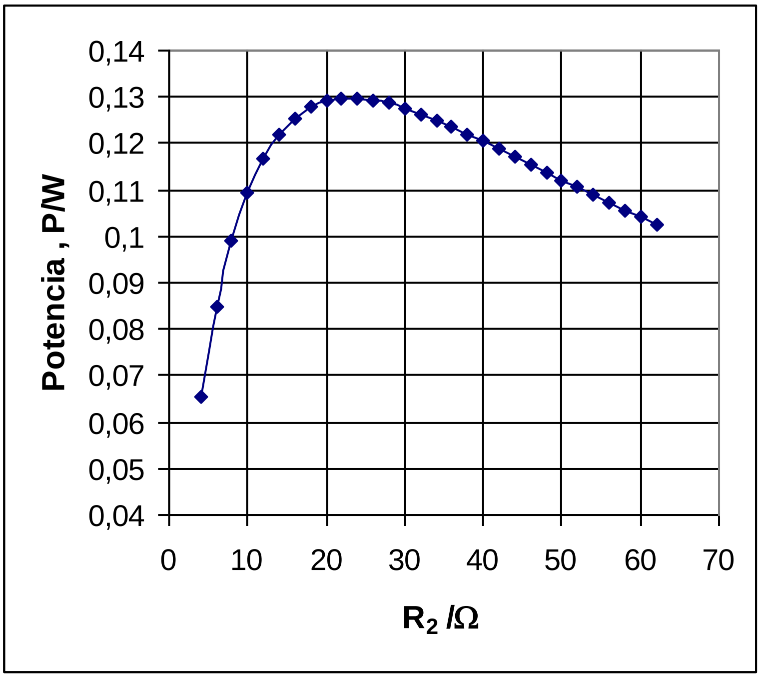
$$\frac{dP}{dR_2} = \varepsilon^2 R_1^2 \frac{\left[(R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2\right]^2 - 2R_2\cdot\left[(R_1+R_2)\cdot(R_1+r)-R_1^2\right]\cdot(R_1+r)}{\left[(R_1+R_2)(R_1+r)-R_1^2\right]^4} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R_1+R_2)\cdot(R_1+r) - R_1^2 = 2R_2(R_1+r) \;\Rightarrow\; R_1^2 + R_1 r + R_2R_1 + R_2 r - R_1^2 = 2R_2R_1 + 2R_2 r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1 r + R_2 R_1 + R_2 r = 2R_2R_1 + 2R_2 r \Rightarrow R_2\left(R_1 + r - 2R_1 - 2r\right) = -R_1 r \Rightarrow R_2\left(-R_1 - r\right) = -R_1 r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R_2 = \frac{R_1 r}{R_1 + r}$$

El valor de R_2 que hace a la potencia máxima es $R_2 = \dfrac{100\cdot 30}{130} = 23{,}1\,\Omega$



485.-Un cuerpo de masa m = 1 kg se lanza, en un medio viscoso, verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_o= = 10 m/s. La fuerza que el medio viscoso opone al cuerpo es directamente proporcional al valor de su velocidad, siendo la constante de proporcionalidad k =1.
a) Determinar el tiempo que emplea el cuerpo en subir a su máxima altura y el valor de esta altura.
b) Calcular el tiempo que emplea el cuerpo en volver a su posición inicial y su velocidad en ese instante.
Se prescinde del empuje del fluido sobre el cuerpo

a) En su movimiento ascendente el cuerpo está sometido a dos aceleraciones, una la de la gravedad g en sentido vertical descendente y la aceleración también vertical descendente, debida a la fuerza que el medio viscoso opone al avance del cuerpo

$$F_R = m a_v = kv \quad \Rightarrow \quad a_v = \frac{k}{m} v$$

De la ecuación fundamental de la Dinámica: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Tomando el sentido del movimiento como positivo, vertical hacia arriba, resulta:

$$-mg - m a_V = m a \quad \Rightarrow \quad a = -g - a_V$$

Esta aceleración tiene sentido vertical descendente

$$a = -g - a_v = -g - \frac{k}{m} v = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow -\int \frac{dv}{g + \frac{k}{m} v} = \int dt$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio de variable

$$g + \frac{k}{m} v = P \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} dv = dP \Rightarrow \quad dv = \frac{m}{k} dP \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\frac{m}{k} dP}{P} = \frac{m}{k} \ln P = \frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v\right) = t + Cte$$

En el instante t igual a cero, t = 0; la velocidad v es la velocidad inicial v_o

$$-\frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v_o\right) = Cte \quad \Rightarrow \quad -\frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v\right) = t - \frac{m}{k} \ln\left(g + \frac{k}{m} v_o\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{m}{k} \ln \frac{g + \frac{k}{m} v_o}{g + \frac{k}{m} v} \quad (1)$$

Cuando se alcanza el punto más alto, en el instante ts correspondiente, la velocidad del cuerpo se ha anulado, por consiguiente al sustituir 3n (1); m= 1 kg y k =1, resulta

$$t_S = \frac{m}{k} \ln \frac{g + \frac{k}{m} v_o}{g} = \ln \frac{g + v_o}{g} = \ln \frac{9,8 + 10}{9,8} = 0,70 \text{ s}$$

Volviendo a la ecuación (1)

$$\frac{k\,t}{m}=\ln\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v}\ \Rightarrow\ e^{\frac{k\,t}{m}}=\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{g+\frac{k}{m}v}\ \Rightarrow\ g+\frac{k}{m}v=\frac{g+\frac{k}{m}v_o}{e^{\frac{k\,t}{m}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{m}{k}\left(g+\frac{k}{m}v_o\right)e^{-\frac{k\,t}{m}}-g\frac{m}{k}\ ..\Rightarrow\ \frac{dh}{dt}=(g+v_o)\ e^{-t}-g$$

$$\Rightarrow\quad \int dh=(g+v_o)\int e^{-t}dt-\int g\,dt\Rightarrow\quad h=(g+v_o)(-e^{-t})-g\,t+Cte$$

Cuando t=0, h =0 ; $0=(g+v_9)(-1)+Cte\ \Rightarrow\ \ Cte=g+v_o$

$$h=(g+v_o)\ (-e^{-t})-g\,t+(g+v_o)=(g+v_o)\ (1-e^{-t})-g\,t$$

Sustituimos el tiempo de subida y así calculamos la altura que alcanza el cuerpo

$$H=19{,}8\left(1-e^{-0{,}70}\right)-9{,}8\cdot 0{,}70=3{,}11\ m$$

En el movimiento de descenso desde una altura de 3,11 metros, convenimos tomar positivo el nuevo sentido del movimiento, que ahora es vertical y hacia abajo. Sobre el cuerpo actúan la fuerza de la gravedad vertical y hacia abajo y la fuerza que ejerce el medio viscoso que actúa en dirección vertical y hacia arriba.~~,~~ (0bsérvese que hemos cambiado el criterio respecto de la primera parte) por tanto, de la ecuación fundamental de la Dinámica se deduce el valor de la aceleración del cuerpo.

$mg-ma_V=m\,a\ \ \Rightarrow\ \ a=g-a_V$

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v\ \ \Rightarrow\ \int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v}=\int dt$$

Esta integral se resuelve siguiendo el procedimiento anterior

$$P=g-\frac{k}{m}v\ \Rightarrow\ dP=-\frac{k}{m}dv\ \Rightarrow\ \ dv=-\frac{m}{k}dP\ \Rightarrow-\int\frac{m\,dP}{k\,P}=\int dt\ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{m}{k}\ln P=t+Cte\ \ \Rightarrow-\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=t+Cte$$

Cuando t = 0, la velocidad es nula, por consiguiente, $Cte=-\frac{m}{k}\ln g$

$$-\frac{m}{k}ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=t-\frac{m}{k}\ln g$$

$$-\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=t-\ln g\ \Rightarrow\qquad t=\ln\frac{g}{g-\frac{k}{m}v}=\ln\frac{g}{g-v}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{g}{g-v}=e^t\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{g}{e^t}=g-v\ \ \Rightarrow\ \ v=g-\frac{g}{e^t}=\frac{dh}{dt}\ \ \Rightarrow\ \ \int g dt-\int\frac{g\,dt}{e^t}=\int dh\ \Rightarrow\ \ h=g\,t-g\left(-e^{-t}\right)+Cte$$

Cuando t=0, la velocidad es cero y su altura cero ya que el origen se ha tomado a la altura de 3,11 m del suelo.

$$0 = 0 + \frac{g}{e^{o}} + Cte \Rightarrow Cte = -g$$

$$h = g\left(t + e^{-t} - 1\right) \Rightarrow 3{,}11 = 9{,}8\left(t_B + e^{-t_B} - 1\right)$$

La ecuación anterior la resolvemos por tanteo

$$1{,}317 = t_B + e^{-t_B}$$

Para $t_B = 0{,}90$ 1,317>1,307 Para $t_B = 0{,}92$ 1,317< 1,319

Tomamos como solución t_B= 0,92 s

Para calcular la velocidad sustituimos t_B en la ecuación de la velocidad

$$v = g - \frac{g}{e^{t_B}} = 9{,}8 - \frac{9{,}8}{e^{0{,}92}} = 5{,}9 \ \frac{m}{s}$$

Aparentemente la ecuación anterior no es homogénea, esto no es así, porque existe un factor k/m de dimensiones s^{-1} que es numéricamente igual a la unidad en este problema.

$$[k] = \frac{kg}{s} \quad ; \quad \left[\frac{K}{m}\right] = \frac{kg/_s}{kg} = s^{-1}$$

486.-Un recipiente contiene 2,00 μg de tritio. La vida media de este isótopo es $t_{1/2}$= 12,3 años y la masa de un átomo m = 3,02 u.
a) Calcular la velocidad inicial de desintegración inicial de este isótopo
b) Determinar el tiempo que ha de transcurrir para que la muestra inicial se reduzca al 1% de su masa inicial.

a) La desintegración radiactiva es un proceso estadístico regido por la ecuación siguiente

$$N = N_o e^{-\lambda t}$$

N_o es el número de átomos iniciales y λ es la constante radiactiva característica de cada átomo.
El tiempo que transcurre para que una muestra de un isótopo se reduzca a la mitad se denomina vida media.

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\lambda t_{1/2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

La velocidad de desintegración es dN/dt

$$\frac{dN}{dt} = N_o e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda)$$

Como se pide la velocidad inicial, t=0

$$\frac{dN}{dt} = -N_o \lambda = -N_o \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

N_o es el cociente entre la masa en kilos de la muestra dividido por la masa de un átomo expresada en kilos.
La unidad de masa atómica es 1/12 de la masa de un átomo de $_{12}C$.
Como 12,0000 gramos de carbono 12 contienen $N_A = 6{,}02.10^{23}$ átomos la masa de un solo átomo es

$$\frac{12{,}0000 g}{N_A}$$

Y como u es l /12 de esa masa resulta:

$$u = \frac{1}{12} \cdot \frac{12{,}0000}{N_A} = \frac{1}{6{,}02.10^{23}} = 1{,}6611.10^{-24} g = 1{,}6611.10^{-27} \text{ kg}$$

La masa en kg de un solo átomo de tritio es:

$$m\left({}_1^3H\right) = 3{,}02\, u \cdot 1{,}611.10^{-27} \frac{kg}{u} = 4{,}86.10^{-27} \text{kg} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_o = \frac{2{,}00.10^{-9} \text{kg}}{4{,}86.10^{-27} \text{kg}} = 4{,}11.10^{17} \text{ átomos}$$

$$\frac{dN}{dt} = -4{,}11.10^{17} \cdot \frac{\ln 2}{12{,}3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 s} = -7{,}34.10^{8} \, s^{-1}$$

El signo menos indica que el número de átomos disminuye al transcurrir el tiempo

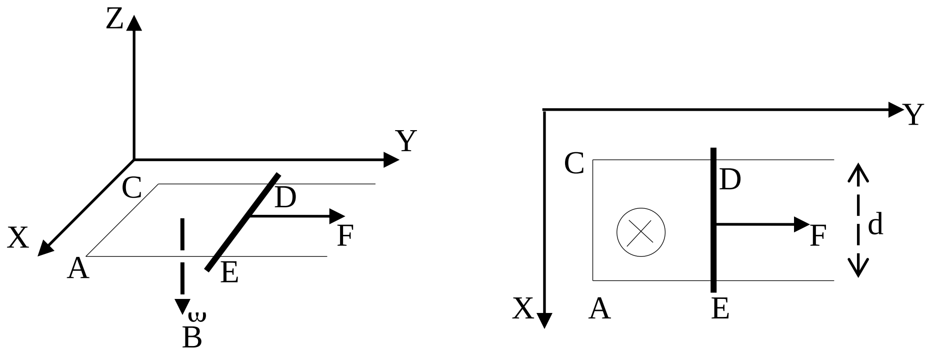
b)

$$N = \frac{N_o}{100} = N_o \, e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{1}{100} = -\lambda \, t \quad = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t \Rightarrow \; t = -\frac{\ln \frac{1}{100} \cdot t_{1/2}}{\ln 2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{-4{,}605 \cdot 12{,}3}{0{,}693} = 81{,}7 \text{ años}$$

487.-Los dos raíles de una pista superconductora están separados una distancia d. Una barra conductora de resistencia R puede deslizar por la pista. Inicialmente su velocidad es cero y sobre ella actúa una fuerza constante exterior F (ver la figura). Entre la barra y los raíles existe una fuerza de rozamiento directamente proporcional a la velocidad $F_R = \mu v$. El dispositivo está inmerso en un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B\,\vec{k}$.
a) Indicar el sentido de la corriente inducida en la barra
b) Determinar la velocidad de la barra en función del tiempo
c) Calcular la intensidad de la corriente en función del tiempo.
d) ¿Cuál es la velocidad límite de la barra?

Universidad de Florida



a) Al desplazarse la barra DE el flujo magnético que atraviesa el cuadrilátero ACDEA aumenta porque aumenta su superficie..Este aumento del flujo crea una fuerza electromotriz que da lugar a una corriente eléctrica, esta corriente se puede dirigir desde D a E o desde E a D, a continuación deducimos cuál es el sentido de entre ambas opciones. La corriente, que en un instante designamos con I, por interacción con el campo magnético da lugar a una fuerza sobre la barra. De valor

$$\vec{f} = I\,\vec{d} \times \vec{B}$$

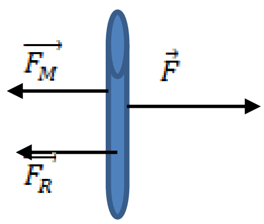
Si la corriente se dirige desde D a E

$$\vec{f} = I\ d\,\vec{i} \times B(-\vec{k}) = IdB\,\vec{j}$$

La fuerza tiene la misma dirección y sentido que la fuerza aplicada. Si eso fuese así entonces la energía cinética de la barra aumentaría indefinidamente, debido al trabajo realizado por esta fuerza, con tal de que los raíles fuesen muy largos y como resultado tendríamos una fuente de energía sin consumirla de otro lugar, esto está en contradicción con el principio de conservación de la energía mecánica.

En consecuencia, la corriente se dirige desde E a D y así la fuerza magnética tiene la misma dirección que F pero sentido contrario.

$$\vec{f} = I\ d(-\vec{i}) \times B(-\vec{k}) = IdB(-\vec{j})$$



b) Sobre la barra actúan las siguientes fuerzas F dirigida hacia la derecha, la fuerza magnética y la fuerza de rozamiento, estas dos últimas de la misma dirección que F pero de sentido contrario. Dado que es un movimiento unidimensional, podemos utilizar escalares con sus signos y establecer la ecuación del movimiento

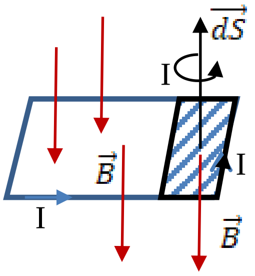
$$F - F_M - F_R = m\frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Veamos cuál es el módulo de la fuerza magnética

Consideramos un intervalo de tiempo dt, siendo la velocidad de la barra v, el aumento de la superficie del cuadrilátero ACDEA es: $dS = d \cdot v dt$ y la fuerza electromotriz inducida

$$d\emptyset = \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = B \cdot dS \cdot \cos 180 = -B\ dS$$

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{(-B\ dS)}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\frac{d\ v\ dt}{dt} = B\ d\ v$$



La intensidad de la corriente que pasa por la barra es Según la ley de Ohm.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \qquad I = \frac{B d v}{R}$$

y el módulo de la fuerza magnética:

$$F_M = I d B = \frac{B d\ v}{R} d B = \frac{B^2\ d^2}{R} v$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$F - \frac{B^2 d^2}{R} v - \mu v = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow F - v\left(\frac{B^2 d^2}{R} + \mu\right) = m\frac{dv}{dt}$$

Dado que los términos que están dentro del paréntesis son constantes hacemos $\frac{B^2 d^2}{R} + \mu = K$ y la ecuación diferencial queda

$$F - Kv = m\frac{dv}{dt}; \ ; \quad \frac{1}{m}\int dt = \int \frac{dv}{F - Kv} \quad (2)$$

Resolvemos la segunda integral haciendo

$$F - Kv = \Omega \quad \Rightarrow -Kdv = d\Omega \Rightarrow dv = -\frac{d\Omega}{K} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dv}{F - K v} = -\int \frac{d\Omega}{K\Omega} = -\frac{1}{K}\ln\Omega = -\frac{1}{K}\ln(F - K v)$$

Volviendo a (2)

$$\frac{t}{m} = -\frac{1}{K}\ln\left(F - K\,v\right) + Cte \;\Rightarrow \text{Cuando } t = 0\,,\, v = 0,\;\; \text{luego} \Rightarrow \;\; Cte = \frac{1}{K}\ln F \;\;\Rightarrow$$

$$\frac{t}{m} = -\frac{1}{K}\ln\left(F - K\,v\right) + \frac{1}{K}\ln F \;\;\Rightarrow \frac{t}{m} = \frac{1}{K}\left[\ln F - \ln\left(F - K\,v\right)\right] = \frac{1}{K}\ln\frac{F}{F - K\,v} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K\,t}{m} = \ln\frac{F}{F - K\,v} \;\Rightarrow\; e^{\frac{K\,t}{m}} = \frac{F}{F - K\,v} \;\Rightarrow\; F - K\,v = \frac{F}{e^{\frac{K\,t}{m}}} \;\;\Rightarrow Kv = F\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{K\,t}{m}}}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad v = \frac{F}{K}\left(1 - e^{-\frac{K\,t}{m}}\right)$$

c) Hemos deducido anteriormente que

$$I = \frac{B d\, v}{R} = \frac{B d \cdot \frac{F}{K}\left(1 - e^{-\frac{K\,t}{m}}\right)}{R} = \frac{F d B}{K R}\left(1 - e^{-\frac{K\,t}{m}}\right)$$

d) En la ecuación de la velocidad sustituimos $t = \infty$ el término exponencial se hace cero.

$$v_{\text{límite}} = \frac{F}{K} = \frac{F}{\frac{B^2\,d^2}{R} + \mu} = \frac{F R}{B^2 d^2 + \mu R}$$

488.-La ecuación de van der Waals para un mol de gas es: $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$, a y b son constantes cuyos valores dependen del gas.

a) Determinar el trabajo de compresión isoterma de un gas desde el volumen V_1 al volumen V_2 ($V_1>V_2$).

b) Calcular ese trabajo en julios para un mol de nitrógeno cuyas constantes son $a=1{,}35\frac{atm\cdot L^2}{mol^2}$; $b=0{,}039\frac{L}{mol}$, si se comprime desde un volumen de 10 L hasta un volumen de 1 litro a la temperatura de 450 K.

Dato. $R=0{,}082\frac{atm\cdot L}{mol\cdot K}$; 1 atm = 101325 Pa

a) El trabajo está dado por la expresión $W=-\int_{V_1}^{V_2} PdV$. Despejamos la presión en la ecuación de van der Waals

$$P+\frac{a}{V^2}=\frac{RT}{V-b} \Rightarrow P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

Sustituyendo en la integral

$$W=-\left[\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT}{V-b}dV-\int_{V_1}^{V_2}\frac{a\,dV}{V^2}\right]=-\left[RT\ln(V-b)+\frac{a}{V}\right]_{V_1}^{V_2}=$$

$$=-\left[RT\ln(V_2-b)-RT\ln(V_1-b)+\frac{a}{V_2}-\frac{a}{V_1}\right]\Rightarrow W=RT\ln\frac{V_1-b}{V_2-b}-a\left(\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}\right)\text{b)}$$

$$W=1\text{mol}\left[\left(0{,}082\frac{\text{atm}\cdot\text{L}}{\text{mol}\cdot\text{K}}450\,\text{K}\cdot\ln\frac{10-0{,}039}{1-0{,}039}\right)-1.35\frac{\text{atm}\cdot\text{L}^2}{\text{mol}^2}\left(\frac{1}{1\frac{\text{L}}{\text{mol}}}-\frac{1}{10\frac{\text{L}}{\text{mol}}}\right)\right]\Rightarrow$$

$$W=86{,}29-1{,}22=85{,}1\,\text{atm}\cdot\text{L}=85{,}1\text{ atm}.101325\frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\text{atm}}\cdot10^{-3}\,\text{L}\frac{\text{m}_3}{\text{L}}=8{,}62.10^3\,\text{J}$$