PROBLEMAS VARIADOS 4-2016

387.-Dos patinadores A y B tienen una masa cada uno de 70 kg. Se mueven uno hacia el otro por una superficie horizontal sin rozamiento, con velocidades $\vec{v}_A = +1\,m/s$ y $\vec{v}_B = -1 m/s$. En el tiempo t=0, ocupan las posiciones x_A= -5 m y x_B =+5 m. Ambos patinadores pueden lanzar un balón de 10 kg con una velocidad relativa a ellos mismos de 5 m/s (esto quiere decir que si A lanza el balón hacia B cuando t=0, la velocidad del balón respecto del suelo es 6 m/s).
Los choques son inelásticos.

a) ***Determinar los momentos lineales de cada patinador justamente un instante antes de t=0.***
b) ***Cuando t=0 s , el patinador A lanza el balón hacia B. Determinar los momentos lineales de los patinadores cuando B coge el balón***
c) ***Suponer que A no lanza el balón y se mueve con él. Determinar gráficamente las posiciones de los patinadores en función del tiempo.***
d) ***Hacer la representación gráfica anterior cuando A lanza el balón hacia B en el tiempo t=0, B lo recoge y un segundo después lo lanza hacia A y éste lo recoge.***

Propuesto en las Olimpiadas de India

a)

$$\vec{p}_A = (m_A + m_{Bal})\vec{v}_A = (70+10)\cdot 1\vec{i} = +80\vec{i}\ \frac{kg\,m}{s};\ \vec{p}_B = m_B\,\vec{v}_B = 70\cdot\left(-1\vec{i}\right) = -70\vec{i}\ \frac{kg\,m}{s}$$

b) Suponemos que cuando A lanza el balón su velocidad cambia de forma casi inmediata y cuando B lo recoge la velocidad de B cambia también de forma inmediata.
Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$(80\cdot 1)\vec{i} = (10\cdot 6)\vec{i} + \vec{p}_A' \Rightarrow \vec{p}_A' = +20\vec{i}\ kg\,ms^{-1}$$

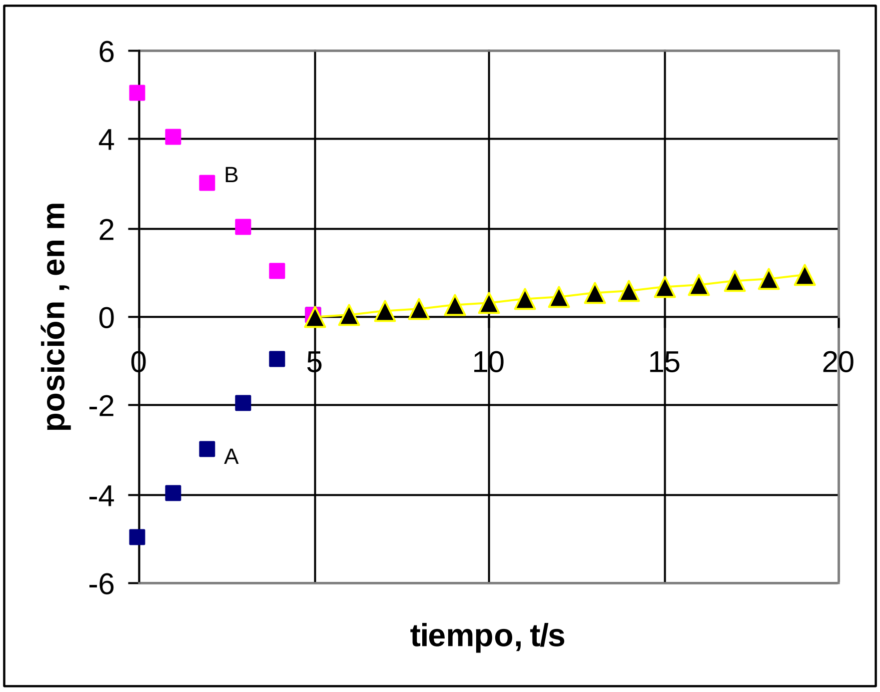
$$(-70\cdot 1)\vec{i} + 60\vec{i} = \vec{p}_B' \quad \Rightarrow \vec{p}_B' = -10\vec{i}\ kg\,ms^{-1}$$

c) La ecuación del patinador A hasta chocar con B es: $x_A = -5 + 1t$

La ecuación del patinador B antes de chocar con A es: $x_B = 5 - 1t$
La variable toma los valores extremos t=0 y t = 5 s. Cuando t=0 las ecuaciones anteriores nos dicen las posiciones de A y B (+5 m y -5 m), cuando t= 5 segundos ocupan la misma posición, esto es, han chocado x_A= x_B

Cuando chocan se mueven juntos a igual velocidad, sea x_{AB} la distancia que recorren. La aplicación de la conservación de la cantidad de movimiento conduce a

$$80\vec{i} - 70\vec{i} = 150\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{15}\vec{i} \Rightarrow \quad x_{AB} = \frac{1}{15}(t-5) \qquad t \geq 5s$$



d) Antes de hacer los cálculos veamos de forma cualitativa el proceso.

Al lanzar el patinador A el balón, al tiempo t=0, su velocidad cambia, designamos el módulo como v_A. El balón sale lanzado del patinador A con una velocidad de 6 m/s respecto del suelo y es recogido por el patinador B al cabo de un tiempo t_1. En este tiempo el patinador A se ha desplazado hacia la derecha con velocidad v_A, y el patinador B hacia la izquierda con una velocidad de 1 m/s. Al recoger B el balón cambia su velocidad a v_B y se mantiene con el balón cogido durante 1 segundo. En este segundo el patinador A se desplaza a la derecha con velocidad v_A y el patinador B se desplaza con velocidad v_B. Al cabo de t_1+1 segundo el patinador B lanza el balón hacia A con una velocidad 5+v_B y llega a A al cabo de un tiempo t_2. Como B la lanza el balón su velocidad cambia a v_{BB}. En el tiempo t_2 el patinador A se ha desplazado hacia la derecha con velocidad v_A y el patinador B se ha desplazado con velocidad v_{BB}. Al cabo del tiempo t_2 el patinador A recibe el balón y cambia su velocidad a v_{AA} y al no haber más intercambio de balón los patinadores se mueven con velocidades v_{AA} y v_{BB}.

1) Cálculo de la velocidad de A al lanzar el balón

$$80\,\vec{i} = 60\,\vec{i} + \vec{p}_A \Rightarrow 20\,\vec{i} = 70\,\vec{v}_A \Rightarrow \vec{v}_A = \frac{2}{7}\,\vec{i} \;\; \mathrm{ms}^{-1}$$

2) Cálculo de t_1.

Sea d_{bal} la distancia que recorre el balón a una velocidad de 6 m/s; $d_{bal} = 6t_1$

En el tiempo t_1 , B se ha desplazado hacia su izquierda una distancia $d_B = 1 \cdot t_1$ 1

La suma de la distancia recorrida por el balón y la distancia que se ha desplazado B es igual a los 10 metros originales a que ambos se encontraban en el momento del lanzamiento

$$6t_1 + t_1 = 10 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{10}{7} = 1{,}43\ \mathrm{s}$$

3) ***Posiciones de A y B a los 1,43 segundos***

Posición de A : $x(A) = -5 + \frac{2}{7} \cdot 1{,}43 = -4{,}59\,m$

Posición de B : $x(B) = +5 - 1 \cdot 1{,}43 = 3{,}57\,m$

4) Cálculo de la velocidad de B (v_B) a los 1,43 segundos

$$-70\,\vec{i} + 60\,\vec{i} = \vec{p}_B = (70+10)\vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_B = -\frac{1}{8}\,ms^{-1}$$

5) ***Posiciones de A y B a los 1,43+1= 2,43 segundos***

Posición de A : $x(A) = -4{,}59 + \frac{2}{7} \cdot 1{,}0 = -4{,}30\,m$

Posición de B : $x(B) = +3{,}57 - \frac{1}{8} \cdot 1{,}0 = +3{,}45\ m$

6) Cálculo de la velocidad de B (V_{BB}) cuando a los 2,43 segundos lanza la bola hacia A

$$-10\,\vec{i} = -10 \cdot \left(5 + \frac{1}{8}\right) i + \vec{p}_B \Rightarrow \vec{p}_B = +41{,}25\,\vec{i} = 70\,\vec{v}_{BB} \Rightarrow \vec{v}_{BB} = +0{,}59\,ms^{-1}$$

7) Cálculo de t_2

$$d_{bol} = \frac{41}{8} t_2 \ ; \quad d_A = \frac{2}{7} t_2 \Rightarrow \frac{41}{8} t_2 + \frac{2}{7} t_2 = 4{,}30 + 3{,}45 = 7{,}75\,m \ \Rightarrow \quad t_2 = 1{,}43\,s$$

8) ***Posiciones de A y B a los 2,43+1,43 =3,86 segundos***

Posición de A : $x(A) = -4{,}30 + \frac{2}{7} \cdot 1{,}43 = -3{,}89\ m$

Posición de B : $x(B) = +3{,}45 + 0{,}59 \cdot 1{,}43 = +4{,}29\,m$

9) Cálculo de la velocidad de A (v_{AA}) cuando coge la bola a los 3,86 segundos

$$20\,\vec{i} - 10 \cdot \frac{41}{8}\vec{i} = \vec{p}_A = -31{,}25\,\vec{i} = 80\ \vec{v}_{AA} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{AA} = -0{,}39\,ms^{-1}$$

A partir de los 3,86 segundos los patinadores se mueven con las velocidades calculadas.

10) ***Posiciones de A y B a los 3,86 +1.0=4,86 segundos***

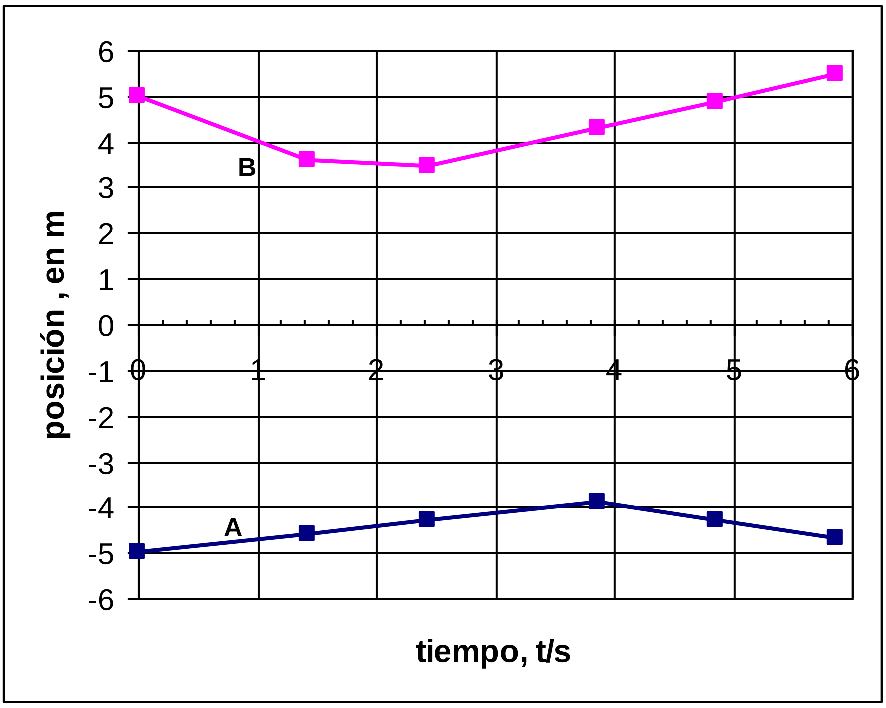
Posición de A : $x(A) = -3{,}89 - 0{,}39 \cdot 1{,}0 = -4{,}28\ m$

Posición de B : $x(B) = +4{,}29 + 0{,}59 \cdot 1{,}0 = +4{,}88\,m$

11) ***Posiciones de A y B a los 4,86 +1.0=5,86 segundos***

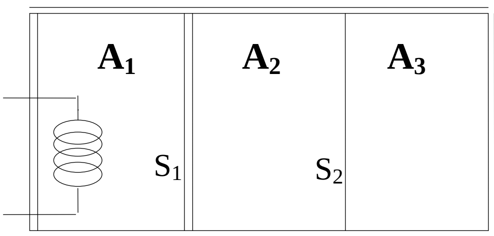
Posición de A : $x(A) = -3{,}89 - 0{,}39 \cdot 2{,}0 = -4{,}67\ m$

Posición de B : $x(B) = +4{,}29 + 0{,}59 \cdot 2{,}0 = +5{,}47\,m$



388.-Considerar un cilindro cerrado cuyas paredes son adiabáticas. El cilindro está colocado horizontalmente y está dividido en tres compartimentos (A_1, A_2 , A_3) separados por dos pistones S_1 y S_2. Ambos pueden desplazarse a lo largo del cilindro sin rozamiento. El pistón S_1 es adiabático y el S_2 conductor del calor, Cada uno de los compartimentos contiene un mol de gas ideal a P_o ; V_o y T_o siendo C_V = 3/2 R y C_p =5/2 R, γ=5/3.
En el compartimento A_1 existe un dispositivo que comunica calor al gas de manera muy lenta con lo que se consigue que el gas del compartimento A_3 adquiera una temperatura de $9T_o/4$.

a) Determinar las coordenadas termodinámicas de cada gas.
b) El trabajo y el calor realizado durante el proceso
c) Los cambios de entropía



Propuesto en las Olimpiadas de India

a) Cuando se suministra calor al gas de A_1 de forma extraordinariamente lenta, el proceso es reversible termodinámicamente. Se suministra una cantidad de calor infinitamente pequeña y el gas de A_1 cambia de la misma manera sus variables termodinámicas, el ligero aumento de la presión desplaza el embolo S_1 a la derecha y a su vez s y a continuación se desplaza el embolo

S_2. De forma reversible se ejerce trabajo del gas de A_1 al de A_2 y y éste al de A_3. En consecuencia el gas de A_1 cambia, en un proceso infinitamente lento sus variables termodinámicas a $P_1 = P_2$, V_1 y T_1, y el gas dos a P_2 , V_2 y $T_2 = 9To/4$, que a su vez adquiere esas variables el gas de A_3.
A efectos de resolver el problema el pistón S_2 se limita separa los gases los cuales se encuentran siempre en equilibrio termodinámico (tienen la misma presión, el mismo volumen y la misma temperatura), En definitiva consideramos que A_1 es un volumen inicial V_o, con un mol de gas, inicialmente a la presión Po y temperatura To y al final a la presión P_2 , V_2 y temperatura 9To/4.

Dado que A_2 y A_3 se encuentran rodeadas de paredes adiabáticas, escribimos para el proceso de cambio de A_2, la ecuación de la transformación adiabática $T V^{\gamma-1} = Cte$.

$$T_o V_o^{\gamma-1} = \frac{9T_o}{4} V_2^{\gamma-1} \Rightarrow V_2^{\gamma-1} = \frac{4}{9} \cdot V_o^{\gamma-1} \Rightarrow V_2 = V_o \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_o \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8 V_0}{27}$$

Aplicamos la ecuación de los gases ideales

$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_2 \frac{8 V_o}{27}}{\frac{9}{4} T_o} \Rightarrow \quad P_2 = P_o \frac{\frac{9}{4}}{\frac{8}{27}} = P_o \frac{243}{32}$$

Si observamos la figura del enunciado cuando ocurre la transformación el volumen total no cambia

$$V_1 + 2V_2 = 3V_o \Rightarrow V_1 = 3V_o - 2\frac{8 V_o}{27} = V_o \left(3 - \frac{16}{27}\right) = V_o \frac{65}{27}$$

Aplicamos la ecuación de los gases al gas de A_1.

$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{\frac{243}{32} P_o \cdot \frac{65 V_o}{27}}{T_1} \Rightarrow \quad T_1 = T_o \frac{243}{32} \cdot \frac{65}{27} = T_o \frac{9 \cdot 65}{32} = T_o \frac{585}{32}$$

b) Aplicamos la primera ley de la termodinámica a los gases de A_2 y A_3.

$$\Delta U = 2.C_V \left(\frac{9T_o}{4} - T_o\right) = W \Rightarrow \quad W = 2 \cdot \frac{3}{2} R \frac{5T_0}{4} = \frac{15 R T_o}{4} = \frac{15 P_o T_o}{4}$$

El trabajo es positivo ya que se suministra desde el exterior (esto es desde A_1)
Este trabajo lo hace el gas A_1 y, por tanto, su valor es negativo. Aplicamos la primera ley de la Termodinámica al gas A_1.

$$\Delta U = 1 \cdot C_v \left(\frac{585}{32} T_o - T_o\right) = Q + W = Q - \frac{15 R T_o}{4} \Rightarrow Q = R T_o \left(\frac{1755}{64} + \frac{15}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q = R T_o \left(\frac{1755 + 240}{64}\right) = \frac{1995}{64} P_o V_o$$

c) Cambio de entropía para el gas A_1

$$\Delta S_1 = C_V \ln \frac{T_o \frac{585}{32}}{T_o} + R \ln \frac{T_o \frac{65}{27}}{T_o} = \frac{3}{2} 8{,}31 \cdot 2{,}906 + 8{,}31 \cdot 0{,}879 = 43{,}5 \ \frac{J}{K}$$

389.-En el modelo clásico del átomo de hidrógeno, el electrón gira en una circunferencia alrededor del núcleo de forma semejante a como se desplaza la Tierra alrededor del Sol, excepto que la fuerza de atracción entre electrón y núcleo es eléctrica. Dado que el electrón está acelerado, emite radiación electromagnética cuya potencia está dada por la ecuación:

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_o c^3}$$

e es la carga elemental de electricidad e =1,6.10^{-19} C, a es la aceleración del electrón en su órbita, c es la velocidad de la luz c= 3,0.10^{8} m/s, ε_o=8,85.10^{-12} C^{2}N^{-1} m^{-2}. El radio del electrón es R =5,0.10^{-11} m y su masa m=9,1.10^{-31} kg.

Calcular:

a) El valor de P y de la energía cinética del electrón

b) Admitiendo de forma aproximada que el tiempo en que el electrón pierde su energía es t=E/P, determinar la vida de un átomo de hidrógeno.

Propuesto en las Olimpiadas de Hong Kong

a) El electrón está acelerado porque describe una órbita circular con velocidad constante y esa aceleración es la denominada centrípeta. La fuerza de atracción eléctrica entre el electrón y el protón del núcleo proporciona la fuerza centrípeta que el electrón necesita para girar.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{R^2} = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{mR^2} \Rightarrow P = \frac{e^2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{mR^2}\right)^2}{6\pi\varepsilon_o c^3} = \frac{e^6}{6\pi\varepsilon_o c^3\left[(4\pi\varepsilon_o)mR^2\right]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{e^6}{96\pi^3\varepsilon_o^3 c^3 m^2 R^4} = \frac{\left(1{,}6.10^{-19}\right)^6 \cdot}{96\pi^3\left(8{,}85.10^{-12} \cdot 3{,}0.10^8\right)^3\left(9{,}1.10^{-31}\right)^2\left(5{,}0.10^{-11}\right)^4} =$$

$$= \frac{1{,}6^6}{96\pi^3 \cdot 26{,}55^3 \cdot 9{,}1^2 \cdot 5^4} \cdot \frac{10^{-114}}{10^{-36} \cdot 10^{24} \cdot 10^{-62} \cdot 10^{-44}} = 5.819.10^{-12} \cdot 10^4 = 5{,}819.10^{-8} \text{ W}$$

La aceleración a es la centrípeta y vale

$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = aR \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2 R}{m R^2}} = e\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o m R}} \Rightarrow$$

$$v = 1{,}6.10^{-19}\sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85.10^{-12} \cdot 9{,}1.10^{-31} \cdot 5.10^{-11}}} = 2{,}25.10^{6}\ \frac{m}{s}$$

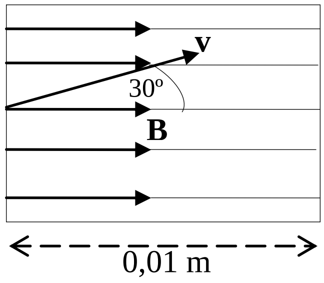
Como la velocidad es unas 133 veces menor que la de la luz, utilizamos para la energía cinética la expresión clásica y no la relativista.

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}9{,}1.10^{-31} \cdot \left(2{,}25.10^{6}\right)^2 = 2{,}30.10^{-18}\ J$$

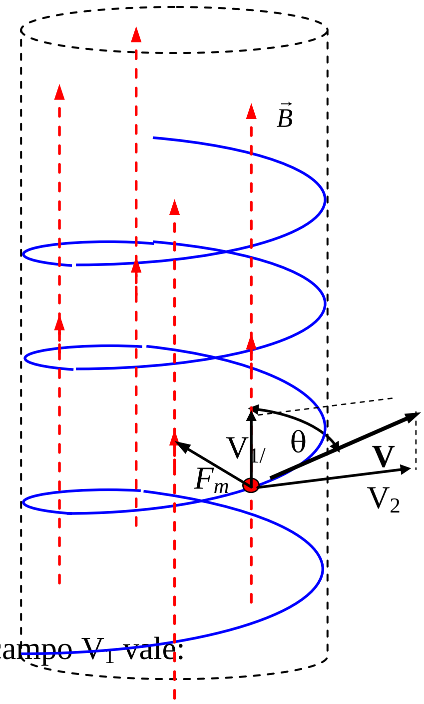
b)

$$t = \frac{E_c}{P} = \frac{2{,}30.10^{-18}}{5{,}819.10^{-8}} = 4{,}0.10^{-11} s$$

390.-En el plano YZ existe un campo magnético uniforme B=0,2 T, cuya longitud medida sobre el eje Y es 0,01 m. Una sección de ese campo se observa en la figura inferior.



El electrón penetra en el campo con una velocidad constante v = 2,0.10^6 m/s formando un ángulo de 30º con el vector campo. Calcular el número de vueltas que efectúa el electrón durante su travesía a través del campo.
Datos . Carga del electrón e = -1,6.10^{-19} C, masa del electrón m= 9,1.10^{-31} kg



La fuerza que actúa sobre una carga que se mueve en un campo magnético obedece a la ecuación. $\vec{F}_m = e\vec{v}\times\vec{B}$
La velocidad del electrón tiene dos componentes una según la dirección y sentido del campo magnético de módulo V_1= V cos 30º y otra en dirección perpendicular al campo de módulo V_2 = V sen 30º. El movimiento del electrón se debe a dos movimientos: uno de avance con velocidad V_1 (m.r.u. porque al ser esta componente paralela al campo B, el producto vectorial de V_1 por B, es nulo y no hay fuerza en esta dirección) y otro movimiento describiendo círculos de radio R, debido a la interacción entre la componente de la velocidad V_2 y el campo. El conjunto simultáneo de los dos movimientos es una espiral hacia la salida del campo, porque su eje tiene la dirección del campo B.

El tiempo de movimiento debido a la componente en la dirección del campo V_1 vale:

$$\tau_1 = \frac{0{,}01}{v.\cos 30º}$$

La interacción entre la componente de la velocidad V_2 y el campo que son perpendiculares nos proporciona la fuerza centrípeta capaz de cambiar la dirección del vector velocidad, cuyo módulo vale

$$e v_2 B = \frac{m\, v_2^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m v_2}{e B}$$

El tiempo que emplea el electrón en describir la circunferencia de radio R es:

$$\tau_2 = \frac{2\pi R}{v_2} = \frac{2\pi \frac{m v_2}{e B}}{v_2} = \frac{2\pi m}{e B}$$

Designamos con n al número de vueltas que efectúa el electrón:

$$n\tau_2 = \tau_1 \Rightarrow n = \frac{\dfrac{0{,}01}{v\cos 30^o}}{\dfrac{2\pi m}{eB}} = \frac{0{,}01eB}{2\pi m v\cos 30^o} = \frac{0{,}01\cdot 1{,}6.10^{-19}\cdot 0{,}2}{2\pi 9{,}1.10^{-31}\cdot 2{,}0.10^{6}\cdot \cos 30} = 32{,}3$$

391.-Determinar las constantes críticas del dióxido de carbono sabiendo que las constantes a y b de la ecuación de van der Waals son:

$$a = 3{,}60\ \frac{atm \cdot L^2}{mol^2} \quad ; \quad b = 4{,}28.10^{-2}\ \frac{L}{mol}$$

Un mol de dióxido de carbono ocupa un volumen de 0,40 L a una temperatura de 50ºC.

Determinar la presión utilizando la ecuación de los gases perfectos y la de van der Waals

Dibuje las isotermas de un mol de gas ideal y de van der Waals

La ecuación de van der Waals para un mol de sustancia es: $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

En el punto crítico la curva debida a la ecuación anterior tiene un punto de inflexión, por tanto, las condiciones de tal estado es que las siguientes derivadas son nulas.

$$\frac{dP}{dV}(T\,cte) = 0 \qquad \frac{d^2P}{dV^2}(T\,cte) = 0$$

Despajamos la presión de la ecuación de van der Waals

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \frac{dP}{dV} = \frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2aV}{V^4} = \frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

$$\frac{d^2P}{dV^2} = \frac{RT \cdot 2(V-b)}{(V-b)^4} - \frac{2a \cdot 3V^2}{V^6} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

Despejamos RT de cada una de las ecuaciones anteriores e igualamos los segundos miembros.

$$RT = \frac{2a(V-b)^2}{V^3}\ ;\ RT = \frac{3a(V-b)^3}{V^4} \Rightarrow \frac{2a(V-b)^2}{V^3} = \frac{3a(V-b)^3}{V^4} \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = \frac{V-b}{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2V = 3V - 3b \quad \Rightarrow \quad V_c = 3b$$

$$\Rightarrow RT = \frac{2a(3b-b)^2}{27b^3} \Rightarrow \quad T_C = \frac{8a}{27Rb} \Rightarrow \quad P_C = \frac{\frac{8a}{27\ b}}{3b-b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \frac{a}{27b^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$V_C = 3 \cdot 4{,}28.10^{-2} = 0{,}13 \ \frac{L}{mol} \ ; \ T_C = \frac{8 \cdot 3{,}60 \frac{atm.L^2}{mol^2}}{27 \cdot 0{,}082 \frac{atm.L}{mol\,K} \cdot 4{,}28.10^{-2} \ \frac{L}{mol}} = 303{,}9K$$

$$P_C = \frac{3{,}60 \frac{atm.L^2}{mol^2}}{27\left(4{,}28.10^{-2}\right)^2 \ \frac{L^2}{mol^2}} = 72{,}8 \ \ atm$$

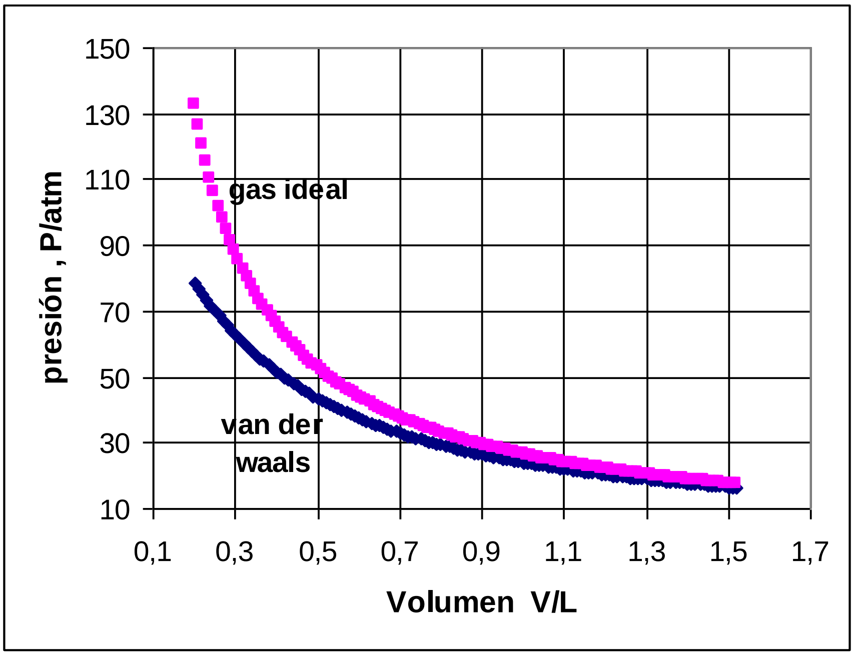
Ecuación de los gases perfectos

$$P = \frac{R\,T}{V} = \frac{0{,}082 \frac{atm\,L}{mol\,K} \cdot (273 + 50)K}{0{,}40L} = 66{,}2 \ \ atm$$

Ecuación de van der Waals

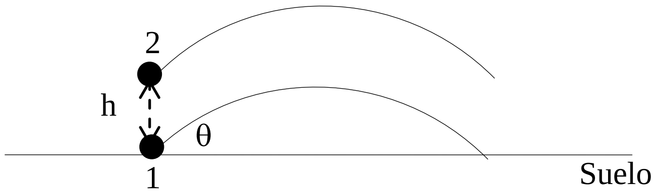
$$P = \frac{R\,T}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{0082 \frac{atm\,L}{mol\,K} \cdot (273+50)K}{\left(0{,}40 - 4{,}28.10^{-2}\right) \frac{L}{mol}} - \frac{3{,}60 \frac{atm\,L^2}{mol^2}}{\left(0{,}40 \frac{L}{mol}\right)^2} = 74{,}1atm - 22{,}5 \ atm$$

$$P = 51{,}6atm$$



Observe que a presiones relativamente bajas la ecuación de los gases ideales coincide con la de van der Waals y discrepan cuando las presiones son elevadas.

392.-Dos esferas pequeñas, numeradas 1 y 2, de masa m cada una, se lanzan al mismo tiempo, con la misma velocidad v y el mismo ángulo θ con la horizontal. La número 1 se lanza a nivel de un suelo horizontal y la 2 a una altura h en vertical sobre la anterior. Véase la figura inferior



Teniendo en cuenta que existe una fuerza de atracción gravitacional entre dichas esferas, además de la intensidad del campo gravitatorio debido a la Tierra, se pide calcular la disminución de distancia, medida en dirección vertical, entre las esferas δh, en el momento en que la 1 esté en el suelo. Para realizar los cálculos se admite que la distancia en vertical h en el trayecto se mantiene constante entre las dos esferas, debido a que δh<<h. Realizar el cálculo cuando v = 200 m/s , θ = 30º ,h=1 m y m=1 kg.

Dato G = 6,67.10^{-11} N m^{2}kg^{-2}

Propuesto en las Olimpiadas de Hong Kong

La esfera 1 en su trayectoria está sometida a la acción de dos fuerza verticales: una mg vertical y hacia abajo y $\frac{Gmm}{h^2}$ vertical y hacia arriba. La esfera 2 está sometida a la fuerza vertical hacia abajo mg y a la atracción gravitatoria $\frac{Gmm}{h^2}$ vertical y hacia abajo.

Para resolver el problema, a la condición del enunciado hay que unir que el tiempo de vuelo no es el mismo para las dos esferas al no estar sometidas a la misma fuerza, por tanto, no se mantienen una encima de la otra sino que existe una pequeña desviación que también despreciamos.

Ecuaciones paramétricas de la esfera 1.

$$x_1 = v\cos\theta \cdot t \ ; \ y_1 = v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}\left(g - \frac{Gm}{h^2}\right)t^2 = v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}g_1 t^2$$

Designamos con d la distancia entre el punto de salida de la esfera 1 y el punto de impacto en el suelo, se cumple que y_1=0

$$v\,\mathrm{sen}\theta = \frac{1}{2}g_1 t \Rightarrow \quad t = \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g_1} \Rightarrow \quad d = v\cos\theta \cdot \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g_1}$$

Las ecuaciones paramétricas de la esfera 2 son:

$$x_2 = v\cos\theta \cdot t \ ; \ y_2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}\left(g + \frac{Gm}{h^2}\right)t^2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}g_2 t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \cdot \frac{x_2}{v\cos\theta} - \frac{1}{2}g_2\left(\frac{x_2}{v\cos\theta}\right)^2$$

Cuando la esfera 1 está en el suelo la 2 está encima pero a una distancia menor que h. Las abscisas de las dos esferas son iguales cuando la 1 está en tierra y podemos escribir

$$v\cos\theta \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g_1} = v\cos\theta \cdot t \Rightarrow \quad t = \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = h + v\,\mathrm{sen}\theta \frac{d}{v\cos\theta} - \frac{1}{2} g_2 \left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)^2$$

El término δh es:

$$\delta h = y_2 - h = v\,\mathrm{sen}\theta \frac{d}{v\cos\theta} - \frac{1}{2} g_2 \left(\frac{d}{v\cos\theta}\right)^2 = d\,\mathrm{tag}\,\theta - \frac{1}{2} g_2 \frac{d^2}{v^2\cos^2\theta}$$

Sustituimos el valor de d

$$\delta h = \frac{2v^2\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{g_1}\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2} g_2 \frac{4v^4\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta}{g_1^2 v^2\cos^2\theta} = \frac{2v^2\mathrm{sen}^2\theta}{g_1} - 2v^2\mathrm{sen}^2\theta \frac{g_2}{g_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta h = 2v^2\mathrm{sen}^2\theta \left(\frac{1}{g_1} - \frac{g_2}{g_1^2}\right) = 2v^2\mathrm{sen}^2\theta \left(\frac{g_1 - g_2}{g_1^2}\right) = 2v^2\mathrm{sen}^2\theta \left(\frac{g - G\frac{m}{h^2} - \left(g + G\frac{m}{h^2}\right)}{\left(g + G\frac{m}{h^2}\right)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta h \approx 2v^2\mathrm{sen}^2\theta \left(\frac{-2G\frac{m}{h^2}}{g^2}\right) = -\frac{4v^2\mathrm{sen}^2\theta}{g^2h^2} G\,m$$

Alternativa.

Podemos considerar con las aproximaciones del enunciado como si la fuerza de interacción gravitatoria entre ellas actuase un tiempo igual al empleado por la bola 1 en llegar al suelo desplazándose con la aceleración g .

$$t = \frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g}$$

La aceleración de acercamiento entre las esferas es: $a = \dfrac{\frac{G\,m\,m}{h^2}}{m} = \dfrac{G\,m}{h^2}$

La distancia δh es:

$$\delta h = 2 \cdot \frac{1}{2} a\,t^2 = \frac{G\,m}{h^2}\left(\frac{2v\,\mathrm{sen}\theta}{g}\right)^2 = G\,m \frac{4v^2\mathrm{sen}^2\theta}{g^2\,h^2}$$

$$\delta h = \frac{6{,}67.10^{-11} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 200^2 \cdot \mathrm{sen}^2 30}{9{,}8^2 \cdot 1^2} = 2{,}8.10^{-8}\,\mathrm{m}$$