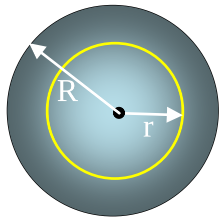
PROBLEMAS VARIADOS 3(2013-2014)

330-.Una esfera de radio R no conductora tiene una carga Q distribuída de forma uniforme por todo el volumen. El módulo del campo radial dentro de la esfera está dado por la siguiente ecuación:

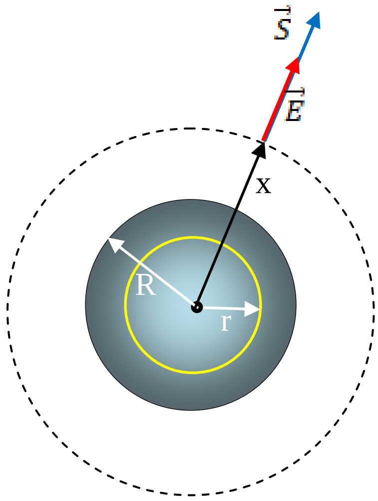
$$\boldsymbol{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r}{R^3}\right)}$$

En la ecuación r es la distancia del centro de la esfera al punto considerado. Calcular el potencial eléctrico de la esfera en función de r.



Partimos de la relación entre el campo y el potencial $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$. Al tratarse de cargas distribuidas uniformemente y por la simetría de la esfera, tanto el potencial como el campo, varían en módulo con la distancia *r* al centro, de modo que la anterior ecuación se puede expresar en módulo.

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int dV = -\int E\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int r\,dr \Rightarrow V = -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + Cte \quad (1)$$



Para hallar la constante de integración tendremos en cuenta que en la superficie de la esfera, el potencial está definido por la ecuación anterior o por la que se obtenga para puntos exteriores con distancias $x \geq R$. considerando que se toma el punto de referencia a potencial 0, en el infinito.

Supongamos una esfera imaginaria (superficie gaussiana) de radio x>R y concéntrica con la esfera cargada. Por la simetría del problema si aplicamos el teorema de Gauss, además de proporcionarnos el valor del flujo, nos permite hallar el módulo del campo eléctrico, que es el objetivo del apartado. Además, como el campo en módulo, vale igual en todos los puntos de la superficie gaussiana resulta.

$\emptyset = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos 0 = E \cdot S = Q/\varepsilon_0$ Donde *Q* es la carga total en el interior de la superficie gaussiana y *S* el área de la esfera de radio *x*.

$$E \cdot 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{dV}{dx} \quad \Rightarrow \quad -V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{dx}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{x}\right) + Cte´$$

Para hallar la constante Cte´, hacemos $x = \infty$ y allí el potencial es nulo, por lo que $Cte´ = 0$.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{x} \quad (2)$$

La ecuación (1) da el valor del potencial cuando r≤R y la ecuación (2) proporciona el potencial cuando x≥R; pero ambas deberán dar el mismo valor cuando x = R, porque el valor del potencial de una distribución de cargas en unívoco, en consecuencia:

$$-\frac{QR^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}+Cte=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad\Rightarrow\quad Cte=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1+\frac{1}{2}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Cte=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Sustituyendo Cte en (1)

$$V=-\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_o R^3}+\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R}-\frac{r^2}{R^3}\right)$$

Nótese que si hacemos $r = R$ resulta un valor para el potencial en la superficie de la esfera, como si toda su carga Q distribuida en el volumen, se encontrara como puntual en su centro.

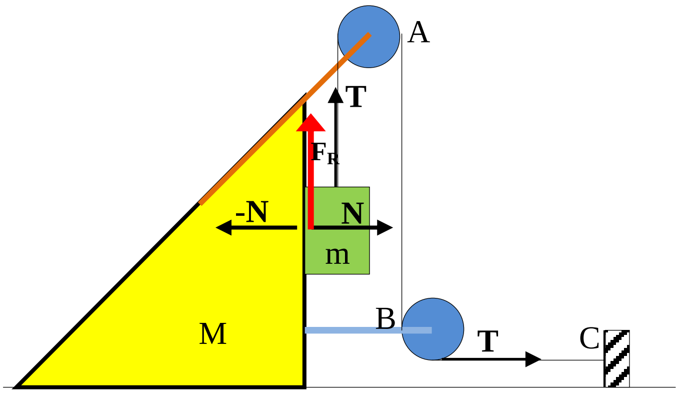
$$V=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R}-\frac{r^2}{R^3}\right)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3}{R}-\frac{R^2}{R^3}\right)=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3-1}{R}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}$$

Por otra parte en el centro de la esfera es $r = 0$ pero el potencial vale:

$$V=\frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R}$$

Que es su valor máximo. Recuérdese que el potencial era nulo en el infinito.

331-. En el sistema mecánico representado en la figura solamente existe un coeficiente de rozamiento μ entre la cuña de masa M y el bloque de masa m. Las masas de las poleas son despreciables. El punto C permanece fijo y la cuerda es inextensible. Calcular la aceleración con que se desplaza el bloque.



Supongamos que el bloque m desliza hacia abajo, lo cual conlleva que el trozo de cuerda entre el punto A y el bloque m, aumente su longitud en Δl, como el trozo de la cuerda entre A y B es constante, el trozo BC se tiene que acortar en la misma longitud Δl, lo que se produce al desplazarse juntos la cuña y el bloque hacia la derecha.

Sea **N** la fuerza horizontal, dirigida de izquierda a derecha, con que la cuña empuja a m; la reacción a ésta, es una fuerza horizontal del mismo módulo pero dirigida de derecha a izquierda y aplicada en la cuña **-N**. Sobre ésta y en dirección horizontal y sentido de izquierda a derecha actúa la tensión **T** de la cuerda, puesto que la polea inferior está unida directamente a la cuña.

La cuña de masa M, se mueve solo en dirección horizontal. Si designamos con a_{HM} al módulo de la aceleración de la cuña hacia la derecha, y de acuerdo con la segunda ley de Newton considerando las fuerzas horizontales que actúan sobre ella:

$$T - N = M a_{HM} \quad (1)$$

Dado que la cuña y el bloque se desplazan juntos debido a las ligaduras que impone el sistema, la aceleración horizontal del bloque es igual a la de cuña:

$$a_{HM} = a_{Hm} \quad (2)$$

Como sobre el bloque actúa la fuerza N dirigida de izquierda a derecha.

$$N = m a_{Hm} \quad (3)$$

Pero el bloque además de la aceleración horizontal, tiene una aceleración vertical, que calculamos a partir de las fuerzas que actúan sobre él verticalmente, con la segunda ley de Newton. Las fuerzas que actúan son: su peso P = mg y en la misma dirección hacia arriba la tensión T de la cuerda y la fuerza de rozamiento $F_R = \mu N$.

$$mg - T - \mu N = m a_{Vm} \quad (4)$$

Como la longitud de la cuerda es constante, si el bloque se desplaza hacia abajo una distancia Δl, la misma distancia se acorta la cuerda BC, en el mismo intervalo de tiempo Δt, por tanto como lo hacen con aceleración se cumple:

$$\Delta l = \frac{1}{2} a_{Vm} \Delta t^2 = \frac{1}{2} a_{HM} \Delta t^2 \Rightarrow a_{Vm} = a_{HM} \quad (5)$$

y las dos aceleraciones son iguales en módulo.

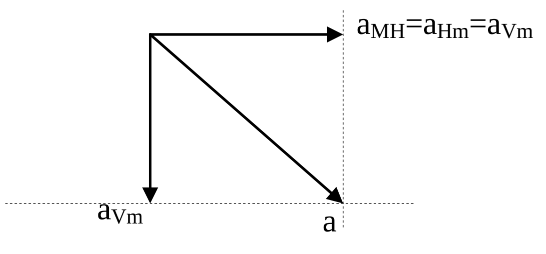
En la ecuación (4) sustituimos T de (1) y tenemos en cuenta las: (2); (3) y (5)

$$mg - M a_{HM} - m a_{Hm} - \mu m a_{Hm} = m a_{Vm} \Rightarrow mg - M a_{Vm} - m a_{Vm} - \mu m a_{Vm} = m a_{Vm} \Rightarrow$$

Como la

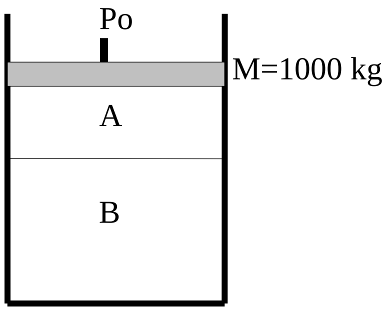
$$\Rightarrow mg = a_{Vm}\left[M + m + \mu m + m\right] \Rightarrow \quad a_{Vm} = \frac{m g}{M + m(2+\mu)} = \frac{g}{2 + \mu + \frac{M}{m}}$$

aceleración horizontal de M es igual a la de m y a su vez igual a la vertical de m, teniendo en cuenta las direcciones de los vectores



$$a = \sqrt{a_{Vm}^2 + a_{Vm}^2} = \sqrt{2}\, a_{Vm} = \frac{\sqrt{2}\, g}{2 + \mu + \frac{M}{m}}$$

332-.Un cilindro adiabático, de sección S =1 m^2, dotado de un émbolo adiabático de masa M= 1000 kg, capacidad calorífica despreciable y que puede desplazarse sin rozamiento, está dividido en dos cámaras por un tabique diatérmano (que deja pasar el calor con facilidad) rígido y fijo, (ver la figura).



La presión exterior que actúa sobre el émbolo es P_o = 10^5 Pa. El compartimento A contiene 10 moles de un gas ideal con C_v=21 J/mol K, a la temperatura de T_o=300K. El compartimento B, 100 moles del mismo gas, a la misma temperatura y presión 10^6 Pa. En estas condiciones se comunica al gas del compartimento B, 1000 kJ de calor y luego se rompe el tabique, el sistema evoluciona hasta una situación de equilibrio.
Calcular: a) el desplazamiento vertical del émbolo, b) la temperatura final y c) la variación de entropía.

a, b). Calculamos los volúmenes de los compartimentos A y B, por aplicación de la ley de los gases ideales. La presión que soporta el gas de A es P_o más la que ejerce el émbolo de masa M.

$$V_A = \frac{n_A R T_o}{P_o + \frac{Mg}{S}} = \frac{10\cdot 8{,}31\cdot 300}{10^5 + \frac{1000\cdot 9{,}8}{1}} = 0{,}227\,m^3\ ;\ V_B = \frac{n_B R T_o}{10^6} = \frac{100\cdot 8{,}31\cdot 300}{10^6} = 0{,}249\,m^3$$

Podemos suponer que rompemos el tabique y justamente la situación es: una temperatura de 300 K y un número de moles 110 de una mezcla de gases ideales. Ahora le comunicamos los 1000 kJ de energía calorífica y el émbolo se eleva aumentando el volumen y la temperatura. El proceso termina cuando la presión interior de la mezcla de gases es igual a la que soporta el émbolo desde el exterior.
Aplicamos el primer principio de la Termodinámica:

$$\Delta U = n C_V (T_F - 300) = Q + W = 10^6 - \int P dV = 10^6 - (109800)\cdot [V_F - (0{,}227 + 0{,}249)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 110\cdot 21\cdot (T_F - 300) = 10^6 - 109800\cdot (V_F - 0{,}476) \quad (1)$$

La ecuación de los gases perfectos aplicada cuando se ha alcanzado el equilibrio, nos permite escribir:

$$109800\cdot V_F = 110\cdot 8{,}31\cdot T_F \quad \Rightarrow \quad V_F = 8{,}33.10^{-3}\,T_F \quad (2)$$

Combinando (2) y (1)

$$2310\,T_F - 693000 = 10^6 - 109800\cdot (8{,}33.10^{-3}\,T_F - 0{,}476) \quad \Rightarrow \quad T_F = 541K$$

$$\Rightarrow V_F = 8{,}33.10^{-3}\cdot 541 = 4{,}51\ m^3 \Rightarrow \Delta V = \Delta x S \Rightarrow \Delta x = \frac{4{,}51 - 0{,}476}{1} = 4{,}03m$$

Cuando un gas ideal cambia su temperatura de T_1 a T_2 y su volumen de V_1 a V_2, el cambio de entropía está dado por la ecuación.

$$\Delta S = n\left(C_v \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Aplicamos la ecuación anterior a los gases contenidos en A y al B

$$\Delta S_A = 10\left(21\cdot \ln\frac{541}{300} + 8{,}31\ln\frac{4{,}51}{0{,}227}\right) = 253\ \frac{J}{K};$$

$$\Delta S_B = 100\left(21\cdot \ln\frac{541}{300} + 8{,}31\ln\frac{4{,}51}{0{,}249}\right) = 3645\frac{J}{K}$$

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 253 + 3645 = 3898\ \frac{J}{K} = 3{,}9\ \frac{kJ}{K}$$

333-.Determinar el centro de masas de una placa homogénea de densidad superficial σ, que tiene la forma de un semicírculo de radio R (ver la figura 1). A esa misma placa se le recorta un semicírculo de radio R/2 en la forma que índica la figura 2. Calcular el centro de masas de la pieza resultante.

Ayuda. $\int sen^3\theta\, d\theta = -\frac{1}{3}\cos\theta\left(sen^2\theta + 2\right)$

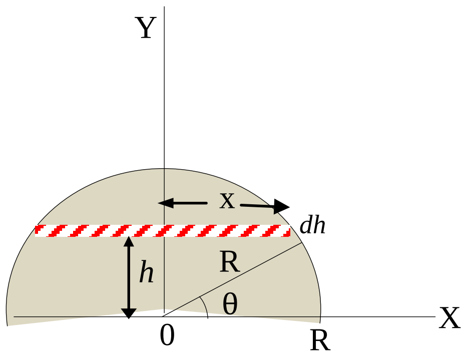


Fig.1

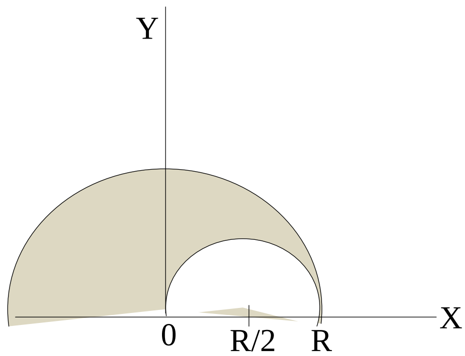


Fig.2

Para calcular el centro de masas de la figura 1, consideramos dividida la placa en tiras de espesor dh. Una de ellas se encuentra a la distancia h del eje X.
La ordenada del c.d.m viene dada por la ecuación:

$$y_C = \frac{\int h\cdot dm}{M_T}$$

Calculamos la masa de ese elemento de longitud x y altura dh. Será $dm = \sigma\cdot dS = \sigma\, x\, dh$

En la ecuación de *dm*, tanto x como h son variables, las cuales pueden relacionarse con la variable θ.

$$x = R\cos\theta \;\; ; \;\; h = R\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow dh = R\cos\theta\, d\theta$$

$$dm = \sigma x dh = \sigma R^2 \cos^2\theta \; d\theta$$

$$y_C = 2\frac{\sigma\int_0^{\pi/2} R^3 \cos^2\theta \cdot \mathrm{sen}\theta\, d\theta}{\frac{\sigma\pi R^2}{2}} = -\frac{4R}{3\pi}\left[\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4R}{3\pi} \qquad (1)$$

Dada la simetría de la placa respecto de los ejes elegidos en la figura 2, el resultado es que la abscisa es nula.

Para calcular el centro de masas de la figura 2, respecto de los ejes XY, Vamos a tener en cuenta la ecuación deducida (1).
Vamos a considerar a la figura 2, formada por dos elementos distintos: el correspondiente a la fig.1 y el otro elemento de radio r =R/2; en blanco en la figura, asignándole para efectos de cálculo una densidad negativa –σ.
De acuerdo con la ecuación (1) las coordenadas del c.d.m. del elemento en blanco de radio r = R/2 serán:

La abscisa por simetría $x_2 = R/2$ y la ordenada $y_2 = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4R}{2\cdot 3\pi}$

Las masas correspondientes a los elementos son: $m_1 = \sigma\cdot\frac{\pi R^2}{2}$ $\quad m_2 = -\sigma\cdot\frac{\pi r^2}{2} = -\sigma\cdot\frac{\pi R^2}{8}$

Ahora, consideramos a la figura completa como formada por dos masas discretas, de modo que el centro de masas del sistema es:

$$x_c = \frac{m_1\cdot x_1 + m_2\cdot x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sigma\cdot\frac{\pi R^2}{2}\cdot 0 + \left(-\sigma\pi\cdot\frac{R^2}{8}\cdot\frac{R}{2}\right)}{\frac{3\sigma\pi R^2}{8}} = -\frac{R}{6}$$

$$y_c = \frac{m_1\cdot y_1 + m_2\cdot y_2}{m_1 + m_2} = \frac{\sigma\cdot\frac{\pi R^2}{2}\cdot\frac{4R}{3\pi} + \left(-\sigma\pi\cdot\frac{R^2}{8}\cdot\frac{4R}{2\cdot 3\pi}\right)}{\frac{3\sigma\pi R^2}{8}} = \frac{14R}{9\pi}$$