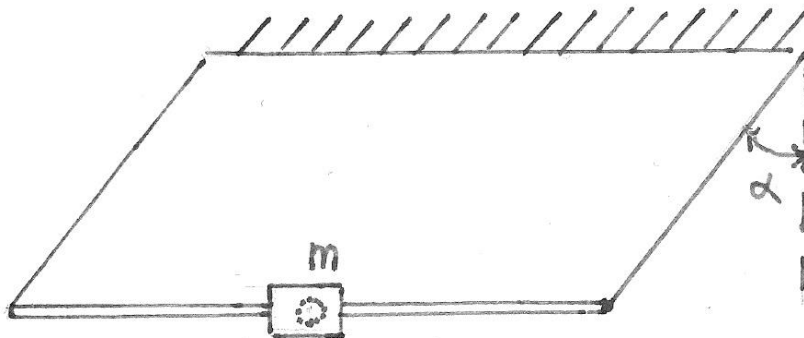


OLIMP-PVARIADOS 3-2020

524.- Una barra homogénea de masa M está suspendida de dos cuerdas, de masa despreciable, de la misma longitud y unidas al techo. Las cuerdas y la barra forman un rectángulo que se encuentra en un plano vertical. En el centro de la barra está engarzada una masa m . Se admite que entre la barra y la masa no hay rozamiento. Se desplaza la barra un ángulo α pequeño en el mismo plano vertical y luego el sistema se deja en libertad (ver la figura inferior). Se pide la aceleración de la masa inmediatamente después de dejar en libertad el sistema.



En la figura 1 están representadas las fuerzas que actúan sobre la masa m y sobre la barra. La fuerza con que la barra empuja a la masa m se ha representado por N . La reacción a esta fuerza aplicada en la barra también se ha representado por N , esas dos fuerzas son acción y reacción

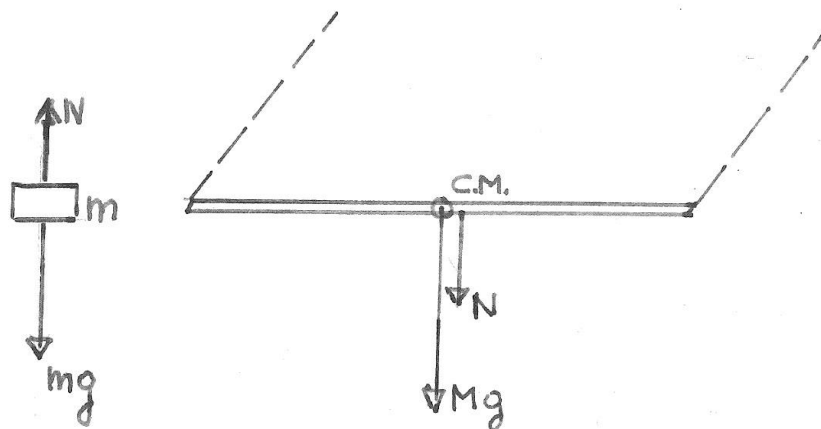


Fig.1

Además de las fuerzas que actúan sobre la barra señaladas en la figura 1, las cuerdas tiran de la barra con una fuerza cada una que hemos designado con T , ver la figura 2.

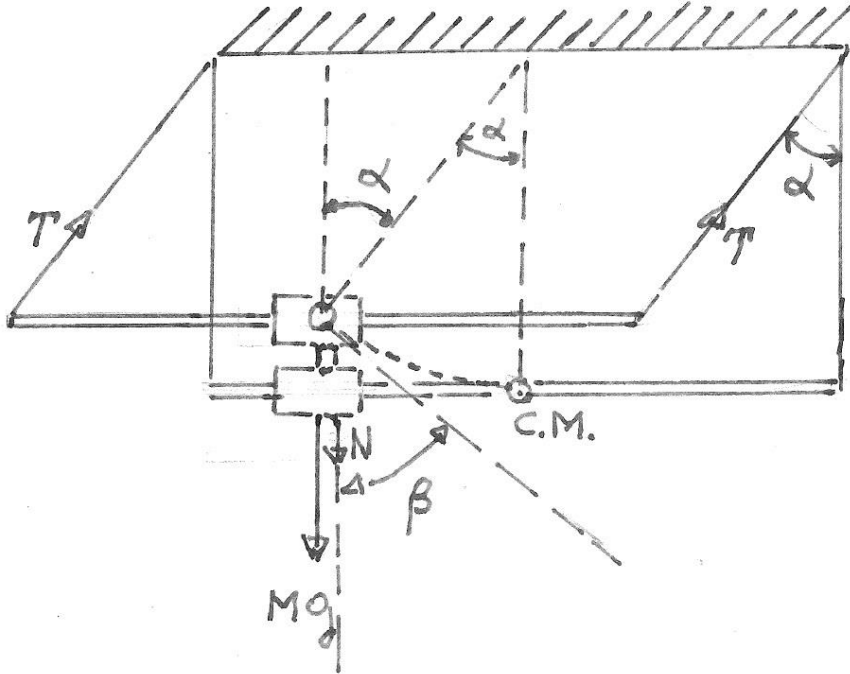
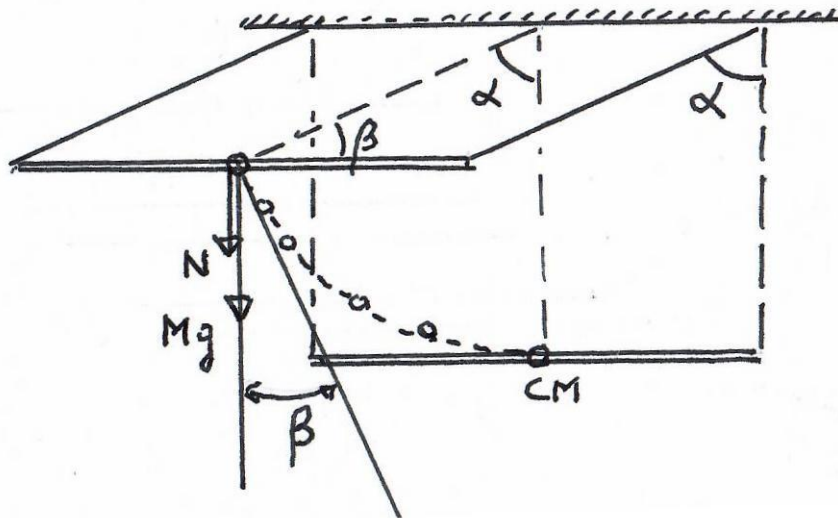


Fig.2



Se representa el movimiento del centro de masas de la barra. El ángulo alfa se ha aumentado y se ha suprimido la masa m para mayor claridad de la figura.

La barra se desplaza por acción de las dos fuerzas Mg y N .

Sobre la masa m actúan dos fuerzas en dirección vertical y como no hay rozamiento la masa permanece en el mismo lugar y está dotada de una aceleración inicial a_m .

Cuando se desplaza la barra hasta la posición más baja su centro de masas (C.M.) describe un arco de circunferencia con una aceleración inicial a_M .

Aplicamos la segunda ley de Newton

$$mg - N = ma_m \quad ; \quad (Mg + N)\cos\beta = Ma_M \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\beta = \sin\alpha$$

$$(Mg + mg - ma_n)\sin\alpha = Ma_M$$

Según el enunciado el ángulo α es pequeño, por lo que $\sin\alpha \approx \alpha$.

$$(Mg + mg - ma_n)\alpha = Ma_M \quad (1)$$

En la figura 3 se han representado las aceleraciones de la masa m y de la barra.

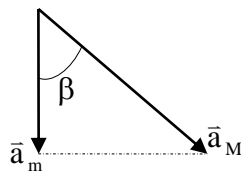


Fig.3

Se deduce para los módulos de los vectores

$$\cos\beta = \sin\alpha \approx \alpha = \frac{a_m}{a_M} \Rightarrow a_M = \frac{a_m}{\alpha}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$(Mg + mg - ma_n)\alpha = M \frac{a_m}{\alpha} \Rightarrow (Mg + mg)\alpha^2 = Ma_m + ma_m\alpha^2 \Rightarrow$$

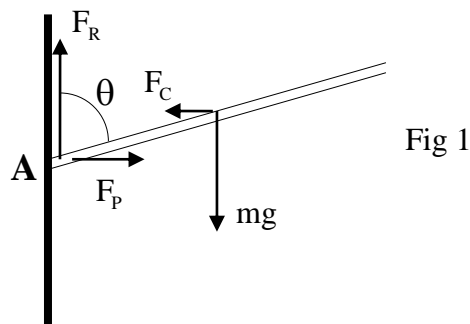
$$\Rightarrow a_m = \frac{(M + m)g\alpha^2}{M + m\alpha^2}$$

525.- Una atracción de feria consiste en una motocicleta describiendo circunferencias apoyadas sus ruedas sobre una pared vertical perteneciente a la pared interna de un cilindro hueco de radio R .

En este problema se proponen dos modelos, uno más sencillo que el otro, y para cada uno se calcula la velocidad angular de la motocicleta que permite realizar el movimiento citado.

En el primer modelo la motocicleta se considera como una barra uniforme de longitud $h \ll R$. En el segundo modelo se considera la motocicleta como una barra de longitud h , pero ahora, aun cuando h es menor que R , su valor no es despreciable frente a R como en el caso anterior. Calcular en cada caso la velocidad angular.

En la figura 1 la motocicleta forma un ángulo θ con la pared del cilindro. Consideramos un sistema de referencia ligado a la motocicleta, sistema que no es inercial ya que existe aceleración. Para este sistema la suma vectorial de las fuerzas es nula y también la suma de los momentos. Las fuerzas que actúan son : El peso mg , la fuerza de rozamiento F_R , la fuerza que la pared del cilindro empuja a la motocicleta F_P y como el sistema es no inercial hay que añadir una fuerza de inercia que es la denominada fuerza centrífuga. F_C . Como $h \ll R$ consideramos que el peso y la fuerza centrífuga actúan en el centro de masa de la barra que al ser uniforme está en la mitad de su longitud.



Si tomamos momentos respecto de A, el punto de contacto con la pared, las dos fuerzas que ejercen momentos son F_C y mg y su suma vectorial es nula.. Teniendo en cuenta que los momentos están sobre un eje perpendicular a la barra nos basta utilizar para los momentos signo + para el momento de la fuerza centrífuga y - para el momento de la fuerza peso, por ser los momentos contrarios..

$$m \omega^2 R \frac{h}{2} \cos \theta - m g \frac{h}{2} \sin \theta = 0 \Rightarrow \omega^2 R \cos \theta = g \sin \theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tag} \theta}{R}}$$

En el segundo modelo al ser la longitud h no despreciable frente a R , se ha de calcular la fuerza centrífuga a partir de elementos de masa dm y longitud dx

En la figura 2 consideramos una masa dm que tiene una longitud dx y que dista de la pared x . La distancia de ese elemento al centro del cilindro es $r < R$. Vonsiderando el momento respecto al punto de contacto con la pared

$$dM_C = dm \omega^2 r x \cos \theta$$

La diferencia entre R y r es: $R - r = x \operatorname{sen}\theta$

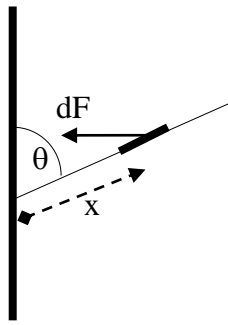


Fig.2

Como la barra es homogénea: $\frac{m}{h} = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \frac{m}{h} dx$

$$M_c = \int_0^h \frac{m}{h} dx \cdot \omega^2 (R - x \operatorname{sen}\theta) x \cos\theta = \frac{m \omega^2 \cos\theta}{h} \int_0^h (R x - x^2 \operatorname{sen}\theta) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_c = \frac{m \omega^2 \cos\theta}{h} \left\| \frac{R x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \operatorname{sen}\theta \right\|_0^h = \frac{m \omega^2 \cos\theta}{h} \left(\frac{R h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \operatorname{sen}\theta \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_c = m \omega^2 h \cos\theta \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{3} \operatorname{sen}\theta \right)$$

El momento del peso es: $M_p = -mg \frac{h}{2} \operatorname{sen}\theta$

$$m \omega^2 h \cos\theta \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{3} \operatorname{sen}\theta \right) - mg \frac{h}{2} \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 \cos\theta \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{3} \operatorname{sen}\theta \right) = \frac{g \operatorname{sen}\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tag}\theta}{R - \frac{2}{3} h \operatorname{sen}\theta}}$$

526.- Dentro de una esfera de radio R se distribuye una carga eléctrica cuya densidad cúbica de carga obedece a la ley $\rho = \rho_0 r$, siendo $r \leq R$ la distancia al centro de la esfera y ρ_0 una constante. Calcular a) la carga de la esfera. b) El campo y el potencial para puntos $r \geq R$ c) El campo y el potencial para puntos $r \leq R$.

Escuela de Ingeniería y Aeronáutica y del Espacio de Madrid

a) Consideramos una corona esférica de radio r y espesor dr . La variable r esta comprendida entre cero y R El volumen de la corona es:

$$dV = \frac{4}{3} \pi (r + dr)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3) - \frac{4}{3} \pi r^3$$

Despreciando los infinitésimos de orden superior $dV = 4\pi r^2 dr$. La carga eléctrica de la corona es: $dQ = 4\pi r^2 \rho_0 r dr = 4\pi \rho_0 r^3 dr$. La carga de la esfera se obtiene integrando entre los valores extremos de r

$$Q = \int_0^R 4\pi \rho_0 r^3 dr = 4\pi \rho_0 \frac{R^4}{4} = \pi \rho_0 R^4$$

b) Aplicamos la ley de Gauss a una esfera de radio $r \geq R$ concéntrica con la esfera de radio R . Por la simetría del campo eléctrico en el caso presente, éste es radial, saliente y del mismo módulo en todos los puntos de la esfera de Gauss de radio r , mientras que dS es un elemento de esta superficie, perpendicular a la misma, dirección radial y saliente por definición del vector superficie. En definitiva estos dos vectores son en cada elemento de superficie de la misma dirección sentido.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

$$\int E dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\pi \rho_0 R^4}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 r^2}$$

El campo es una magnitud vectorial y en un punto exterior es:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

El vector \vec{u} es un unitario situado en la recta que une el centro de la esfera con el punto elegido del campo y apuntando hacia afuera.

Para calcular el potencial aplicamos la relación entre campo y potencial

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int -dV = \int \frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow -V = -\frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0} \frac{1}{r} + Cte$$

Cuando r es infinito el potencial es nulo, $Cte = 0$, luego. $V = \frac{\rho_o R^4}{4 \epsilon_o r}$

En el caso particular de considerar un punto en la superficie de la esfera de radio R el potencial vale: $V_s = \frac{\rho_o R^3}{4 \epsilon_o}$

c) Consideramos la superficie de una esfera de radio $r \leq R$ concéntrica con la esfera y aplicamos el teorema de Gauss

$$\int E dS = \frac{q}{\epsilon_o} \Rightarrow E 4 \pi r^2 = \frac{\int_0^r 4 \pi x^2 \rho_o x dx}{\epsilon_o} \Rightarrow E = \frac{4 \pi \rho_o \frac{r^4}{4}}{4 \pi r^2 \epsilon_o} = \frac{\rho_o r^2}{4 \epsilon_o}$$

La expresión vectorial del campo es. $\vec{E} = \frac{\rho_o r^2}{4 \epsilon_o} \vec{u}$, \vec{u} es un vector unitario que está en la recta que une el centro de la esfera con el punto interior que consideramos y dirigido hacia el exterior de la esfera de radio R .

Cálculo del potencial.

$$\frac{\rho_o r^2}{4 \epsilon_o} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int \frac{\rho_o r^2}{4 \epsilon_o} dr = -V \Rightarrow \frac{\rho_o r^3}{12 \epsilon_o} + Cte = -V$$

Cuando $r = R$, el potencial en la superficie se ha calculado en el apartado anterior

$$Cte = -\frac{\rho_o R^3}{4 \epsilon_o} - \frac{\rho_o R^3}{12 \epsilon_o} = -\frac{4 \rho_o R^3}{12 \epsilon_o} = -\frac{\rho_o R^3}{3 \epsilon_o}$$

Sustituyendo en el potencial

$$V = -Cte - \frac{\rho_o r^3}{12 \epsilon_o} = \frac{\rho_o R^3}{3 \epsilon_o} - \frac{\rho_o r^3}{12 \epsilon_o} = \frac{\rho_o}{12 \epsilon_o} (4R^3 - r^3)$$

Como se habrá observado, para hallar el potencial en un punto de la superficie de la esfera, se calcula la integral de línea del campo desde un punto al que se le asigna potencial cero, por considerarlo en el infinito y muy lejos de las cargas. Sin embargo para el potencial en puntos del interior, hay que calcular la integral de línea del campo desde la superficie de la esfera, cuyo potencial se ha calculado anteriormente, hasta el punto situado a una distancia r del centro de la esfera.

527.- En la figura 1 esta representado un conductor rectilíneo de gran longitud recorrido por una corriente de intensidad I y una espira cuadrada de lado a . Los lados AB y CD de la espira son paralelos al conductor. La figura 2 representa lo mismo que la figura 1 pero vista desde el conductor (H_2). El lado AB de la espira y el conductor están en un plano horizontal. En la espira se considera una tira de espesor dx y a una distancia x del lado AB . Se pide el flujo magnético que atraviesa la espira.

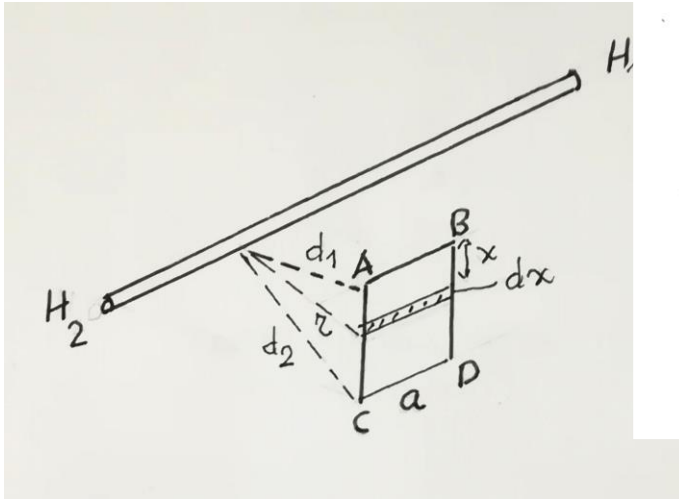


Fig. 1

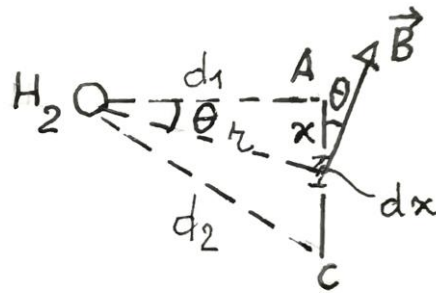


Fig 2

Vamos a considerar que la corriente circula de H_1 a H_2 . Dado que las líneas del campo magnético son cerradas y en el caso tratado aquí al ser el conductor rectilíneo e indefinido son circunferencias concéntricas con el conductor y el vector campo es tangente a las mismas, estando su sentido determinado por la regla de la mano derecha (se abraza el conductor con el pulgar en el sentido de la corriente, el resto de los dedos señalan el sentido de las líneas de inducción). Como resultado, al encontrarse el elemento dx en un plano inferior al que contiene el conductor y al borde AB el campo \vec{B} forma un ángulo θ con el lado AC .

El conductor crea un campo magnético a una distancia r de módulo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

El vector campo magnético forma con la tira un ángulo θ . El vector superficie es perpendicular al elemento de área y , por lo tanto, forma con el campo magnético un ángulo igual al complementario de θ .

El flujo magnético que atraviesa la tira de espesor dx es:

$$d\Phi = B dS \cos(90 - \theta) = B \sin\theta \cdot a \, dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin\theta \cdot a \, dx$$

De la figura 2 se deduce: $\sin\theta = \frac{x}{r}$ y $r^2 = x^2 + d_1^2 \Rightarrow r \, dr = x \, dx$. Sustituyendo en $d\Phi$

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{x}{r} a dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r^2} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{r}{r^2} dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

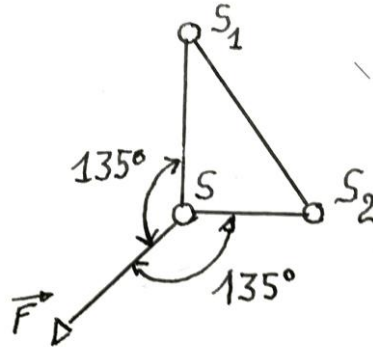
El flujo magnético a través de la espira

$$\Phi = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

528.- Tres cargas puntuales S , S_1 , S_2 ocupan los vértices de un triángulo rectángulo. Las distancias SS_1 y SS_2 cumplen la relación $\frac{SS_1}{SS_2} = \frac{3}{2}$. En la

figura la fuerza \vec{F} es la resultante de la acción que en el vacío ejercen las cargas S_1 y S_2 sobre la carga S .

a) Determinar la relación entre las cargas S_1/S_2



Si ahora se intercambian las posiciones de las cargas S_1 y S_2 la fuerza sobre la carga S la representamos por \vec{F}_1 .

b) Calcular la relación entre los módulos $\frac{F_1}{F}$.

Propuesto en las Olimpiadas de Suiza

a) En la figura 1 se observa que el vector \mathbf{F} tiene dos componentes iguales en módulo sobre los ejes cartesianos. designamos con $3d$ a la distancia SS_1 y con $2d$ a la distancia SS_2

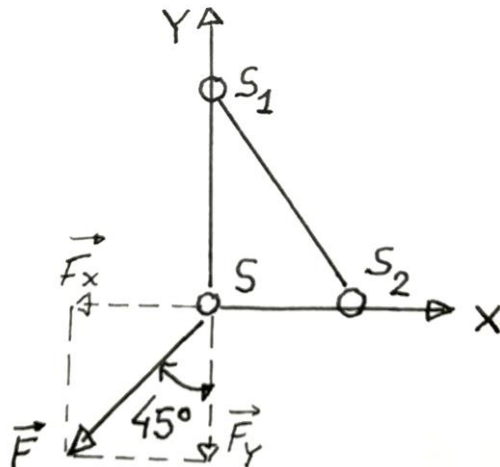


Fig .1

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{S \cdot S_2}{4d^2} = F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{S \cdot S_1}{9d^2} \Rightarrow \frac{S \cdot S_2}{4} = \frac{S \cdot S_1}{9} \Rightarrow \frac{S \cdot S_2}{S \cdot S_1} = \frac{4}{9}$$

El módulo de \mathbf{F} es:

$$F = \sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{S \cdot S_1}{9d^2} \right]^2 + \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{S \cdot S_2}{4d^2} \right]^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2} \sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{81} + \frac{(S \cdot S_2)^2}{16}} \quad (1)$$

b) Al intercambiar las posiciones de las cargas, es lo que hacemos en la ecuación (1)

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2} \sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{16} + \frac{(S \cdot S_2)^2}{81}} \quad (2)$$

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2} \sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{16} + \frac{(S \cdot S_2)^2}{81}}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 d^2} \sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{81} + \frac{(S \cdot S_2)^2}{16}}} = \frac{\sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{16} + \frac{(S \cdot S_2)^2}{81}}}{\sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{81} + \frac{(S \cdot S_2)^2}{16}}} = \frac{\sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{16} + \frac{(S \cdot S_1)^2}{81} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2}}{\sqrt{\frac{(S \cdot S_1)^2}{81} + \frac{(S \cdot S_1)^2}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{\frac{1}{16} + \frac{16}{81^2}}{\frac{1}{81} + \frac{1}{81}}} = 1,62$$

