OLIMP-PVARIADOS3-2019

479.-Un circuito está formado por una batería de 18 V y resistencia interna 0,1 Ω, en serie con dos resistencias de 0,4 Ω y 6,0 Ω independientes de la intensidad de la corriente que las atraviese. En paralelo con la resistencia de 6 Ω se conecta un semiconductor cuya resistencia en ohmios es $R=\sqrt{\frac{18}{I}}$, siendo I la intensidad de la corriente que lo atraviesa medida en amperios. Calcular I.

Propuesto en el libro "Fundamentos de electricidad y magnetismo" E.M Pugh y E.W. Pugh. Editorial Aguilar

En la figura 1 se encuentra el esquema del circuito

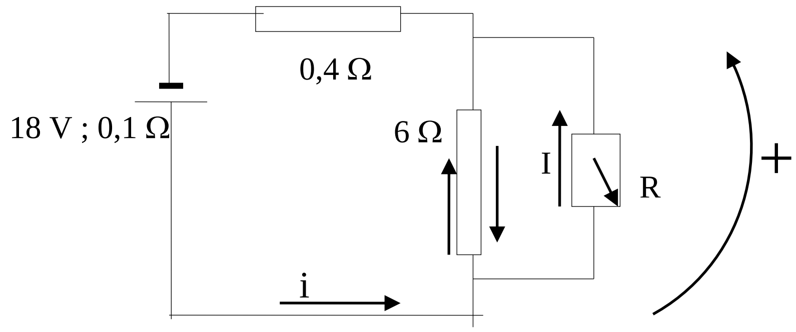


Fig. 1

La intensidad i recorre la batería y la resistencia de 0,4 Ω. La intensidad I atraviesa el semiconductor y las intensidades i hacia arriba e I hacia abajo la resistencia de 6 Ω.
Aplicamos la ley de ohm generalizada a las dos mallas del circuito

$$i\cdot 0,5+(i-I)\cdot 6=18 \quad ; \quad IR+(I-i)\cdot 6=0$$

Sumamos las dos ecuaciones

$$i\cdot 0,5+IR=18 \;\Rightarrow\; i=\frac{18-IR}{0,5} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow IR+\left(I-\frac{18-IR}{0,5}\right)\cdot 6=0 \;\Rightarrow IR+6I-18\cdot 12+12IR=0 \;\Rightarrow\; 13IR+6I-216=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13I\sqrt{\frac{18}{I}}+6I=216 \;\Rightarrow 13\sqrt{18I}+6I=216 \;\Rightarrow\; 39\sqrt{2I}=216-6I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3042I=46656+36I^2-2592I \;\Rightarrow\; 36I^2-5634I+46656=0 \;\Rightarrow\; I^2-156,5+1296=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$I=\frac{156,5\pm\sqrt{156,5^2-4\cdot 1296}}{2}=\frac{156,5\pm 139}{2} \quad \text{Solución}\,1=8,75A \;;\text{Solución}\,2=148A$$

La solución válida es 8,75 que al sustituir ese valor en i da un número positivo, mientras que la solución 2 da para i un valor negativo.

480.-Un recipiente cilíndrico lleva incorporado un pistón móvil y contiene 2,00 moles de aire, siendo su volumen V_0 En principio el aire se encuentra a la presión atmosférica p_a=1,01.10^5 Pa y a la temperatura T_o= 298 K. El aire sufre los siguientes procesos A) compresión a temperatura constante hasta que el volumen es ¼ V_o B) expansión adiabática hasta un volumen de 15,0 L, C) a temperatura constante expansión hasta alcanzar el volumen V_o D) a volumen constante el aire vuelve a la temperatura inicial To. Considerar al aire como un gas diatómico y perfecto.
1) Dibujar el diagrama PV del ciclo
2) Calcular el trabajo durante el proceso A.

American Association of Physics Teachers

Calculamos las coordenadas termodinámicas de los estados de la transformación

Estado inicial

$$1{,}01.10^5 \cdot V_o = n\,R\;298 \;\Rightarrow\; V_o = \frac{2\,\text{mol}\cdot 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol}\,\text{K}}\,298\,\text{K}}{1{,}01.10^5\ \text{Pa}} = 0{,}049\,\text{m}^3 = 49\,\text{L}$$

Estado inicial $1{,}01.10^5\,\text{Pa} \quad 0{,}049\,\text{m}^3 \quad T_o = 298\,\text{K}$

Transformación A) Compresión isotérmica

$$1{,}01.10^5 \cdot 0{,}049 = p_A \cdot \frac{0{,}049}{4} \quad p_A = 4{,}04.10^5\,\text{Pa}$$

Estado A) $4{,}04.10^5\,\text{Pa}$; $0{,}01225\ \text{m}^3$; $T_o = 298\,\text{K}$

Transformación B) Adiabática

Al ser un gas diatómico $\gamma = 1{,}4$

$PV^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow 4{,}04.10^5 \cdot 0{,}01225^{1{,}4} = p_B \cdot 0{,}015^{1{,}4} \Rightarrow p_B = 0{,}2548.10^5 \Rightarrow p_B = 3{,}04.10^5\,\text{Pa}$ Calculamos la temperatura

$$3{,}04.10^5 \cdot 0{,}015 = 2\cdot 8{,}31 \cdot T_B \Rightarrow T_B = 274\ \text{K}$$

Estado B) $3{,}04.10^5\,\text{Pa}$; $0{,}015\ \text{m}^3$; $T_o = 274\ \text{K}$

Transformación C) Expansión isotérmica

$$3{,}04.10^5 \cdot 0{,}015 = p_C\,0{,}049 \;\Rightarrow\; p_C = 0{,}93.10^5\,\text{Pa}$$

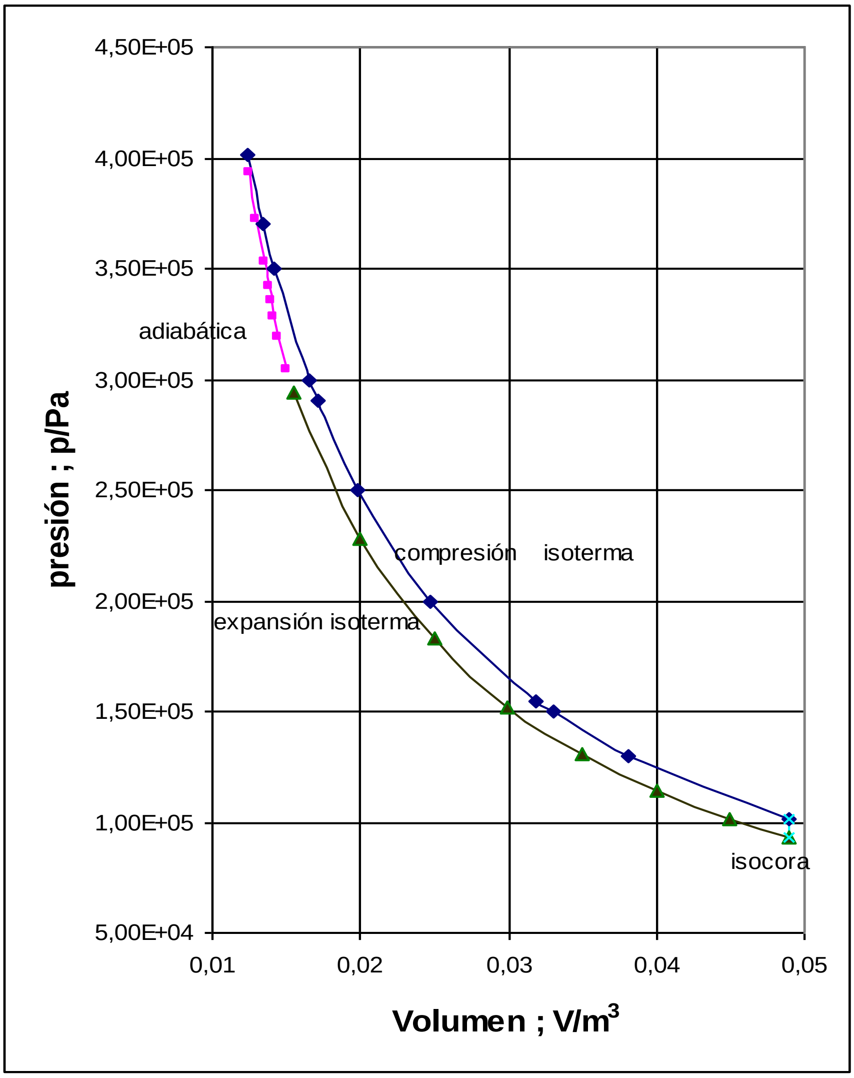
Estado C) $0{,}93.10^5\,\text{Pa}$; $0{,}049\,\text{m}^3$; $T_o = 274\ \text{K}$

Transformación D) Isocora

$$\frac{0{,}93.10^5}{274} = \frac{p_D}{298} \quad \Rightarrow \quad p_D = 1{,}01.10^5\,\mathrm{Pa}$$

Estado D) $1{,}01.10^5$ Pa ; $0{,}049\ m^3$; $T_o = 298$ K

El estado D es el inicial, por tanto se ha verificado un ciclo completo.
La grafica se ha realizado con ayuda de la hoja de cálculo.



2) El proceso A es una isoterma

$$W = -\int_{Vo}^{V_A} PdV = -\int_{Vo}^{V_A} nRT_o \frac{dV}{V} = -nRT_o \ln\frac{V_A}{V_o} = -2\cdot 8{,}31\cdot 298\cdot \ln\frac{0{,}01225}{0{,}049} = 6866\,\mathrm{J}$$

El signo positivo nos indica que el sistema recibe trabajo desde el exterior

481.-Un globo asciende en vertical con una velocidad constante de 5 m/s. Cuando se encuentra a h=100 metros sobre la superficie terrestre se desprende del globo un objeto. Calcular el tiempo que tarda ese objeto en llegar al suelo y la velocidad en ese momento. El problema debe analizarse desde a) un sistema inercial ligado a la tierra b) un sistema inercial ligado al globo.

a) Consideramos unos ejes cartesianos con el eje X sobre el suelo y el eje Y vertical y positivo hacia arriba. Para este sistema g = -9,8 m/s^2 , h = +100 m y la velocidad inicial del objeto v_o=+ 5 m/s.

$$v = v_o + g\,t \quad ; \quad y = h + v_o t + \frac{1}{2} g\,t^2 \Rightarrow v = 5 - 9{,}8\ t \quad ; \quad y = 100 + 5\,t - 4{,}9\,t^2$$

Cuando el objeto llegue al suelo y =0

$$0 = 100 + 5\,\tau - 4{,}9\,\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \tau^2 - 1{,}02\,\tau - 20.41 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1.02 \pm \sqrt{1{,}02^2 + 4 \cdot 20{,}41}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{1{,}02 + 9{,}09}{2} = 5{,}06\,s; \quad ; \quad v = 5 - 9{,}8 \cdot 5{,}06 = -44{,}6\,\frac{m}{s}$$

b) El sistema inercial ligado al globo tiene un eje X´ en la barquilla del globo y un eje Y´ vertical y hacia arriba positivo. Para este sistema la posición inicial del objeto es cero, su velocidad inicial nula y en el tiempo t=0 el suelo se encuentra a-100 metros, g=-9,8 m/s^2.

$v¨ = -9{,}8\,t \quad ; \quad y´ = -4{,}9\,t^2$ Para el sistema del globo el suelo se esta alejando con una velocidad de -5 m/s y cuando el objeto llegue al suelo y´=-100-5 τ

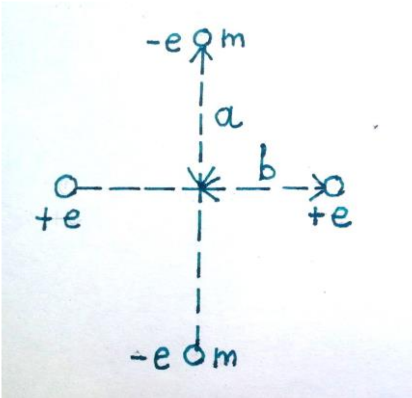
$$-100 - 5\tau = -4{,}9\ \tau^2 \Rightarrow \tau^2 - 1{,}02\,\tau - 20{,}41 = 0 \Rightarrow \tau = 5{,}06\,s$$

$$v¨ = -9{,}8 \cdot 5{,}06 = -49{,}6\,m/s$$

Considerando el movimiento relativo, podemos observar que la velocidad absoluta (la que lleva respecto del suelo) es igual a la velocidad relativa (la que lleva respecto del globo), más la velocidad de arrastre (es la del globo).

v = v¨ + v_g = -49,6 m/s + 5 m/s = -44,6 m/s

482.- El sistema de la figura está formado por cuatro cargas, cada una de valor absoluto e, colocadas en el vacío. Las dos cargas negativas están asentadas sobre una masa m. Las dos positivas se encuentran fijas, y las dos negativas giran en una circunferencia de centro en la mitad del segmento de longitud 2b y radio a, siendo a perpendicular a la línea de longitud 2b en su punto medio.



a) Calcular la relación entre a y b para asegurar que existe equilibrio estático del sistema.
b) ¿A qué velocidad angular deben girar las cargas negativas para que haya equilibrio dinámico?
Se desprecian las posibles interacciones gravitatorias.

a) En la figura 1 se han dibujado las fuerzas que actúan sobre una carga positiva y una negativa. Sobre la positiva de la derecha actúan tres fuerzas cuya suma vectorial debe ser nula. Escribimos la suma de las componentes sobre el eje horizontal

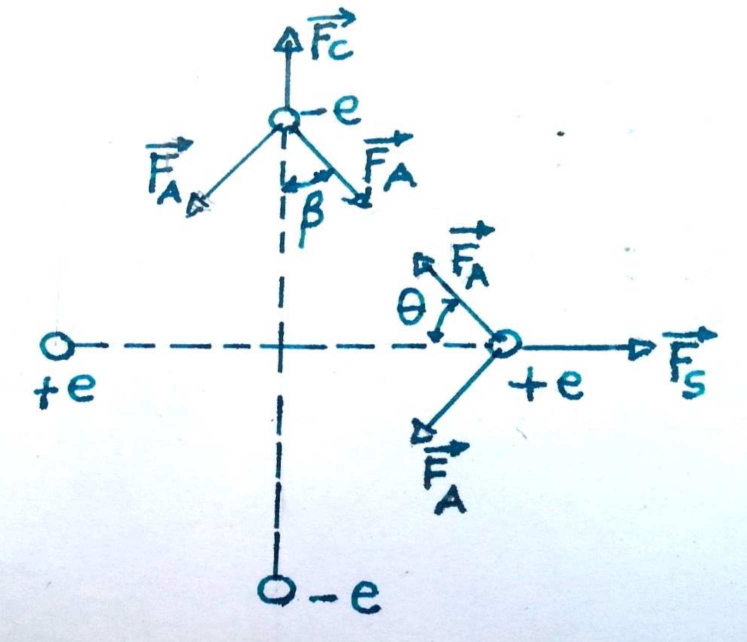


Fig.1

$$F_S - 2F_A\cos\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad K\frac{e^2}{(2b)^2} = 2K\frac{e^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4b^2} = \frac{2b}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 8b^3 = (a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow (8b^3)^{\frac{1}{3}} = \left[(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow (2^3)^{\frac{1}{3}}\, b = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad 4b^2 = a^2+b^2 \quad\Rightarrow\quad 3b^2 = a^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

La fuerza resultante sobre la carga negativa es la que proporciona a la masa m la fuerza centrípeta que necesita para girar

$$2F_A\cos\beta - F_C = m\omega^2 a \;\Rightarrow 2K\frac{e^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - K\frac{e^2}{4a^2} = m\omega^2 a \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{2a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2$$

Sustituimos b en función de a: $b = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$$\frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{2a}{\left(a^2+\frac{a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2 \Rightarrow \frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{2a}{\left(\frac{4a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2 \Rightarrow \frac{Ke^2}{ma}\left[\frac{3^{\frac{3}{2}}\cdot 2a}{4^{\frac{3}{2}}a^3} - \frac{1}{4a^2}\right] = \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Ke^2}{ma}\left(\frac{3\sqrt{3}\cdot 2a}{8a^3} - \frac{1}{4a^2}\right) = \omega^2 \Rightarrow \quad \frac{Ke^2}{ma}\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4a^2}\right) = \omega^2 \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{ma}\,\frac{e\sqrt{3\sqrt{3}-1}}{2a}}$$

483.-En el circuito de la figura están instalas 30 bombillas en paralelo cada una con una resistencia de 30Ω, una batería de fuerza electromotriz $\varepsilon_B = 24V$ y resistencia interna r_B =0,02Ω y un generador de resistencia interna r_G =0,04 Ω y de fuerza electromotriz variable ε_G .Los polos del generador y de la batería están conectados positivo con positivo y negativo con negativo.

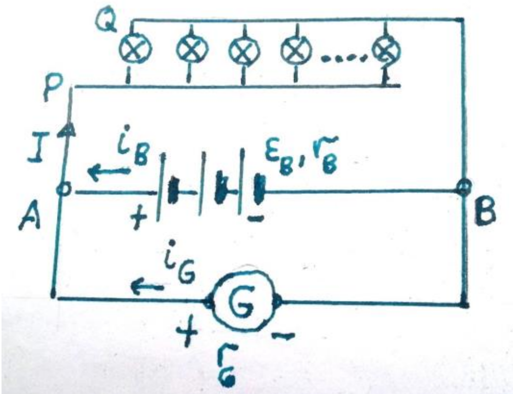


Fig.1

a) Calcular si la batería suministra corriente a las bombillas cuando la fuerza electromotriz del generador es 24,2 V.
b) Calcular la fuerza electromotriz del generador a partir de la cual la batería no suministra corriente a las bombillas.
c) Cuando la fuerza electromotriz del generador es 22,5 V determinar la intensidad de la corriente que lo atraviesa.

a) Calculamos la resistencia de las bombillas dispuestas en paralelo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + ...\frac{1}{30} = \frac{30}{30} \Rightarrow \qquad R = 1\Omega$$

En la figura 1 se ha dibujado el circuito de una manera más conocida

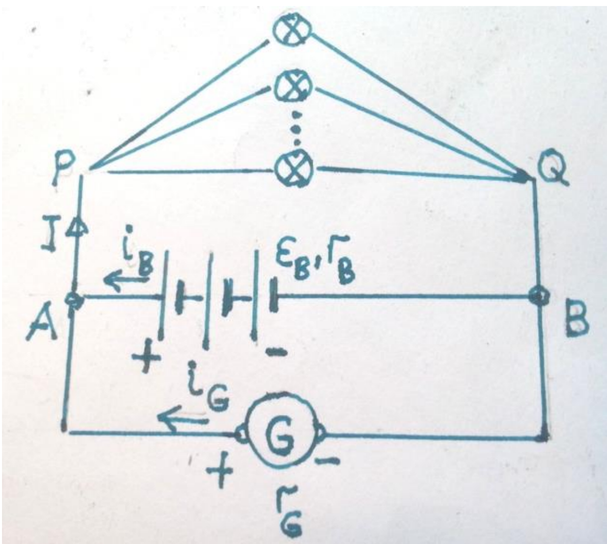


Fig.1

$$I = \frac{V_{PQ}}{1} = V_{AB} \;\; ; \qquad V_{AB} = \varepsilon_B - i_B 0,02 \;\; ; \qquad V_{AB} = \varepsilon_G - i_G 0,04 \;\; ; \quad I = i_B + i_G$$

A partir de las ecuaciones anteriores

$$I = \varepsilon_B - i_B 0{,}02 = i_B + i_G \qquad ; \qquad I = \varepsilon_G - i_G 0{,}04 = i_B + i_G$$

Despejamos i_G en la primera ecuación y sustituimos en la segunda

$$i_G = \varepsilon_B - i_B 1{,}02 \;\Rightarrow\; \varepsilon_G - (\varepsilon_B - i_B 1{,}02)\cdot 1{,}04 = i_B \;;\; \varepsilon_G - 1{,}04\varepsilon_B + 1{,}0608 i_B = i_B \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}0608 i_B = 1{,}04\varepsilon_B - \varepsilon_G \;\Rightarrow i_B = \frac{1{,}04\cdot 24 - 24{,}2}{0{,}0608} = 12{,}5\text{A}$$

La batería suministra energía a las bombillas pues el signo es positivo de acuerdo con la figura 1.

b) Si no suministra energía a las bombillas, i_B=0

$$0{,}0608 i_B = 1{,}04\varepsilon_B - \varepsilon_G = 0 \;\Rightarrow \varepsilon_G = 1{,}04\cdot 24 = 24{,}96 \text{ V}$$

c)

$$0{,}0608 i_B = 1{,}04\varepsilon_B - \varepsilon_G \;\Rightarrow\; i_B = \frac{1{,}04\cdot 24 - 22{,}5}{0{,}0608} = 40{,}5\,\text{A} \;\Rightarrow$$

$$\varepsilon_G - i_G 0{,}04 = i_B + i_G \Rightarrow 22{,}5 - i_G 0{,}04 = 40{,}5 + i_G \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1{,}04 i_G = +22{,}5 - 40{,}5 \;\Rightarrow i_G = \frac{-18}{1{,}04} = -17{,}3\,\text{A}$$

El signo menos indica que la intensidad de la corriente circula en sentido contrario al indicado en la figura 1.