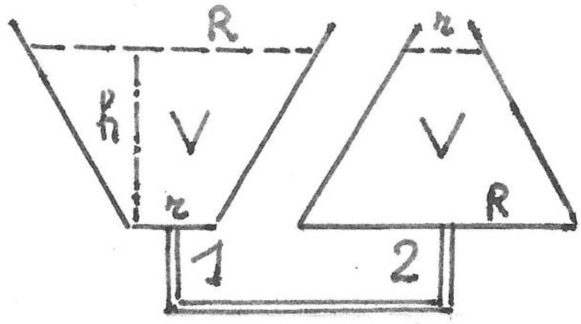
PROBLEMAS VARIADOS 3-2018

433.- En la figura inferior, 1 y 2 son dos recipientes iguales de volumen V que contienen agua a la misma temperatura. R es el radio de la base mayor y r de la menor, y h es la altura del agua. Ambos recipientes están conectados por una tubería.



a) Se calienta el agua del recipiente 1, razonar en qué sentido fluirá el agua de 1 a 2 o de 2 a 1.

b) Se calienta el agua del recipiente 2, razonar en qué sentido fluirá el agua de 1 a 2 o de 2 a 1.

c) Supongamos un recipiente de la misma forma que el 1, siendo r = 5,0 cm ; la generatriz del mismo forma con la dirección vertical un ángulo θ=20º. Determinar la fuerza que ejerce el agua sobre la pared lateral en función de la altura H del agua. Representar la fuerza en newtones frente a la altura H en centímetros. Representar la fuerza F frente al volumen de agua.

Dato. Volumen del tronco de cono: $V=\frac{h\pi}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$

a) Cuando el agua de los dos recipientes se encuentra a la misma temperatura la presión sobre el fondo es la misma $P=\rho g h$.

Al calentar el agua del recipiente 1 esta se dilata y sube de nivel, al mismo tiempo su densidad disminuye. La presión sobre el fondo del recipiente 1 es: $p_1=\rho_1 g h_1$.

Designamos con ΔT el aumento de temperatura del agua del recipiente 1. γ, representa el coeficiente de dilatación cúbica del agua, y M la masa de agua., el nuevo volumen será

$$V_1=V(1+\gamma\Delta T)\,;\Rightarrow\quad \frac{M}{V_1}=\frac{M}{V(1+\gamma\Delta T)}\quad\Rightarrow\quad \rho_1=\frac{\rho}{(1+\gamma\Delta T)}$$

La masa de agua no varía al calentarla, luego:

$$\frac{h_1\pi}{3}\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)\rho_1=\frac{h\pi}{3}\left(R^2+r^2+R\,r\right)\rho\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{h_1\pi}{3}\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)\frac{\rho}{1+\gamma\,\Delta T}=\frac{h\pi}{3}\left(R^2+r^2+R\,r\right)\rho\quad\Rightarrow$$

$$\frac{h_1\pi}{3}\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)=\frac{h\pi}{3}\left(R^2+r^2+R\,r\right)\cdot\left(1+\gamma\,\Delta T\right)\Rightarrow\;\; h_1=h\frac{\left(R^2+r^2+R\,r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\cdot\left(1+\gamma\,\Delta T\right)$$

La presión sobre el fondo del recipiente 1 es:

$$P_1=\frac{\rho}{\left(1+\gamma\,\Delta T\right)}\cdot g\cdot h\frac{\left(R^2+r^2+R\;\;r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\cdot\left(1+\gamma\,\Delta T\right)=\rho\,g\,h\frac{\left(R^2+r^2+R\;\;r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1=P\frac{\left(R^2+r^2+R\;\;r\right)}{\left(R_1^2+r^2+R_1 r\right)}\quad(1)$$

Como R_1 es mayor que R, $P_1 < P$. El agua fluirá desde el recipiente 2 al 1.

b) De acuerdo con la fórmula (1) R es constante y r aumenta a $r_2>r$.

$$P_1=P\frac{\left(R^2+r^2+Rr\right)}{\left(R^2+r_2^2+Rr_2\right)}\quad(2)$$

En la ecuación (2) el denominador es mayor que el numerador, por tanto, $P_1<P$, el agua se desplazará del recipiente 2 al 1 como en el caso anterior.

c) En la figura 1, H es la altura del agua. A una altura h hemos considerado dos rodajas de espesor dh y radio a, cuya superficie lateral es: $dS=2\,\pi\,a\,dh$. La presión a la altura h es: $p=\rho\,g\,h$ y la fuerza dF es:

$$dF=\rho\,g\,h\,2\,\pi\,a\;\;dh$$

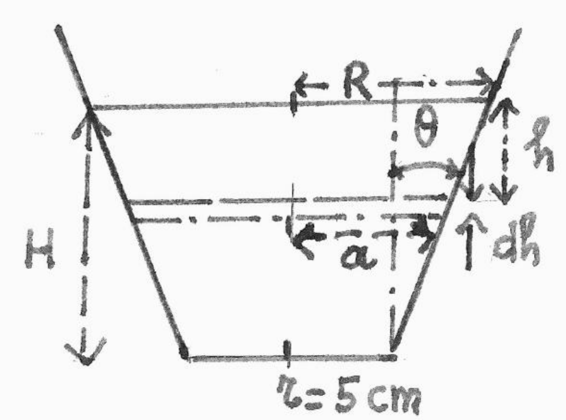


Fig.1

La fuerza es un vector perpendicular a la superficie lateral y ese vector tiene dos componentes una horizontal H y otra vertical V hacia abajo (fig.2). La componente horizontal se anula en la rodaja y la vertical se suma

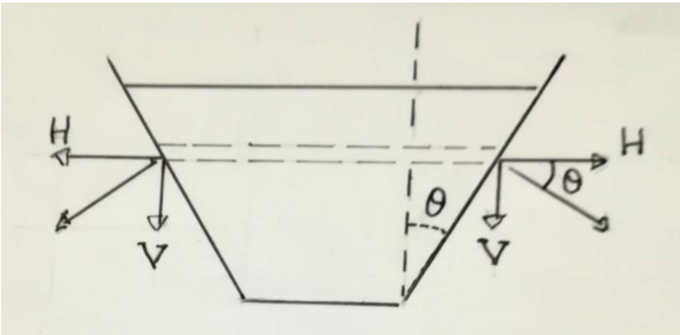


Fig.2

Para la componente vertical

$$dF_V = \rho g h\, 2\pi a \ \mathrm{sen}\,\theta \ dh$$

En la ecuación anterior aparecen dos variables h y a, que están relacionadas entre sí

$$\mathrm{tag}\,\theta = \frac{a-r}{H-h} \quad \Rightarrow \quad a = r + (H-h)\,\mathrm{tag}\,\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dF = 2\pi\rho g \ \mathrm{sen}\,\theta\, h\left[r + (H - h)\ \ \mathrm{tag}\,\theta\right]dh$$

Para calcular la fuerza sobre toda la superficie lateral del depósito, hemos de integrar la anterior ecuación

$$F = 2\pi\rho g \ \mathrm{sen}\,\theta \int \left(h\,r + h\,H\,\mathrm{tag}\,\theta - h^2\mathrm{tag}\,\theta\right)dh = 2\pi\rho g\,\mathrm{sen}\,\theta \left|\frac{h^2 r}{2} + \frac{h^2 H\,\mathrm{tag}\,\theta}{2} - \frac{h^3\mathrm{tag}\,\theta}{3}\right|_0^H \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F = 2\pi\rho g \ \mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{H^2 r}{2} + \frac{H^3\ \mathrm{tag}\,\theta}{2} - \frac{H^3\mathrm{tag}\,\theta}{3}\right) = 2\pi\rho g\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{H^2 r}{2} + \frac{H^3\ \mathrm{tag}\,\theta}{6}\right) \qquad (3)$$

En la ecuación (3) sustituimos los valores numéricos del enunciado

$$F = 2\cdot\pi\cdot 10^3\cdot 9{,}8\cdot\mathrm{sen}\ 20^{\circ}\left(\frac{5.10^{-2}\,H^2}{2} + \frac{\mathrm{tag}\ 20^{\circ}\,H^3}{6}\right) = 21{,}06.10^3\left(2{,}5.10^{-2}\ H^2 + 0{,}0607\,H^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad F = 526{,}5\,H^2 + 1278\,H^3 \quad \mathrm{N}$$

Calculamos el volumen de agua en función de H. De la figura 1 se deduce:

$$\mathrm{tag}\,\theta = \frac{R - r}{H} \quad \Rightarrow \quad R = r + H\,\mathrm{tag}\,\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{H\pi}{3}\left[(r + H\,\mathrm{tag}\,\theta)^2 + r^2 + r(r + H\,\mathrm{tag}\,\theta)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{H\pi}{3}\left[r^2 + H^2\mathrm{tag}^2\theta + 2\,r\,H\,\mathrm{tag}\,\theta + r^2 + r^2 + r\,H\,\mathrm{tag}\,\theta\right] \Rightarrow$$

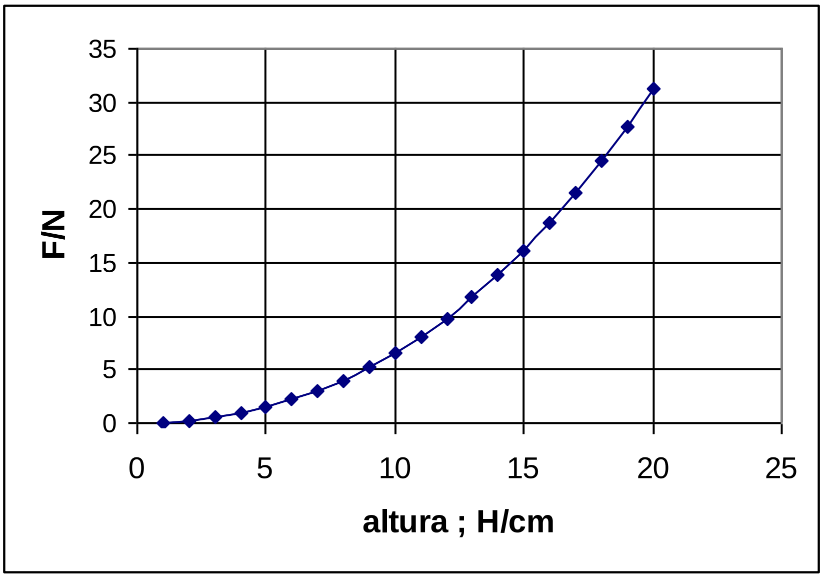
$$\Rightarrow \quad V = \frac{H\pi}{3}\left(3r^2 + H^2\mathrm{tag}^2\theta + 3\,r\,H\,\mathrm{tag}\,\theta\right) \Rightarrow$$

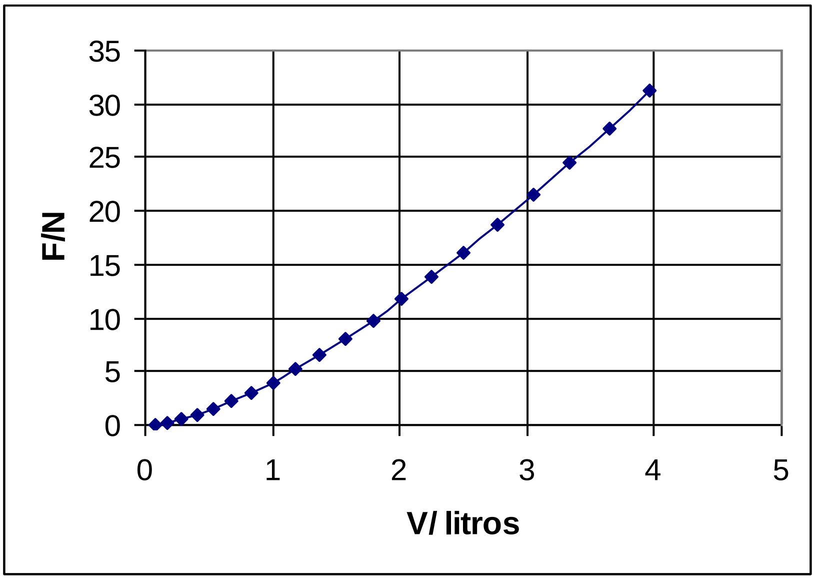
$$\Rightarrow \quad V = \pi H r^2 + \frac{\pi H^3\mathrm{tag}^2\theta}{3} + \pi\, r\, H^2\mathrm{tag}\,\theta$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$V = 7{,}85.10^{-3}H + 0{,}057\,H^2 + 0{,}139\,H^3$$

En la hoja de cálculo damos valores a H y obtenemos los correspondientes de F y H . Las representaciones gráficas son:





434.- Un haz de partículas iguales posee una energía total igual a cien veces su masa en reposo. La vida media de cada partícula es 10 ns. En el laboratorio la distancia entre el lugar donde se producen las partículas y el detector es 6,0 m. Calcular la fracción de las partículas producidas que alcanzan el detector.

Ayuda. $N = N_o e^{\frac{-t}{t_o}}$ **, N_o, número de partículas producidas por el generador. N, partículas que no se han desintegrado al cabo de un tiempo t, t_o es la vida media de la partícula.**

Examen en la Universidad de Florida.

Designamos con S al sistema de referencia situado en el laboratorio y S´ el que acompaña al haz de partículas. La distancia d= 6,0 m es una longitud propia en el sistema S, el tiempo de vida media de cada partícula (t_o=10 ns) es el tiempo propio en el sistema S´

Analizamos el problema desde el sistema S, por tanto desde este sistema debemos calcular el tiempo t.

$$t_{propio} = t_o = t_S\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad t_S = \frac{t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Para conocer la velocidad del haz recurrimos al invariante: $E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4$

$$E^2 = \gamma^2 m_o^2 v^2 c^2 + m_o^2 c^4 = m_o^2 c^2 \left(\gamma^2 v^2 + c^2\right) = m_o^2 c^2 \left(\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + c^2 \right) \Rightarrow$$

$$E^2 = m_o^2 c^2 \left(\frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2} + c^2 \right) = m_o^2 c^2 \left(\frac{c^4 - c^2 v^2 + c^2 v^2}{c^2 - v^2} \right) = m_o^2 c^2 \left(\frac{c^4}{c^2 - v^2} \right) \Rightarrow$$

$$E^2 = m_o^2 c^4 \cdot \frac{c^2}{c^2 - v^2} = m_o^2 c^4 \gamma^2 \Rightarrow \quad E = m_o c^2 \gamma \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E}{m_o c^2} = 100 \frac{m_o c^2}{m_o c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 100 \quad \Rightarrow 10^4 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - 10^{-4} \approx 1 \quad \Rightarrow v \approx c$$

$$N = N_0 e^{-\frac{t_S}{t_O}} \Rightarrow t_S = \frac{d}{v} = \frac{d}{c} = \frac{6{,}0\,m}{3.10^8 \frac{m}{s}} = 2.10^{-8}\, s \Rightarrow \quad \frac{N}{N_o} = e^{-\frac{2.10^{-8}}{10.10^{-9}}} = e^{-2} = 0{,}135$$

El 13,5% de las partículas producidas en el generador llegan al detector.

435.-Un haz de muones describe una órbita circular por acción de un campo magnético uniforme. Se desprecian las pérdidas de energía debidas a la radiación electromagnética.

a) Si la velocidad de los muones es mucho menor que la velocidad de la luz, se encuentra que la mitad de ellos decaen durante una vuelta completa ¿Cuál es el módulo del campo magnético?

b) El experimento se repite con el mismo campo magnético pero con muones cuya velocidad es comparable a la velocidad de la luz ¿Calcular la fracción que decaen en una vuelta completa?

Datos. Masa del muón m= $1{,}88.10^{-28}$ kg carga q= $-1{,}602.10^{-19}$ C , vida media $T_{1/2}$=1,523 μs

American Association of Physics Teacher

a) De acuerdo con la mecánica clásica la fuerza centrípeta de los muones es proporcionada por la fuerza magnética que existe entre el campo magnético y la carga de los muones.

$$\frac{m v^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m v}{q R}$$

El tiempo que emplean las partículas en dar una vuelta es igual a su vida media y en ese tiempo desaparecen la mitad de las partículas

$$v = \frac{2\pi R}{T_{1/2}} \quad \Rightarrow \qquad B = \frac{m\frac{2\pi R}{T_{1/2}}}{q R} = \frac{2\pi m}{q T_{1/2}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}88.10^{-28}}{1{,}602.10^{-19} \cdot 1{,}523.10^{-6}} = 4{,}84.10^{-3}\ T$$

b) Ahora utilizamos la mecánica relativista. Desde el punto de vista de un observador ligado al sistema del laboratorio, la longitud del radio es una longitud propia, pero el tiempo de desintegración de la partícula es un tiempo impropio

$$q v'B = F = ma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o \frac{v'^2}{R} \quad \Rightarrow \quad q B = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m_o \frac{v'}{R}$$

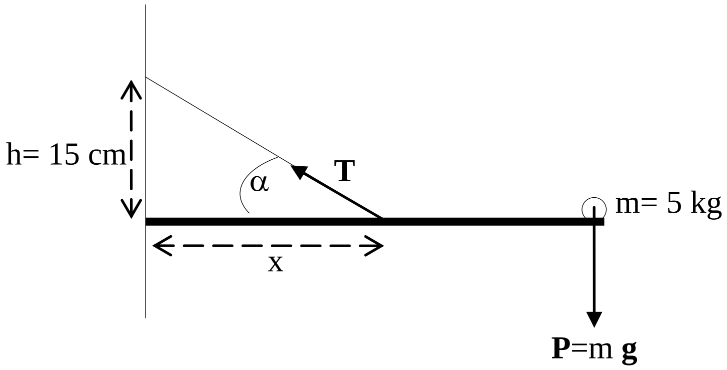
$$v' = \frac{2\pi R}{t_{impropio}} = \frac{2\pi R}{\frac{T_{1/2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \Rightarrow \frac{v'}{R} = \frac{2\pi\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{T_{1/2}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$qB = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\, m_o \,\frac{2\pi\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{T_{1/2}} = \frac{2\pi m_o}{T_{1/2}}$$

El resultado es el mismo que en la mecánica clásica, por tanto, la velocidad de los muones no influye en su desintegración por cada orbita realizada.

436.-Una barra de masa despreciable y longitud 50 cm lleva en uno de sus extremos una masa de 5 kg. El otro extremo de la barra está articulado en una pared vertical. La barra se mantiene en posición horizontal. Un cable de acero de diámetro d= 1 mm está fijo por un extremo en la pared vertical a una altura h=15 cm por encima de la barra y el otro extremo está unido a un punto de ella (ver la figura inferior).



a) Calcular el valor del ángulo α, tal que la elongación que sufra el cable de acero sea mínima.

b) El módulo de la fuerza T.

c) El alargamiento del cable de acero

Dato: Módulo de Young del cable de acero $Y = 20.10^{10}$ N/ m^2.

a) L_B representa la longitud de la barra ; λ la longitud del hilo de acero, T la fuerza con que el cable tira de la barra; una fuerza de reacción a T es la fuerza con que la barra tira del cable y es la causa de su alargamiento, x es una incógnita ; S sección del cable.

Al estar la barra en equilibrio los módulos de los momentos del peso P y de la fuerza T respecto al punto donde la barra se empotra en la pared deben ser iguales

$$T\,\text{sen}\alpha \cdot x = m\,g \cdot L_B \;\; ; \;\; \text{tag}\,\alpha = \frac{h}{x} \;\Rightarrow\; T = \frac{m\,g \cdot L_B}{\text{sen}\,\alpha \cdot \dfrac{h}{\text{tag}\,\alpha}} = \frac{m\,g \cdot L_B}{h\,\cos\alpha} \qquad (1)$$

La definición del módulo de Young es:

$$Y = \frac{\dfrac{T}{S}}{\dfrac{\Delta l}{\lambda}} = \frac{T\lambda}{S\,\Delta l} = \frac{\dfrac{m\,g\,L_B}{h\cos\alpha} \cdot \dfrac{h}{\text{sen}\,\alpha} \cdot}{\dfrac{\pi\,d^2}{4}\,\Delta l} = \frac{4\;m\,g\,L_B}{\pi\,d^2\;\Delta l\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} \;\Rightarrow\; \Delta l = \frac{4\;m\,g\,L_B}{\pi\,d^2\;Y\text{sen}\,\alpha\;\cos\alpha} \quad (2)$$

Para hallar el mínimo de la elongación derivamos (2) respecto de la variable α, .e igualamos a cero.

$$\frac{d\,\Delta l}{d\alpha} = \frac{4\,m\,g\;\;L_B}{\pi d^2 Y}\left[\frac{-\left(-\,\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha\right)}{\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}\right] = 0 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \text{sen}\,\alpha = \cos\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 45^{\circ} \;\Rightarrow\; x = \frac{15\,\text{cm}}{\text{tag}\;45^{\circ}} = 15\,\text{cm}$$

b) Sustituyendo en (1)

$$T = \frac{5 \cdot 9{,}8 \cdot 50.10^{-2}}{15{,}10^{-2} \cdot \cos 45^{\circ}} = 231\;\text{N}$$

c) Sustituyendo los valores numéricos en (2)

$$\Delta l = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9{,}8 \cdot 50.10^{-2}}{\pi \cdot \left(10^{-3}\right)^2 \cdot 20.10^{10} \cdot \text{sen}\,45^{\circ}\cos 45^{\circ}} = 3{,}12.10^{-4}\;\text{m}$$

437.-Una partícula de masa m posee una carga +q. Desde el origen de coordenadas cartesianas (situado el eje X en un suelo horizontal) y con una velocidad v_o se lanza la partícula formado un ángulo θ con el eje de abscisas. Durante el vuelo de la partícula actúa sobre ella un campo eléctrico de módulo E cuya dirección y sentido es el eje positivo de abscisas

a) Calcular el ángulo θ para el que el alcance de la partícula sobre el eje X sea máximo.

b) Sea m = 1 kg , v_o = 50 m/s y qE=6 N , representar gráficamente la trayectoria de la partícula para el ángulo del apartado anterior y para dos ángulos más, uno mayor y otro menor.

c) Ahora el campo E actúa en dirección y sentido negativo del eje X. Determinar el ángulo θ que determina que la partícula después de lanzarla con velocidad v_o regrese al lugar inicial, esto es, al origen de coordenadas. Hacer una representación gráfica de la trayectoria cuando v_o = 50 m/s , m = 1 kg y qE= 36 N. En la misma gráfica representar las trayectorias para dos ángulos mayores que el anterior.

a) La partícula esta sometida a dos aceleraciones: una vertical y hacia abajo g= 9,8 m/s y otra con la dirección positiva del eje X. La fuerza eléctrica vale qE y de acuerdo con la ley de Newton

$$qE = m a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{qE}{m}$$

Sobre la partícula existen dos movimientos uniformemente acelerados

$$x = v_o(\cos\theta)t + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad ; \quad y = v_o(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}g t^2$$

Cuando la partícula alcance el eje X la coordenada y es cero

$$0 = v_o(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}g t^2$$

La solución de la ecuación anterior t=0 corresponde a la posición inicial de la partícula en el eje de coordenadas, la otra solución es.

$$0 = v_o \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}g t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Sustituimos ese tiempo en la ecuación de la abscisa

$$x = v_0 \cos\theta \cdot \frac{2\,v_o\,\text{sen}\,\theta}{g} + \frac{1}{2}\frac{q\,E}{m}\frac{4\,v_o^2\,\text{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{v_o^2}{g}\left(\text{sen}\,2\theta + \frac{q\,E}{m}\frac{2\,\text{sen}^2\theta}{g}\right) \qquad (1)$$

Como hemos de calcular el alcance máximo derivamos la función anterior x=x(t) respecto a θ e igualamos acero.

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{v_o^2}{g}\left(2\cos 2\theta + \frac{2\,q\,E}{mg}\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta + \frac{q\,E}{m\,g}\text{sen}\,2\theta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,2\theta = -\frac{m\,g}{q\,E}\cos 2\theta \qquad \Rightarrow \qquad \text{tag}\,2\theta = -\frac{m\,g}{q\,E} \quad (2)$$

b) Sustituimos en (2) los valores numéricos

$$\text{tag}\,2\theta = -\frac{1\cdot 9{,}8}{6} = -1{,}63$$

Una solución de la ecuación anterior es 2θ = -58,47º ; θ = -29,24º. Esta solución no es válida para el problema pues no es posible lanzar desde el suelo con un ángulo negativo. Otra solución es que el ángulo 2θ esté en el segundo cuadrante.

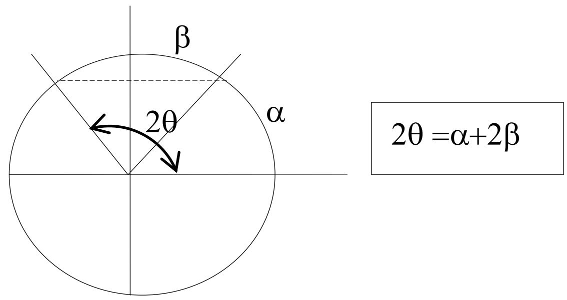


Fig.1

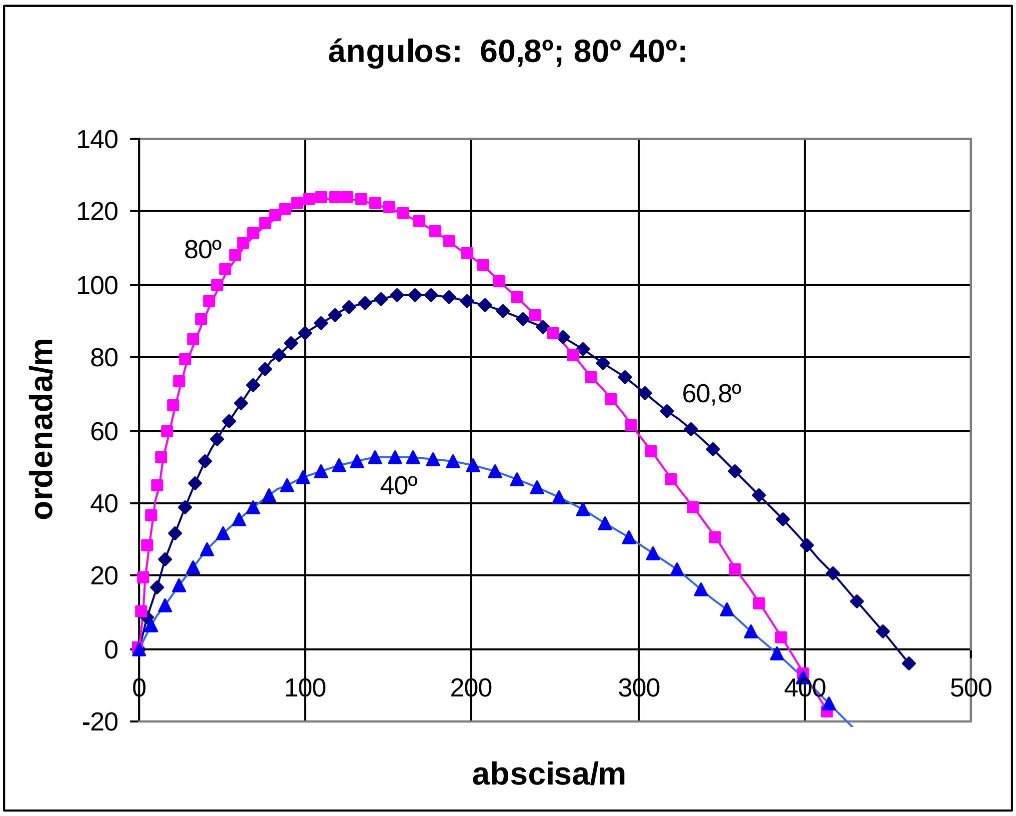
En la figura 1, el ángulo α y el 2θ tienen el mismo valor absoluto de la tangente, por tanto, la tangente del ángulo α vale 1,63 y el ángulo α = 58,47º , el β vale 90º-58,47 = 31,53º y

$$2\theta = 58{,}47º + 2\cdot 31{,}53 = 121{,}53º \;\Rightarrow\; \theta = 60{,}8º$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 50\cdot(\cos 60{,}8º)t + 3t^2 \quad ; \quad y = 50\cdot(\text{sen}\,60{,}8º)\,t - 4{,}9\,t^2$$

En la hoja de cálculo se dan valores a t y se representa x frente a y .Lo mismo se hace con otros dos ángulos uno mayor y otro menor que 60,8º



c) Las ecuaciones para este caso son:

$$x = v_o(\cos\theta)t - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad ; \quad y = v_o(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \quad (3)$$

Cuando y=0, se deduce que $t = \dfrac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g}$ .Sustituyendo este valor de t en x, resulta:

$$x = v_0\cos\theta \cdot \frac{2v_o \operatorname{sen}\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{4v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta}{g^2} = \frac{v_o^2}{g}\left(\operatorname{sen}2\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g}\right)$$

Si la partícula ha de volver al origen de coordenadas, entonces x=0

$$\frac{v_o^2}{g}\left(\operatorname{sen}2\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g}\right) = 0 \Rightarrow \quad \operatorname{sen}2\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g} \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{qE}{m}\frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{g} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{qE}{m}\frac{\operatorname{sen}\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\theta = \frac{mg}{qE} = \frac{1\cdot 9{,}8}{36} = 0{,}2722 \quad \Rightarrow \quad \theta = 15{,}22^{\circ}$$

Sustituyendo los valores numéricos en (3)

$$x = 50 \cdot (\cos 15{,}22^o) \cdot t - \frac{36}{2 \cdot 1} t^2 \quad ; \quad y = 50 \cdot (\text{sen}\, 15{,}22^o) \cdot t - 4{,}9\, t^2$$

En la hoja de cálculo se dan valores a t y se representa x frente a y .Lo mismo se hace con otros dos ángulos mayores que 15,22º