PROBLEMAS VARIADOS 3-2017

403.-Una partícula subatómica recientemente descubierta, es el mesón S de masa M. Cuando está en reposo su vida es $\tau = 3.10^{-8}$ s y se desintegra en dos partículas iguales llamadas partículas P, cada una con una masa αM.
a) En un sistema de referencia en el que el mesón S se encuentra en reposo determinar : I.- la energía cinética, II.- el momento , III.- la velocidad
b) En un sistema de referencia en el que el mesón S viaja 9 metros entre su creación y desintegración calcular su velocidad y su energía cinética

Olimpiadas USA

a)-Cuando la partícula S está en reposo y se desintegra en dos partículas P se conserva la energía y el momento.

$$E_s = 2E_P$$

I.- La energía de S es la energía en reposo por tener masa $E_S = Mc^2$ (c velocidad de la luz)
La energía de una partícula P es la suma de su energía por tener masa más la energía cinética por tener velocidad

$$E_P = \alpha M c^2 + E_C \quad \Rightarrow \quad Mc^2 = 2\alpha M c^2 + 2E_C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{Mc^2(1-2\alpha)}{2} = Mc^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$$

II.-Para calcular el momento hacemos uso de la ecuación relativista $E = c\sqrt{m_o c^2 + p^2}$, aplicándola a una de las partículas P.

$$\alpha M c^2 + Mc^2\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) = c\sqrt{\alpha^2 M^2 c^2 + p^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Mc^2}{2} = c\sqrt{\alpha^2 M^2 c^2 + p^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{M^2c^2}{4} = \alpha^2 M^2 c^2 + p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{M^2c^2}{4} - \alpha^2 M^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad p = Mc\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2}$$

III.- La ecuación relativista del módulo del momento es: $p = m(v)\cdot v = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$

Aplicamos esta ecuación a una partícula P.

$$\frac{\alpha M v c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = Mc\sqrt{\frac{1}{4} - \alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2 v^2}{c^2 - v^2} = c^2\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2 - v^2}{\alpha^2 v^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \alpha^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{c^2}{\alpha^2 v^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\frac{1}{4} - \alpha^2} = \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2 + \alpha^2}{\alpha^2\left(\frac{1}{4} - \alpha^2\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1 - 4\alpha^2} \quad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1 - 4\alpha^2}$$

b) El tiempo de vida de la partícula τ es el tiempo propio ya que se mide en un sistema en que la partícula está en reposo
Escribimos

$$v = \frac{d}{t}$$

Siendo t el tiempo impropio ya que se mide en un sistema en el que la partícula no está en reposo
La relación entre ambos tiempos es:

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\,\tau \quad \Rightarrow \quad v = \frac{d}{\gamma\,\tau} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{d^2}{\gamma^2\tau^2}$$

Recordemos que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad \Rightarrow v^2 = \frac{d^2\left(c^2 - v^2\right)}{c^2\,\tau^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2\left(c^2\tau^2 + d^2\right) = c^2\,d^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c\,d}{\sqrt{c^2\tau^2 + d^2}} = \frac{3.10^8 \cdot 9}{\sqrt{9.10^{16} \cdot 9.10^{-16} + 9^2}} = \frac{3.10^8 \cdot 9}{9\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

La energía cinética vale $E_C = m_o c^2\left(\gamma - 1\right)$

$$E_C\,(S) = M\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}} - 1\right) = M\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{2\,c^2}}} - 1\right) = M\,c^2\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

404.- Un cilindro dotado de un pistón móvil, contiene 28,40 g de aire y 6,00 gramos de agua.
a) Determinar la indicación de un manómetro conectado al cilindro cuando esté a la temperatura de -24ºC y un volumen de 1) 20 L , 2) 10 L y 3) 5 L.
b) Determinar la indicación del manómetro para los tres volúmenes anteriores pero a la temperatura de 100ºC
El problema debe resolverse empleando únicamente los datos siguientes:
Densidad del aire en condiciones normales, 1,26 g/L; densidad del vapor de agua saturado a 100ºC , 0,60 g/L ; densidad del hielo 0,99 g/cm^3^.

a) A la temperatura de -24ºC el agua del cilindro se encontrará en estado sólido y ocupará un volumen de $V = \dfrac{6{,}00\,\text{g}}{0{,}99\,\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \approx 6{,}1\,\text{cm}^3$. La fase gaseosa en contacto con el hielo es aire y una pequeñísima cantidad de vapor de agua en equilibrio con el hielo, por lo que prácticamente puede considerarse que el aire ocupa todo el volumen del cilindro. La presión que indicará el manómetro será la que ejerza el aire ya que la presión del vapor del agua es en este caso insignificante.

$$P\left(20{,}0 - 6{,}1.10^{-3}\right) = \frac{28{,}4\text{g}}{M_{aire}}\,0{,}082\cdot\left(273-24\right) \qquad (1)$$

Para hallar la masa molecular promedio del aire utilizamos el dato de su densidad en condiciones normales

$$P_o = \frac{1{,}29}{M_{aire}}\cdot R\cdot 273 \quad\Rightarrow\quad M_{aire} = \frac{1{,}29\,R\,273}{1}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y para el volumen del cilindro 20 L.

$$P\left(20{,}0 - 6{,}1.10^{-3}\right) = \frac{28{,}4\text{g}}{1{,}29\,R\,273}R\cdot\left(273-24\right) \Rightarrow P = \frac{28{,}4\cdot 249}{1{,}29\cdot 273\cdot\left(20{,}0-6{,}1.10^{-3}\right)} \approx 1{,}00 \text{ atm}$$

2) Para el volumen del cilindro 10 L

$$P = \frac{28{,}4\cdot 249}{1{,}29\cdot 273\cdot\left(10{,}0-6{,}1.10^{-3}\right)} = 2{,}01\,\text{atm}$$

3) Para el volumen del cilindro 10 L

$$P = \frac{28{,}4\cdot 249}{1{,}29\cdot 273\cdot\left(5-6{,}1.10^{-3}\right)} = 4{,}02\,\text{atm}$$

b) Al ser la temperatura 100ºC habrá en el aire vapor de agua. El aire puede estar o no saturado de vapor de agua, lo que depende del volumen del cilindro y la masa de agua.
1) Utilizamos el valor de la densidad del vapor de agua saturado para conocer la cantidad que tiene que haber de agua en estado de vapor para que se cumpla el estado de saturación

$$0{,}60 = \frac{m(\text{Vapor de agua})}{20} \Rightarrow m(\text{Vapor de agua}) = 12\,\text{g}$$

El resultado anterior nos indica que no se alcanza la saturación cuando el volumen del cilindro es 20 L. Si el aire estuviese saturado ejercería una presión de una atmosfera, como solamente existe la mitad de agua, la presión ejercida por el vapor es 0,5 atm.
La presión indicada por el manómetro es:

$$P = \text{Paire} + \text{Pvapor de agua} = \frac{28{,}4 \cdot R : 373}{1{,}29 \cdot R \cdot 273 \cdot 20} + 0{,}5 = 1{,}5 + 0{,}5 = 2{,}0 \text{ atm}$$

2) Volumen del cilindro 10 L

$$0{,}60 = \frac{m(\text{Vapor de agua})}{10} \Rightarrow m(\text{Vapor de agua}) = 6\,g$$

En este caso el aire está saturado de vapor de agua y ejercerá una presión de 1 atmosfera.

La presión indicada por el manómetro es:

$$P = \text{Paire} + \text{Pvapor de agua} = \frac{28{,}4 \cdot R : 373}{1{,}29 \cdot R \cdot 273 \cdot 10} + 1{,}0 = 3{,}0 + 1{,}0 = 4{,}0 \text{ atm}$$

3) Volumen del cilindro 5 L

$$0{,}60 = \frac{m(\text{Vapor de agua})}{5} \Rightarrow m(\text{Vapor de agua}) = 3\,g$$

En este caso el aire se encuentra saturado de vapor de agua y habrá tres gramos de agua en estado líquido

La presión indicada por el manómetro es:

$$P = \text{Paire} + \text{Pvapor de agua} = \frac{28{,}4 \cdot R : 373}{1{,}29 \cdot R \cdot 273 \cdot \left(5 - \frac{6{,}1}{2} \cdot 10^{-3}\right)} + 1{,}0 = 6{,}0 + 1{,}0 = 7{,}0 \text{ atm}$$

405.- **El fenómeno del halo**
Olimpiadas de Suiza 2013

Mirando al cielo es posible observar en alguna ocasión halos luminosos como el representado en la figura 1.

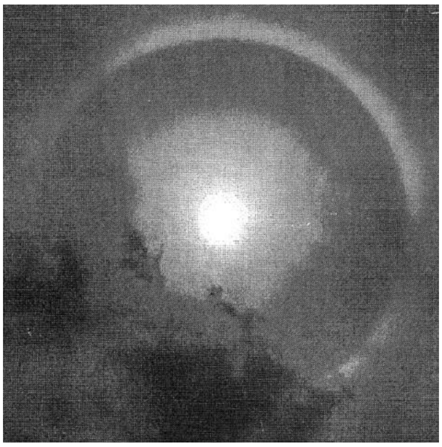
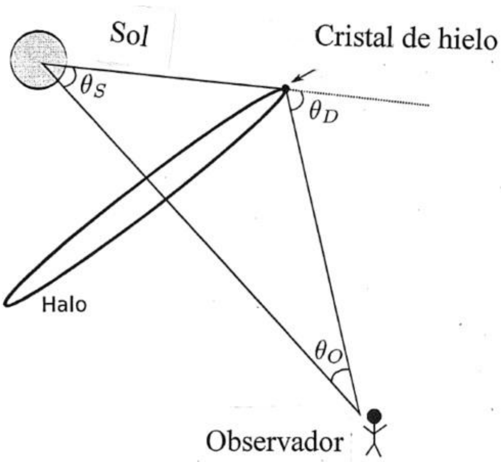


Fig.1

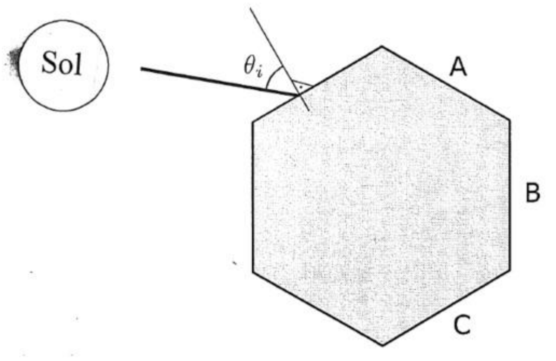
Este fenómeno óptico se origina por la refracción de los rayos del Sol a través de los cristales de hielo formados en los cirroestratos, nubes que se encuentran a una altitud de aproximadamente 5,5 km.
La figura 2 ilustra este fenómeno.



Fia.2
Esquema de la formación de un halo

Se pretende encontrar el ángulo de desviación θ_D y entender el fenómeno del halo. A partir de ahora se trabajará en dos dimensiones. Datos : índice de refracción del aire n_A=1 y del hielo n_H=1,31

Parte A
1.- Consideremos un cristal de hielo de forma hexagonal ¿Por qué cara saldrá el rayo refractado para que dé lugar a un halo?



El rayo luminoso ha de salir por la cara B ya que el cristal hexagonal en realidad es como un prisma de ángulo 60º tal como puede observarse en la figura 3.

2.- Expresar las relaciones de los ángulos que intervienen en la marcha de los rayos a través del cristal, siendo n_A el índice de refracción del aire y n_H el del hielo

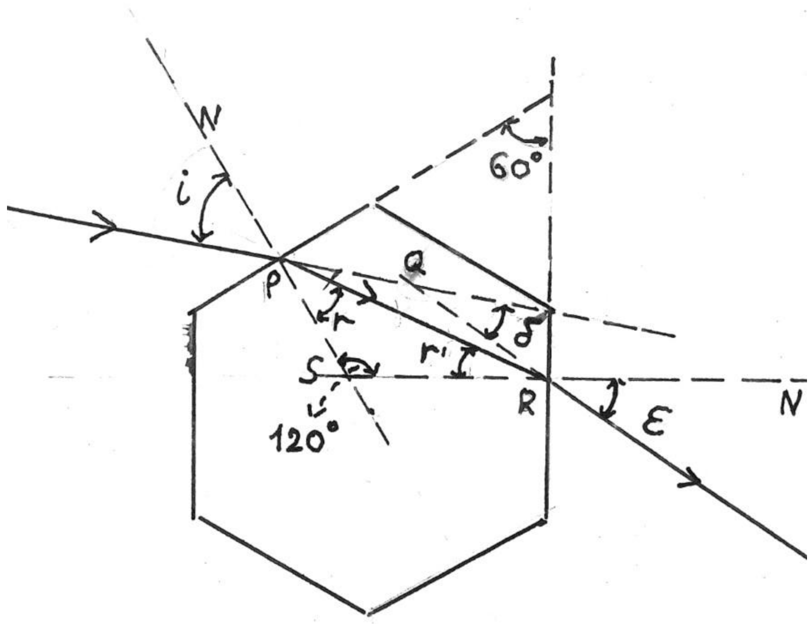


Fig.3

Aplicamos la ley de Snell en la primera cara y en la cara B

$$n_A \operatorname{sen} i = n_H \operatorname{sen} r \;\; (1) \quad ; \; n_H \operatorname{sen} r' = n_A \operatorname{sen} \varepsilon \;\; (2)$$

En el triángulo PSR se cumple: $r + r' + 120^{o} = 180^{o} \quad \Rightarrow \quad r + r\text{¨} = 60^{o} \;\; (3)$

En el cuadrilátero PQRS se cumple:

$$i + (180 - \delta) + \varepsilon + 120^{0} = 360^{o} \quad \Rightarrow \quad \delta = i + \varepsilon - 60^{o} \qquad (4)$$

En el grafico de la figura, 4, se representa en el eje de abscisas los ángulos de incidencia y en el de ordenadas los valores que adquieren los ángulos de refracción en la primera cara y el de desviación. Observe que el ángulo de desviación presenta un mínimo de unos 22º.

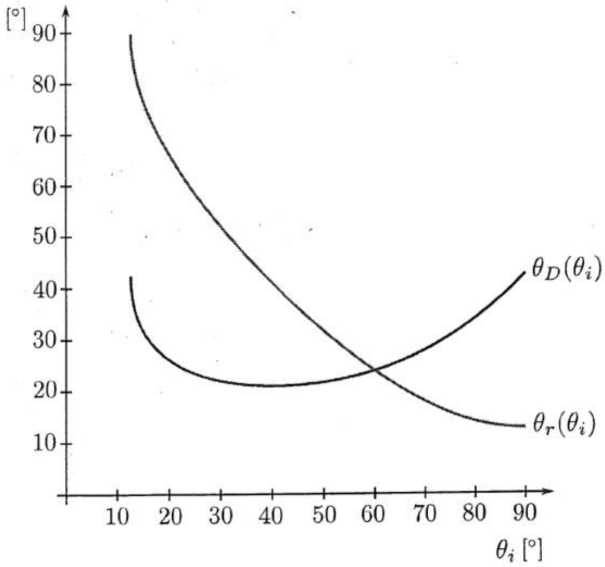


Fig.4

3.- Justificar mediante el cálculo la zona vacía correspondiente al ángulo de incidencia i (0º - 13,5º) .

En la nube habrá cristales orientados hacia el Sol de modo que sus ángulos de incidencia este comprendidos entre 0º y 13,5º. Escojamos este último ángulo y apliquemos las ecuaciones anteriores.

$$1\cdot \text{sen}\,13{,}5º = 1{,}31 \text{sen}\, r \ (1) \quad ; \ r = 10{,}2º \quad \Rightarrow \quad r' = 60º - 10{,}2º = 49{,}8º$$

$$1{,}31\cdot \text{sen}\,49{,}8º = 1\cdot \text{sen}\,\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 90º$$

El ángulo de incidencia de 13,5º supone un emergente de 90º, luego para ángulos menores de 13,5º, no puede haber rayo refractado.
Comprobamos para un ángulo de 6º.

$$1\cdot \text{sen}\,6{,}0º = 1{,}31 \text{sen}\, r \ (1) \quad ; \ r = 4{,}6º \quad \Rightarrow \quad r' = 60º - 4{,}6º = 55{,}4º\,º$$

$$1{,}31\cdot \text{sen}\,55{,}4º = 1\cdot \text{sen}\,\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\varepsilon = 1{,}08$$

Al ser el seno mayor que la unidad no puede haber rayo refractadso.

4.- ¿Cuál es el ángulo θ_D de un halo?

El ángulo de desviación mínima se produce para un ángulo de incidencia de modo que r=r´.En nuestro caso r=r´=30º

El ángulo de incidencia que produce la mínima desviación es:

$$1\cdot \text{sen}\, i = 1{,}31\cdot \text{sen}\,30º \quad \Rightarrow \quad i = 40{,}9º$$

El ángulo de emergencia es igual al de incidencia

$$1{,}31 \cdot \mathrm{sen}\,30 = 1 \cdot \mathrm{sen}\,\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 40{,}9º$$

El ángulo de desviación mínima es:

$$\delta_{\min} = i + e - 60º = 40{,}9 + 40{,}9º - 60º = 21{,}8º$$

Según la figura 2 es así como se forma el halo.

5.- ¿En la figura 1 se puede observar que la zona interior del halo es más obscura que la exterior ¿Por qué?

Para que llegase luz a esa zona el ángulo tendría que ser menor que el de mínima desviación. La zona brillante central corresponde a los rayos que llegan directamente del sol sin refractarse. A la zona exterior del halo llegan rayos refractados con ángulos mayores de 22º y por eso tiene más luminosidad.

6.- Para un observador situado sobre el suelo el tamaño del halo debe corresponder a θ_O de acuerdo con la figura 1. Por qué es, no obstante, razonable afirmar que el tamaño pude definirse a partir de θ_D

En el triángulo de la figura 2 se cumple: $\theta_S + \theta_O + 180 - \theta_D = 180 \quad \Rightarrow \quad \theta_O = \theta_D - \theta_S$

En la figura 2 la distancia del observador al cristal es unos 6 km , en cambio la distancia del Sol a la nube es 150 millones de kilómetros. Si h designa al radio del halo, cuyo valor será del orden de unos kilómetros, tenemos:

$$\mathrm{sen}\ \theta_S = \frac{h}{150.10^6} \Rightarrow \theta_S \approx 0º, \quad \text{luego} \quad \theta_O \approx \theta_D$$

7.- La observación atenta de un halo permite discernir un espectro de la luz a lo largo de la circunferencia del halo. Teniendo en cuenta que el índice de refracción del hielo es función de la longitud de onda según la ecuación

$$\boldsymbol{n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}}$$

Respecto al centro del halo y los colores rojo y azul cuál estará en el interior y cuál en el exterior.

La longitud de onda del color rojo es mayor que la del azul, de acuerdo con la ecuación anterior, el índice de refracción del rojo es menor que el del azul. Si el ángulo de incidencia es el mismo, veamos el de emergencia

Color rojo $\quad n_{rojo} \cdot \mathrm{sen}\, r' = 1 \mathrm{sen}\, e_{rojo}$

Color azul $\quad n_{razul} \cdot \mathrm{sen}\, r' = 1 \mathrm{sen}\, e_{azul}$

Como el índice de refracción del color azul es mayor que el del rojo $\quad \varepsilon_{azul} > \varepsilon_{rojo}$

Ángulos de desviación mínima

$$\delta_{minazul} = i + \varepsilon_{azul} - 60º \quad ; \quad \delta_{minarojo} = i + \varepsilon_{rojo} - 60º \quad \Rightarrow \delta_{minazul} > \delta_{minarojo}$$

El rojo estará en el interior y el azul en el exterior respecto del centro del halo.

Nota: fotografía de un halo luminoso en las cercanías de Madrid.

406.- Determinar el coeficiente de rozamiento del neumático de una moto con la pared de un cono de ángulo 2α, para que el motorista describa una circunferencia de radio R con velocidad angular ω.

En la figura 1 se han representado la fuerzas que actúan sobre el motorista (bajo el supuesto de que el conjunto de masa m, motorista más moto, se consideren como una masa puntual).

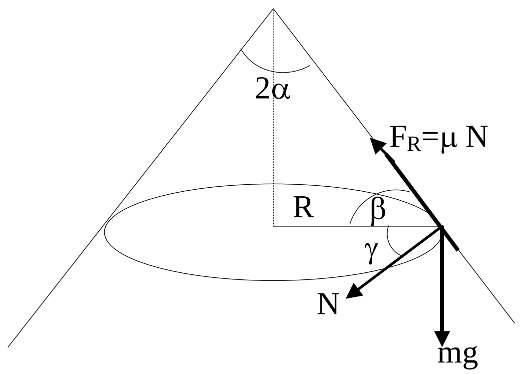


Fig.1

De la figura 1 se deduce que los ángulos α y β son complementarios y que $\beta+\gamma$ = 90º.
Proyectamos las fuerzas sobre las direcciones horizontal y vertical y escribimos para los módulos de las fuerzas.

$$\mu\, N\cos\beta + N\cos\gamma = m\omega^2 R \Rightarrow \mu\, N \,\mathrm{sen}\,\alpha + N\cos(90-\beta) = m\omega^2 R \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\, N\,\mathrm{sen}\,\alpha + N\left(\cos 90 \cos\beta + \mathrm{sen}\,90\,\mathrm{sen}\,\beta\right) = m\omega^2 R \Rightarrow \quad \mu\, N\,\mathrm{sen}\,\alpha + N\cos\alpha = m\omega^2 R \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{m\omega^2 R}{\mu\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha} \quad (1)$$

$$\mu\, N\,\mathrm{sen}\,\beta = mg + N\,\mathrm{sen}\,\gamma = mg + N\,\mathrm{sen}(90-\beta) = mg + N(\mathrm{sen}\,90\ \cos\beta - \cos 90 \mathrm{sen}\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu N\cos\alpha = mg + N\,\mathrm{sen}\,\alpha \Rightarrow \qquad N = \frac{m\,g}{\mu\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{m\,\omega^2 R}{\mu\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha} = \frac{m\,g}{\mu\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha} \Rightarrow \omega^2 R\,\mu\cos\alpha - \omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\alpha = g\,\mu\,\mathrm{sen}\,\alpha + g\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\left(\omega^2 R\cos\alpha - g\,\mathrm{sen}\,\alpha\right) = g\cos\alpha + \omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\alpha \Rightarrow \mu = \frac{g\cos\alpha + \omega^2 R\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\omega^2 R\cos\alpha - g\,\mathrm{sen}\,\alpha} \Rightarrow$$

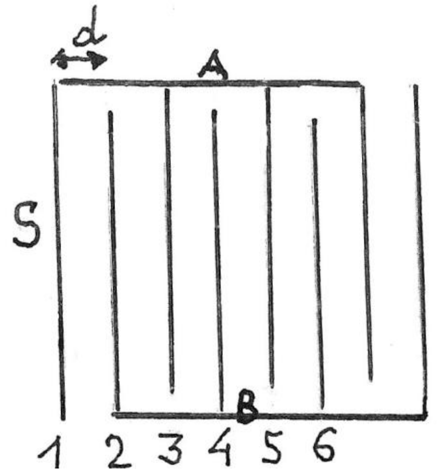
$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{g + \omega^2 R\,\mathrm{tag}\,\alpha}{\omega^2 R - g\,\mathrm{tag}\,\alpha} \ (3)$$

La ecuación (3) indica que como mínimo μ ha de ser igual al segundo miembro de (3) o mayor. El numerador de (3) es positivo, pero el denominador puede ser negativo si

$$\omega^2 R < g\,\mathrm{tag}\,\alpha \Rightarrow \quad \omega^2 < \frac{g\,\mathrm{tag}\,\alpha}{R} \Rightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tag}\,\alpha}{R}} \quad (4)$$

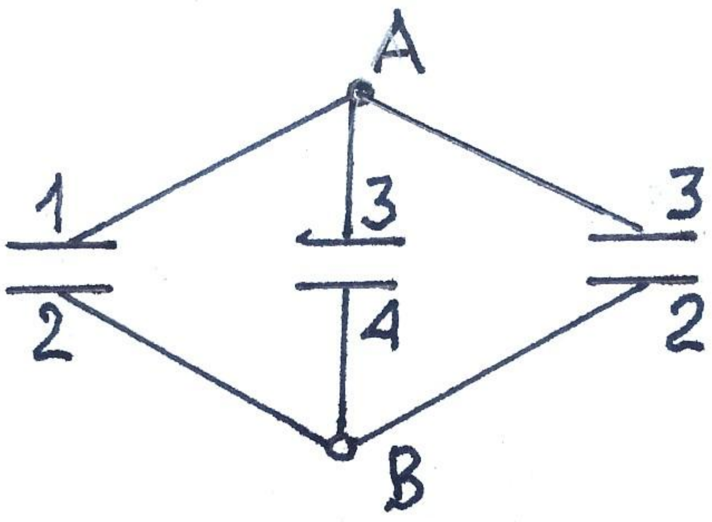
Si se cumple la condición (4) el movimiento no es posible.

407.- Un condensador se construye a partir de laminas planas conductoras de superficie S, dispuestas en la forma que indica la figura.



La distancia entre las láminas es d. Las numeradas con número impar se conectan a un potencial positivo A y las pares a uno negativo B.
El condensador se ha formado con 2n láminas. Calcular la capacidad del mismo.

Las láminas 1, 3 , 5 , 7 … tienen el mismo potencial positivo y las 2, 4, 6, 8 … el mismo potencial negativo.
Consideramos un sistema formado por cuatro láminas, existen tres condensadores 1-2, 2-3 y 3-4. Los dibujamos de la siguiente manera



Con cuatro láminas se han dispuestos tres condensadores en paralelo, con 2n láminas se obtienen 2n-1 condensadores en paralelo. Cada condensador tiene una capacidad $\varepsilon_o \frac{S}{d}$ y todo el conjunto $C = (2n-1)\varepsilon_o \frac{S}{d}$.