PROBLEMAS VARIADOS 3-2016

382.- Un río tiene una anchura d = 100 m. La velocidad de la corriente crece linealmente desde la orilla donde la velocidad es nula, hasta el centro del río donde la velocidad es u. Consideramos dos puntos A y B, uno en cada orilla; la recta AB es perpendicular al vector velocidad u. Una lancha parte de A con una velocidad constante v respecto del agua, manteniendo siempre un ángulo α respecto de la recta AB.

a) Determinar el valor de α para que la lancha se encuentre en el centro del río y en la recta AB.

b) Encontrar la ecuación matemática de la trayectoria seguida por la lancha y representarla si v= 5 u.

c) Razonar a qué punto de la orilla opuesta llega la lancha.

a) Consideremos un punto P intermedio entre A y el centro del río y calculemos la expresión de la velocidad del agua. en ese punto, (fig 1).

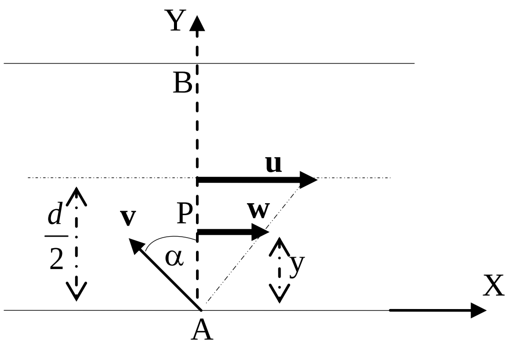


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$\frac{u}{\frac{d}{2}} = \frac{w}{y} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{2uy}{d}.$$

Las componentes de la velocidad respecto de los ejes coordenados fijos en A son (v_X ; v_y) , por tratarse de una velocidad absoluta, es la suma vectorial de la velocidad de arrastre $\vec{w}$, más la relativa $\vec{v}$ que vemos en la figura1.

$$v_X = w - v\,\text{sen}\alpha = \frac{2uy}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \quad dx = v_X\,dt = \left(\frac{2uy}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\right)dt$$

$$v_Y = v\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad dy = v_Y\,dt = v\cos\alpha\,dt$$

A partir de las dos ecuaciones

$$dx = \left(\frac{2\,u\,y}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\right)\frac{dy}{v\cos\alpha} \Rightarrow \int dx = \frac{1}{v\cos\alpha}\int\left(\frac{2\,u\,y}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\right)dy \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{1}{v\cos\alpha}\left(\frac{u\,y^2}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\, y\right) + Cte = \frac{u\,y^2}{v\,d\cos\alpha} - y\,\text{tag}\,\alpha + Cte$$

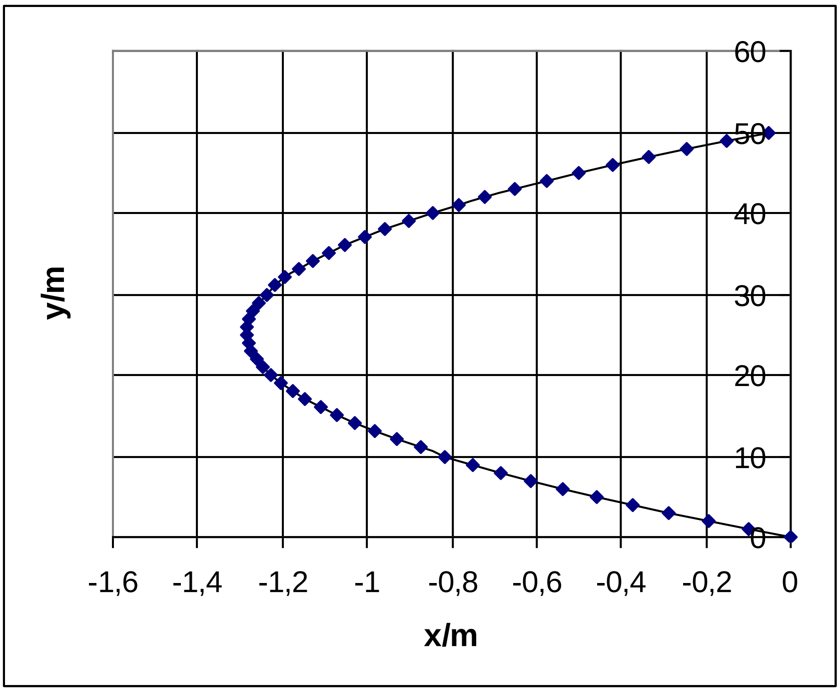
Cuando x =0 , y es cero y por consiguiente Cte=0

$$x = \frac{u\,y^2}{v\,d\cos\alpha} - y\,\text{tag}\,\alpha \quad (1)$$

Cuando la lancha se encuentre en el centro del río, x=0 e y = d/2.

$$\frac{u\dfrac{d^2}{4}}{v\,d\cos\alpha} = \frac{d}{2}\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \qquad \text{sen}\,\alpha = \frac{u}{2\,v}$$

b) La ecuación de la trayectoria está ya calculada en (1) y es uina ecuación en el plano (X,Y) independiente del tiempo. Su gráfica es:



c) Por razones de simetría la lancha a partir de d = 50 m describirá una parábola imagen respecto de AB de la que aparece en la gráfica, por tanto, la lancha llegará al punto B.

Esto se puede comprobar analíticamente. Escogemos los ejes coordenados X´ e Y´ tal como se representan en la figura 2.

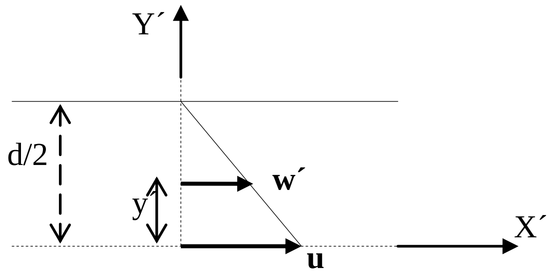


Fig.2

De la figura 2 se deduce:

$$\frac{u}{\frac{d}{2}} = \frac{w´}{\frac{d}{2} - y´} \quad \Rightarrow \quad w´ = \frac{2u\left(\frac{d}{2} - y´\right)}{d} = \frac{u\left(d - 2y´\right)}{d}.$$

Las componentes de la velocidad respecto de los ejes coordenados X´ e Y´, son:

$$v_{X´} = w´ - v\,\text{sen}\alpha = \frac{u\left(d-2y´\right)}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \quad dx´ = v_{X´}\,dt = \left[\frac{u\left(d-2y´\right)}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\right]dt$$

$$v_{Y´} = v\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad dy´ = v_{Y´´}\,dt = v\cos\alpha\,dt$$

A partir de las dos ecuaciones

$$dx´ = \left(u - \frac{2uy´}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\right)\frac{dy´}{v\cos\alpha} \Rightarrow \int dx´ = \frac{1}{v\cos\alpha}\int\left(u - \frac{2uy´}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\right)dy´ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad x´ = \frac{1}{v\cos\alpha}\left(u\,y´ - \frac{u\,y´^2}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\,y´\right) + \text{Cte}$$

Como las leyes del movimiento son iguales en las dos fases del mismo, podemos seguir tomando como condiciones iniciales cuando x´=0 es y´=0, de modo que la nueva constante de integración resulta de nuevo nula Cte=0

$$x´ = \frac{1}{v\cos\alpha}\left(u\,y´ - \frac{u\,y´^2}{d} - v\,\text{sen}\,\alpha\,y´\right) \quad (2)$$

La condición para que la lancha llegue al centro del río y sobre la línea AB, la hemos calculado y vale: $\text{sen}\,\alpha = \frac{u}{2v}$, si escogemos el valor $v = 5u$, resulta: $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{10}$

$$x´ = \frac{1}{5u\cos\alpha}\left(u\,y´ - \frac{u\,y´^2}{d} - 5u\,\text{sen}\,\alpha\,y´\right) = y´\left(\frac{1-5\,\text{sen}\,\alpha}{5\cos\alpha}\right) - \frac{y´^2}{5d\cos\alpha}$$

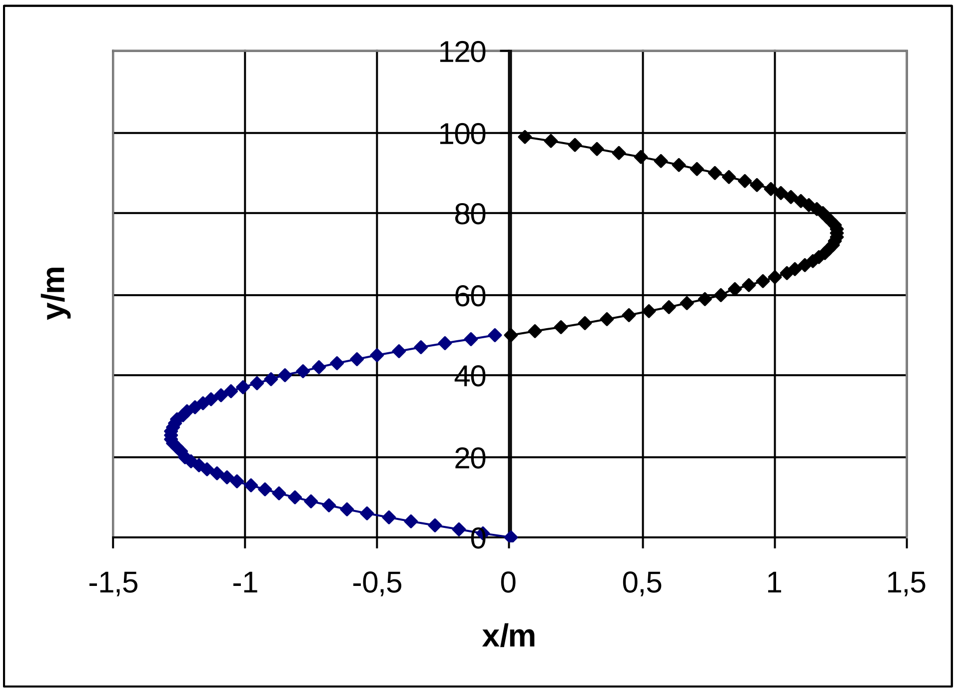
Cuando y´ = d/2 , la ecuación anterior se convierte en

$$x' = d\left(\frac{1-5\,\mathrm{sen}\,\alpha}{10\,\cos\alpha}\right) - \frac{d}{20\,\cos\alpha}$$

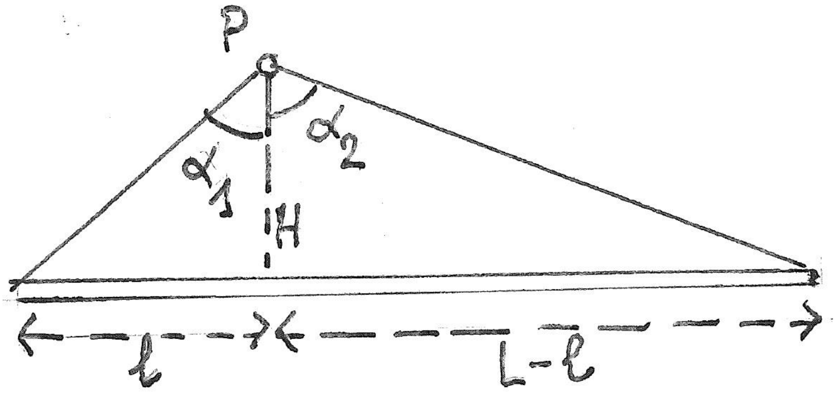
Si a la ecuación anterior sustituimos el ángulo por: $\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{10}$, x´ = 0

$$x' = 100\left(\frac{1-5\cdot 0{,}1}{10\,\sqrt{1-0{,}01}}\right) - \frac{100}{20\,\sqrt{1-0{,}01}} = \frac{5}{\sqrt{1-0{,}01}} - \frac{5}{\sqrt{1-0{,}01}} = 0$$

La trayectoria completa de la lancha se representa en la siguiente gráfica



383.- Un alambre de longitud L posee una densidad de carga lineal positiva y constante λ. Un punto P, fuera del alambre, se encuentra a una distancia H contada en sentido vertical y l en sentido horizontal de un extremo del alambre (ver figura inferior).



a) Calcular el campo eléctrico en el punto P.
b) Determinar el valor del campo si P equidista de los extremos del alambre.
c) Representar E(Y) frente a l y E(X) frente a l cuando H= 1 m , $\lambda = \frac{1}{9.} \cdot 10^{-9}\ \frac{C}{m}$, L = 1 m.

Dato: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ \frac{N\,m^2}{C^2}$

a) Tomamos unos ejes coordenados como se indica en la figura 1. y consideramos un elemento de longitud $d\rho$ que dista ρ del origen de coordenadas. Ese elemento crea en P un campo eléctrico $d\vec{E}_\rho$, cuyas componentes vectoriales sobre los ejes coordenados son : $d\vec{E}_\rho(X)$ y $d\vec{E}_\rho(Y)$.

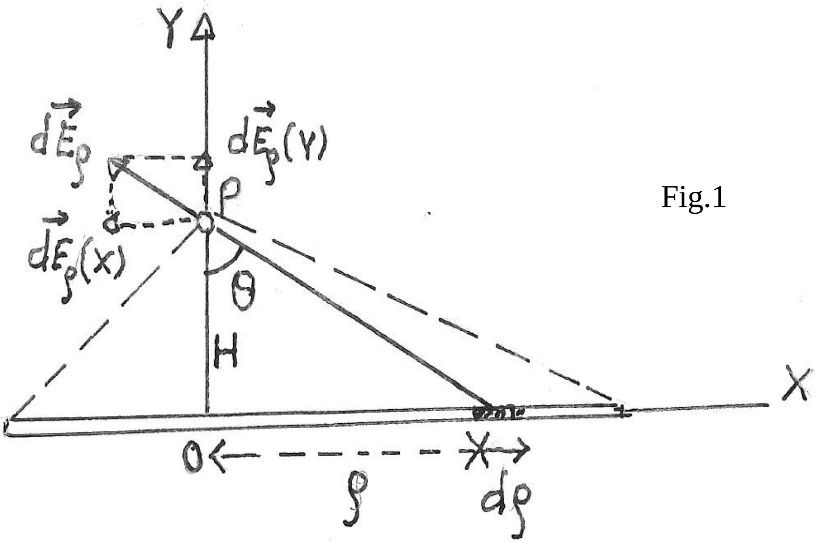


Fig.1

El campo elemental en P vale $d\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r$ y tiene dos componentes según los ejes $dE_\rho(X)$ y $dE_\rho(Y)$

Calculamos los módulos de $d\vec{E}_\rho$ y $d\vec{E}_\rho(Y)$

$$dE_\rho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\,d\rho}{H^2+\rho^2} \quad \Rightarrow \quad dE_\rho(Y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\,d\rho}{H^2+\rho^2}\cos\theta$$

En la ecuación anterior existen dos variables ρ y θ, que se relacionan entre sí. De la figura 1 se deduce:

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\rho}{H} \;\Rightarrow\; \rho = H\operatorname{tag}\theta \;\Rightarrow\; d\rho = \frac{H}{\cos^2\theta}d\theta \quad \Rightarrow$$

$$dE_\rho(Y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\frac{H}{\cos^2\theta}d\theta}{H^2+H^2\operatorname{tag}^2\theta}\cdot\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\frac{d\theta}{\cos^2\theta\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\right)} = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\cos\,\theta\,d\theta$$

La contribución de todos los elementos dρ comprendidos entre cero y α_2 (ángulo que sustenta el extremo derecho del alambre visto desde P vale

$$E_\rho(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\int_0^{\alpha_2}\cos\theta\;d\theta = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\frac{L-\ell}{\sqrt{H^2+(L-\ell)^2}}$$

Si tomásemos un elemento dρ en el segmento de barra a la izquierda de O, obtendríamos un campo en P cuya componente sobre el eje Y se sumaría a la anterior

$$E'_\rho(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\operatorname{sen}\alpha_1 = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\frac{\ell}{\sqrt{H^2+\ell^2}}$$

Por el principio de superposición de campos, este se sumaría al anterior para dar el módulo del campo en P, producido por todo el alambre sobre el eje Y.

$$E(Y) = E_\rho(Y) + E'_\rho(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[\left(\frac{L-\ell}{\sqrt{H^2+(L-\ell)^2}}+\frac{\ell}{\sqrt{H^2+\ell^2}}\right)\right]$$

El vector campo sobre el eje Y es:

$$\vec{E}(Y) = \frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[\left(\frac{L-\ell}{\sqrt{H^2+(L-\ell)^2}}+\frac{\ell}{\sqrt{H^2+\ell^2}}\right)\right]\vec{j}$$

Ahora calculamos la contribución de la barra sobre el eje X. Nos ayudamos de los resultados anteriores

$$dE_{\rho}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \;\Rightarrow\; E_{\rho}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\int_0^{\alpha_2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[-\cos\theta\right]_o^{\alpha_2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\rho}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}(1-\cos\alpha_2)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left(1-\frac{H}{\sqrt{H^2+(L-\ell)^2}}\right)$$

$$dE'_{\rho}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\operatorname{sen}\theta\,d\theta \;\Rightarrow\; E'_{\rho}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\int_0^{\alpha_1}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[-\cos\theta\right]_o^{\alpha_1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'_{\rho}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}(1-\cos\alpha_1)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[1-\frac{H}{\sqrt{H^2+\ell^2}}\right]$$

El vector campo sobre el eje X es:

$$\vec{E}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[1-\frac{H}{\sqrt{H^2+\ell^2}}\right]\vec{i}-\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[1-\frac{H}{\sqrt{H^2+(L-\ell^2)}}\right]\vec{i} \;\Rightarrow$$

$$\vec{E}(X)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[1-\frac{H}{\sqrt{H^2+\ell^2}}-1+\frac{H}{\sqrt{H^2+(L-\ell^2)}}\right]\vec{i}=\frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\sqrt{H^2+(L-\ell^2)}}-\frac{1}{\sqrt{H^2+\ell^2}}\right]\vec{i}$$

El vector campo en P es:

$$\vec{E}(P)=\vec{E}(X)+\vec{E}(Y)$$

b) Si el punto P equidista de los extremos del alambre, entones $\ell=\frac{L}{2}$

Sustituimos el valor de l en $\vec{E}(X)$.

$$\vec{E}(X)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\sqrt{H^2+\left(L-\frac{L}{2}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{H^2+\frac{L^2}{4}}}\right]\vec{i}=0$$

Sustituimos el valor de *l* en $\vec{E}(Y)$.

$$\vec{E}(Y)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[\left(\frac{L-\frac{L}{2}}{\sqrt{H^2+\left(L-\frac{L}{2}\right)^2}}+\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{H^2+\frac{L^2}{4}}}\right)\right]\vec{j}=\frac{\lambda L}{8\pi H\varepsilon_o}\left(\frac{2}{\sqrt{H^2+\frac{L^2}{4}}}\right)\vec{j}\ \Rightarrow$$

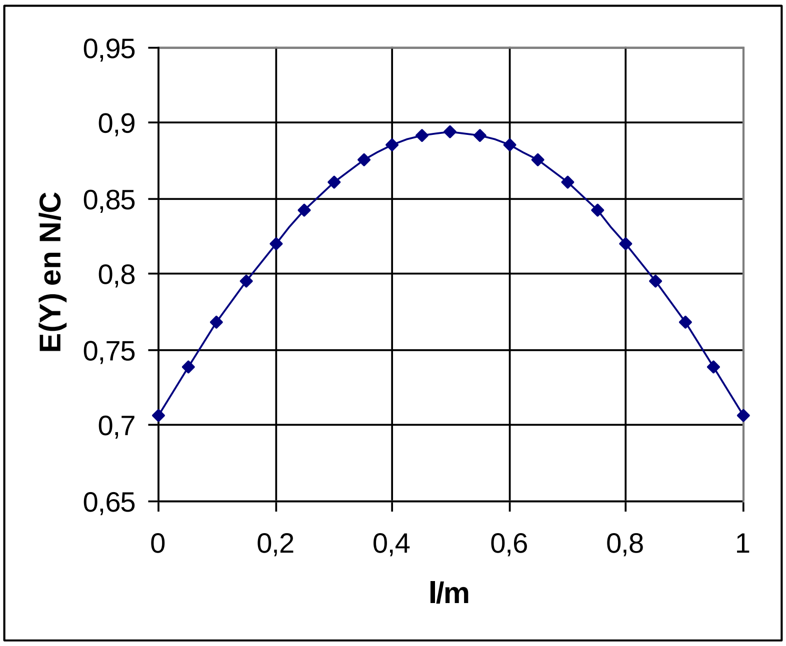
$$\Rightarrow\qquad \vec{E}(Y)=\frac{\lambda L}{8\pi H\varepsilon_o}\left(\frac{4}{\sqrt{4H^2+L^2}}\right)\vec{j}=\frac{\lambda L}{2\pi H\varepsilon_o}\frac{1}{\sqrt{4H^2+L^2}}\vec{j}=\vec{E}(P)$$

c)

$$E(Y)=\frac{\lambda}{4\pi H\varepsilon_o}\left[\left(\frac{L-\ell}{\sqrt{H^2+(L-l)^2}}+\frac{\ell}{\sqrt{H^2+l^2}}\right)\right]=\frac{\frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\cdot 9.10^{9}}{1}\left(\frac{1-\ell}{\sqrt{1^2+(1-l)^2}}+\frac{\ell}{\sqrt{1+l^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad E(Y)=\frac{1-\ell}{\sqrt{1^2+(1-\ell)^2}}+\frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$$

La representación de E(Y) frente a *l* es:

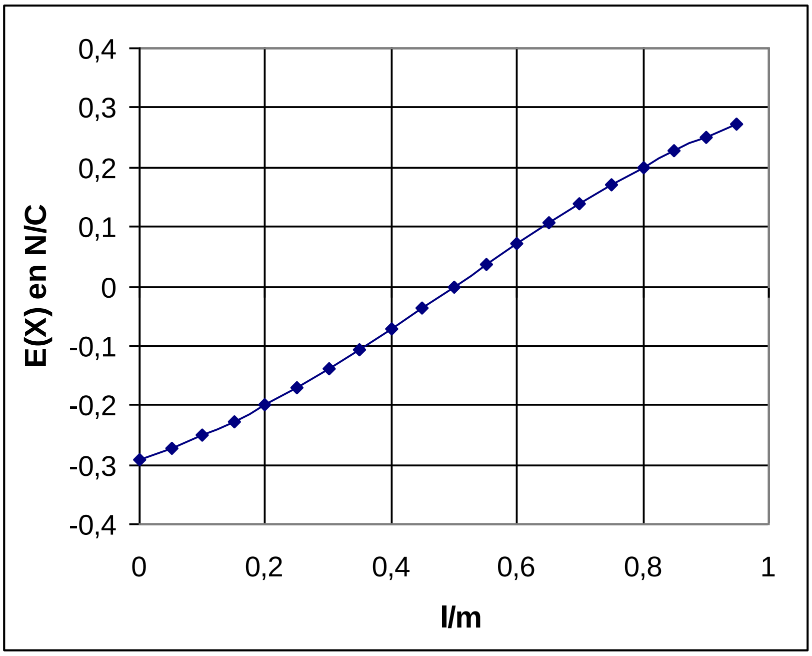


El máximo valor de E(X) se produce en los puntos que equidistan de los extremos del alambre

$$E(X)=\frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\sqrt{H^2+\left(L-\ell^2\right)}}-\frac{1}{\sqrt{H^2+\ell^2}}\right]=\frac{1}{9.}10^{-9}\cdot 9.10^{9}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(1-\ell^2\right)}}-\frac{1}{\sqrt{1^2+\ell^2}}\right)$$

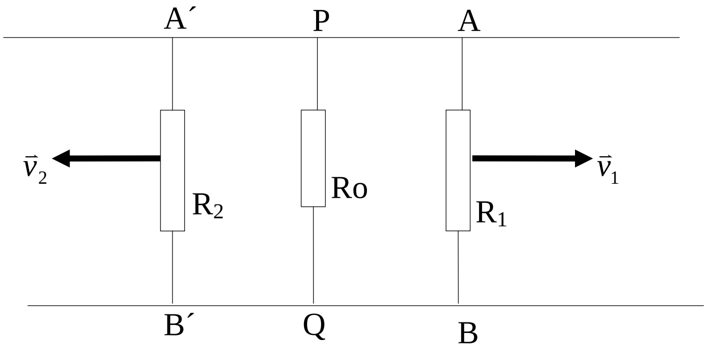
$$\Rightarrow\qquad E(X)=\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(1-\ell^2\right)}}-\frac{1}{\sqrt{1^2+\ell^2}}$$

La representación de E(X) frente a *l* es:



La componente sobre el eje X es nula cuando P equidista de los extremos del alambre.

384.- En la figura inferior el movimiento de AB y A´B´ es uniforme y el tramo PQ que contiene la resistencia R_o = 3Ω está fijo. Sobre el sistema actúa un campo magnético uniforme de inducción B= 1 T, perpendicular y dirigido hacia dentro del plano. Determinar la intensidad de la corriente que atraviesa la resistencia R_o. Datos. v_1= 0,3 m/s; v_2=0,2 m/s , R_1=1Ω, R_2=2Ω, AB=A´B´=0,1 m



Consideramos la espira PABQ. Al moverse AB hacia la derecha aumenta el flujo magnético que la atraviesa y de acuerdo con la ley de Lenz aparece una fuerza electromotriz que engendra una corriente inducida de un sentido tal, que crea un flujo magnético adicional, que tenderá a disminuir ese aumento de flujo, por tanto, este nuevo flujo y el campo magnético que lo crea , será saliente hacia el observador y de acuerdo con la mano derecha(explicada en otras secciones de esta web) se produce una corriente eléctrica de sentido contrario a las agujas del reloj.(corriente inducida) El mismo razonamiento es válido para la espira PA´B´Q.El circuito anterior equivale al de la figuras 1.

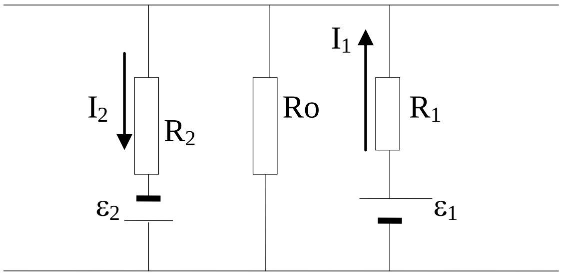


Fig.1

Calculamos los valores de las fuerzas electromotrices. En un tiempo Δt, AB se desplaza $v_1\Delta t$ y el área aumenta en $l\, v_1\Delta t$

$$\varepsilon_1 = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B\ell v_1\,\Delta t}{\Delta t}\right| = \left|B\ell\, v_1\right| \quad ; \quad \varepsilon_2 = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B\ell\, v_2\,\Delta t}{\Delta t}\right| = \left|B\ell\, v_2\right|$$

Aplicamos Kirchoff a las mallas PABQ y PA´B´Q, tomando como sentido positivo el movimiento de las agujas del reloj.

$$\varepsilon_1 = B\ell\, v_1 = I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_o \quad ; \quad \varepsilon_2 = B\ell v_2 = I_2R_2 + (I_2 - I_1)R_o$$

Sustituyendo los valores numérico.

$$0{,}03 = I_1 + (I_1 - I_2)3 \;\; ; \;\; 0{,}02 = I_2 2 + (I_2 - I_1)3 \Rightarrow \quad 0{,}03 = 4I_1 - 3I_2 \;\; ; \;\; 0{,}02 = 5I_2 - 3I_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}09 = 12I_1 - 9I_2 \quad ; \quad 0{,}08 = 20I_2 - 12I_1, \text{sumando}$$

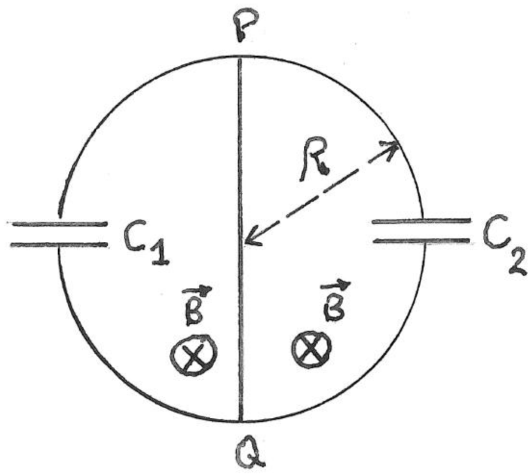
$$0{,}17 = 11I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{0{,}17}{11}A \quad \Rightarrow \quad 0{,}03 = 4I_1 - 3\frac{0{,}17}{11} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{0{,}03 + \frac{0{,}51}{11}}{4} = \frac{0{,}84}{44} = \frac{0{,}21}{11}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_o = I_1 - I_2 = \frac{0{,}21}{11} - \frac{0{,}17}{11} = 0{,}0036A = 3{,}6\,mA$$

385.- En el circuito de la figura inferior los cables de conexión tienen resistencia despreciable. Cada espira tiene la superficie de un semicírculo de radio R Los condensadores tienen capacidades C_1 y C_2 respectivamente. El dispositivo está atravesado por un campo magnético variable que es perpendicular al plano de los conductores y dirigido hacia dentro de ese plan. El módulo de ese campo es:

$$B = B_o \frac{t}{T}$$

B_o y T son constantes y t es la variable tiempo.
En un determinado instante el cable perpendicular PQ se corta y se suprime el campo magnético. Se pide la carga de cada condensador.



Calculamos la fuerza electromotriz inducida en la malla situada a la izquierda de PQ. Supongamos que el intervalo de tiempo que consideramos es desde t=0 a t=ΔT

$$\left|\varepsilon_1 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{[B(\Delta t) - B(0)]\pi \frac{R^2}{2}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B_o \frac{\Delta t}{T} \cdot \pi \frac{R^2}{2}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{B_o \pi R^2}{2T}\right|$$

Otra forma de analizar el problema:

Considerando arbitrariamente que la corriente inducida circula en esta malla en sentido contrario a las agujas de un reloj, de acuerdo con la regla de la mano derecha para el flujo , haciendo coincidir los dedos con la mano cerrada en el sentido de la corriente, , el vector superficie que lo señala el dedo pulgar sale del plano hacia el observador. En consecuencia ese vector $\vec{S}$ y el vector $\vec{B}$ formaran un ángulo de 180º.
El flujo a través de ese elemento vale

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{B_o t}{T} \cdot \pi \frac{R^2}{2} \cdot \cos 180º = -\frac{B_o \pi R^2}{2T}$$

La fuerza electromotriz inducida

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[-\frac{B_o \pi R^2}{2T}\right] = \frac{B_o \pi R^2}{2T}$$

El sentido en que se carga el condensador C_1 nos lo indica la ley de Lenz. Al aumentar el flujo que atraviesa la malla a la izquierda de PQ, la corriente inducida que se opone a ese aumento es de sentido contrario a las agujas del reloj, y por consiguiente, la armadura superior de C_1 se cargará positivamente y negativamente la inferior, de modo que la diferencia de potencial entre el condensador es $\Delta V = \varepsilon_1$ y la carga de dicho condensador.

$$q_1 = \varepsilon_1 C_1 = \frac{B_o \pi R^2}{2T} C_1$$

Para el otro condensador los argumentos empleados son los mismos y la corriente inducida es en sentido contrario a las agujas del reloj, así que la armadura superior de C_2 se carga negativamente y la inferior positivamente.

Al desaparecer PQ y el campo, ocurre que la armadura inferior de C_1, cargada negativamente, está en contacto directo con la armadura inferior de C_2, cargada positivamente; y la armadura superior de C_2, cargada negativamente, está en contacto directo con la armadura superior de C_1 , cargada positivamente. Así que de inmediato se produce una cancelación de cargas, de modo que si la carga de C_1 fuese igual a la de C_2 los condensadores se descargarían totalmente. Si $C_1 > C_2$ quedaría un remanente de carga de valor

$$\frac{B_o \pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right)$$

Esta carga remanente se repartiría a entre los dos condensadores quedando ambos asociados en paralelo y por tanto a la misma diferencia de potencial. Sea Q_1 y Q_2 las cargas finales de cada condensador:

$$Q_1 + Q_2 = \frac{B_o \pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right) \quad ; \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 \frac{C_2}{C_1} \quad \Rightarrow$$

$$Q_1 + Q_1 \frac{C_2}{C_1} = \frac{B_o \pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right) \quad \Rightarrow \quad Q_1\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right) = \frac{B_o \pi R^2}{2T}\left(C_1 - C_2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \frac{B_o \pi R^2}{2T} C_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$$

Par el condensador C_2

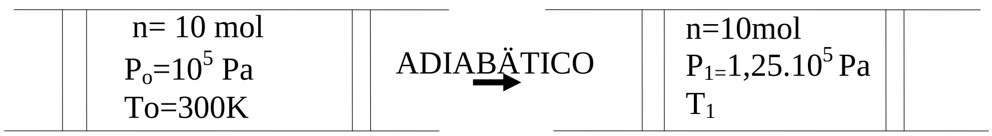
$$Q_2 = \frac{B_o \pi R^2}{2T} C_2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$$

386.-Un cilindro consta de dos émbolos de sección unidad que pueden moverse. Entre ambos émbolos hay 10 moles de un gas perfecto cuyo coeficiente γ= 1,4 y que se encuentra a la presión de 10^5 Pa y a la temperatura de 300 K. El émbolo situado a la izquierda se desplaza sin rozamiento, el situado a la derecha tiene un rozamiento equivalente a una presión de $0,25.10^5$Pa, (esto debe interpretarse que si la presión alcanza $1,25.10^5$ Pa, el émbolo comienza a desplazarse). Las paredes del cilindro y los émbolos son adiabáticos. La presión exterior es 10^5 Pa.

a) Se comprime muy lentamente el gas moviendo de izquierda a derecha el émbolo de la izquierda hasta que la presión del gas alcanza $1,25.10^5$ Pa que es cuando puede desplazarse el embolo de la derecha. Al llegar a esta situación se pide: la presión, temperatura y volumen del gas y el trabajo realizado.

b) A partir del instante anterior se desplaza de manera muy lenta el émbolo de la izquierda desplazándolo una distancia de 0,5 m. Se pide: la presión, temperatura y volumen del gas y el trabajo realizado.

a) En la figura inferior se ha hecho un esquema del proceso



Calculamos el volumen del gas en el estado inicial

$$P_oV_o = nRT_o \Rightarrow V_o = \frac{10\,\text{mol}\cdot 8,314\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot 300\text{K}}{10^5\,\text{Pa}} = 0,2494\ \text{m}^3$$

Al ser el proceso adiabático, aplicamos su ecuación

$$P_oV_o^\gamma = P_1V_1^\gamma \Rightarrow V_1^\gamma = \frac{P_oV_o^\gamma}{P_1} \Rightarrow \quad V_1 = \left(\frac{P_o}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_o = \left(\frac{1}{1,25}\right)^{\frac{1}{1,4}} 0,2494 = 0,2127\,\text{m}^3$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos al estado 1.

$$P_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{1,25.10^5\,\text{Pa}\cdot 0,2127\,\text{m}^3}{10\,\text{mol}\cdot 8,314\frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 319,8\ \text{K}$$

Otra manera de calcular la temperatura es aplicar el hecho de que la transformación entre los dos estados es isoentrópica.

$$\Delta S = 0 = C_P \ \ln\frac{T_1}{T_0} - R\ \ln\frac{P_1}{P_o} = C_P \ \ln\frac{T_1}{300} - 8{,}314\ \ln\frac{1{,}25.10^5}{10^5} = C_P \ \ln\frac{T_1}{300} - 1{,}855 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{T_1}{300} = \frac{1{,}855}{C_P} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 300\cdot e^{\frac{1{,}855}{C_P}}$$

Calculamos C_P a partir del dato del problema, γ= 1,4.

$$1{,}4 = \frac{C_P}{C_V} \Rightarrow C_V = \frac{C_P}{1{,}4}; \qquad C_P - C_V = R \Rightarrow C_P - \frac{C_P}{1{,}4} = R \Rightarrow C_P = \frac{R}{1-\frac{1}{1{,}4}} = 29\frac{J}{mol\,K}$$

Sustituyendo en T_1.

$$T_1 = 300\cdot e^{\frac{1{,}855}{29}} = 319{,}8\,K$$

La variación de energía interna es:

$$\Delta U = n\,C_v\left(T_1 - T_o\right) = 10\,mol\cdot\frac{29\frac{J}{mol\,K}}{1{,}4}\cdot\left(319.8 - 300\right)K = 2{,}10.10^3\,J$$

b) A partir del estado 1 se empieza a desplazar el embolo de la derecha. Si se desplaza una longitud ΔL_1 muy pequeña, la presión del gas aumenta ΔP también muy pequeño, pero como el proceso es lento el émbolo de la derecha se desplaza una longitud ΔL de modo que la presión del gas no varía. Los dos émbolos se mueven hacia la derecha de tal modo que la presión del gas se mantiene constante, el proceso es ***isobárico*.**

El émbolo de la izquierda se desplaza hacia la derecha un volumen A*0,5 metros y el de la derecha se desplaza hacia su derecha un volumen A* L. El volumen final del gas es:

$$V_2 = V_1 - 0{,}5A + AL = 0{,}2127 - 0{,}5 + L = \text{-}0{,}2873 + L$$

El trabajo ejercido por el émbolo de la izquierda se realiza contra la presión de $1{,}25.10^5$ Pa :

$$W_I = -P\ \Delta V = -1{,}25.10^5\cdot(-0{,}5) = 0{,}625.10^5\,J$$

El trabajo ejercido por el émbolo de la derecha se realiza contra la presión exterior $1{,}00.10^5$ Pa :

$$W_2 = -P\,\Delta V = -1{,}00.10^5\cdot(+L) = \text{-}10^5\cdot L \quad J$$

El trabajo total es:

$$W_T = 0{,}625.10^5 - 10^5 L = 10^5\left(0{,}625 - L\right) = nC_v\left(T_2 - T_1\right) \Rightarrow$$

$$10^5\left(0{,}625 - L\right) = 10\cdot\frac{29}{1{,}4}\left(T_2 - 319{,}8\right)$$

Aplicamos la ecuación de los gases entre los estados 1 y 2, ligados por una transformación a presión constante.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{0,2127}{319,8} = \frac{-0,2873 + L}{T_2} \quad \Rightarrow \quad 6,651.10^{-4}\,T_2 = L - 0,2873 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = 6,651.10^{-4}\,T_2 + 0,2873$$

Sustituyendo

$$10^5\left(0,625 - 6,651.10^{-4}\,T_2 - 0,2873\right) = 207,14\left(T_2 - 319,8\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3377.10^5 - 66,51\,T_2 = 207,14\,T_2 - 6,624.10^4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad T_2 = \frac{10^5\left(0,3377 + 0,6624\right)}{207,14 + 66,51} = 365,5\,\mathrm{K}$$

El valor de L es

$$: \quad L = 6,651.10^{-4} \cdot 365,5 + 0,2873 = 0,53\,\mathrm{m} \Rightarrow \qquad V_2 = 1\,\mathrm{m}^2 \cdot 0,53\,\mathrm{m} = 0,53\,\mathrm{m}^3$$

El valor numérico del trabajo es:

$$W_T = 0625.10^5 - 10^5 \cdot 0,53 = 9,5.10^3\,\mathrm{J}$$

Como el trabajo es positivo, éste se ha realizado desde el exterior sobre el sistema.