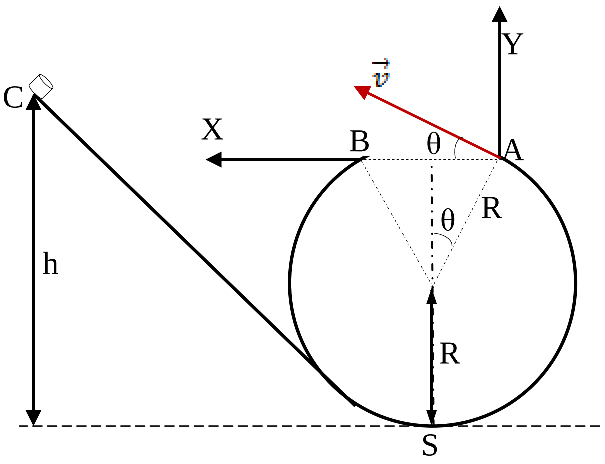
PROBLEMAS VARIADOS 2(2013-2014)

326- En la figura inferior una masa considerada puntual desliza, a partir de la altura h, por el plano inclinado y penetra en el aro. Éste tiene una abertura en la parte superior cuyo tamaño queda definido por el ángulo θ y cuyos extremos son A y B. El radio del aro es R = 1 metro. Se admite que no existen rozamientos, y se pide encontrar la relación entre h y θ si la trayectoria por el aire de la masa puntual, al abandonar el aro en A, pasa justamente por el punto medio de AB. Determinar el valor mínimo de la altura h que cumple la relación anterior.



La masa tiene en el punto más alto C del plano inclinado una energía potencial que vale m· g· h, tomando la referencia h = 0 en el punto inferior S. Cuando dicha masa queda libre y en su movimiento llega al punto A, lo hace con un velocidad cuyo módulo designamos con v, y en ese punto tiene energía cinética y potencial. El balance de energías conduce a.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R + R\cos\theta) \Rightarrow v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad (1)$$

El vector velocidad $\vec{v}$ en A es tangente al aro en el punto A y forma un ángulo θ con el eje X, tal como se observa en la figura. Una vez que la masa abandona el aro se desplaza por el aire siguiendo una trayectoria parabólica, siendo $\vec{g}$ el vector aceleración con dirección del eje Y y sentido negativo.

Las ecuaciones de la trayectoria parabólica son:

$$x = v\cos\theta \cdot t \;\; ; \;\; y = x\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot t - \frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow y = x\,\mathrm{tag}\,\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

Dado que la parábola pasa por el punto medio de AB, las coordenadas en ese instante son respectivamente:

$$x = R\,\mathrm{sen}\,\theta \;\; ; \;\; y = 0$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la parábola resulta:

$$0 = R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{tag}\,\theta - \frac{g\,R^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{2v^2\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{g\,R\,\mathrm{tag}^2\theta}{2v^2} = \mathrm{sen}\theta \cdot \mathrm{tag}\,\theta \Rightarrow v^2 = \frac{g\,R\,\mathrm{tag}\,\theta}{2\mathrm{sen}\,\theta} \quad (2)$$

Igualando (1) con (2)

$$2gh - 2gR - 2gR\cos\theta = \frac{gR\,\mathrm{tag}\,\theta}{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \Rightarrow h - R(1+\cos\theta) = \frac{R\,\mathrm{tag}\,\theta}{4\,\mathrm{sen}\,\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = R\left(\frac{\mathrm{tag}\,\theta}{4\,\mathrm{sen}\,\theta} + \cos\theta + 1\right) \quad (3)$$

Para determinar el mínimo derivamos la (3) respecto de θ e igualamos a cero

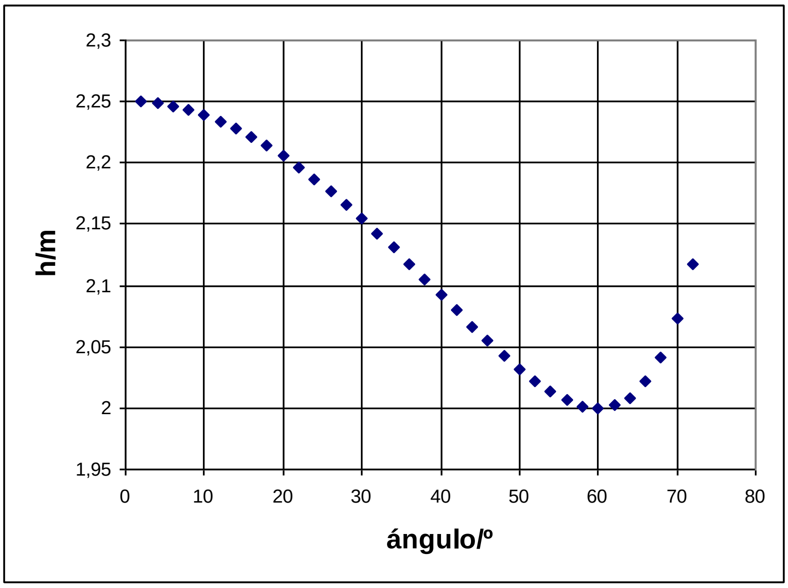
$$\frac{dh}{d\theta} = R\left(\frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} - \mathrm{tag}\,\theta\cdot 4\cos\theta}{16\,\mathrm{sen}^2\theta} - \mathrm{sen}\,\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} - 4\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta = 16\,\mathrm{sen}^3\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = 4\left(1-\cos^2\theta\right) \Rightarrow 1-\cos^2\theta = 4\cos^2\theta - 4\cos^4\theta \quad ; \quad \text{Sea } v = \cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4v^2 - 5v + 1 = 0 \Rightarrow v = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

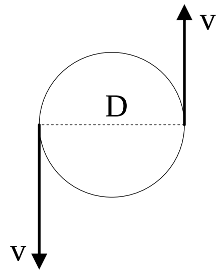
Nota: No se ha considerado la solución de la ecuación de segundo grado que proporciona el valor cos θ = 1; porque implica un valor para θ = 0º que resulta físicamente incompatible con la trayectoria que hace la partícula en este problema.

La representación de (3) para R = 1m, es la siguiente:



327- Dos estrellas de la misma masa m, están situadas a una distancia D y forman un sistema binario que gira alrededor del centro de masas. Se observa que el desdoblamiento máximo de las líneas espectrales es: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1{,}2.10^{-4}$. Este desdoblamiento máximo se produce cada T= 30 días. Determinar el valor de D y la masa de cada estrella.

El desdoblamiento máximo de las líneas espectrales se produce cuando la velocidad de una de ellas apunta al observador y la velocidad de la otra se aleja, tal como se indica en la figura.



El módulo de la velocidad de cada estrella se designa con v. Como las estrellas tienen la misma masa el centro de masas del sistema está en el medio de la línea D.

El observador que detecta las ondas procedentes de las estrellas aplica el efecto Doppler a cada una de ellas.

$$\upsilon' = \frac{\upsilon}{1+\frac{\upsilon}{c}} \Rightarrow \lambda' = \frac{1+v}{\upsilon}\ ;\ \upsilon'' = \frac{\upsilon}{1-\frac{\upsilon}{c}} \Rightarrow \lambda'' = \frac{1-v}{\upsilon} \Rightarrow \lambda' - \lambda'' = \Delta\lambda = \frac{2v}{\upsilon} = \frac{2v}{\frac{c}{\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v}{c} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\frac{\Delta\lambda}{\lambda}c}{2}$$

El desdoblamiento máximo vuelve a ocurrir cuando la estrella de la derecha ocupe el lugar de la izquierda y viceversa, esto es, cada estrella recorre media circunferencia.

$$v = \frac{\pi\frac{D}{2}}{T} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda\cdot c}{\lambda} = \frac{\pi D}{T} \Rightarrow D = \frac{T\cdot\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\cdot c}{\pi} = \frac{30\cdot 86400\cdot 1{,}2.10^{-4}\cdot 3.10^{8}}{\pi} = 3.10^{10}\,m$$

Cada estrella, al girar alrededor de su centro de masa, necesita una fuerza centrípeta que es la proporcionada por la atracción gravitatoria entre las dos estrellas

$$m\frac{v^2}{\frac{D}{2}} = G\frac{m\,m}{D^2} \Rightarrow 2v^2 = \frac{G\,m}{D} \Rightarrow m = \frac{2v^2 D}{G} = \frac{2\cdot\pi^2 D^2}{4GT^2}\cdot D = \frac{\pi^2 D^3}{2GT^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad m = \frac{\pi^2\left(3.10^{10}\right)^3}{2\cdot 6{,}67.10^{-11}\cdot\left(30\cdot 86400\right)^2} = 3.10^{29}\,kg$$

328- Una lente semiesférica tiene un radio R = 7,5 cm y un índice de refracción n=1,5. A una distancia de 5 cm de la cara plana se sitúa un objeto de 2 cm de altura. Calcular la distancia a la que se forma su imagen, su tamaño y su naturaleza.

Al ser una lente semiesférica debe considerarse como una lente gruesa. Debemos calcular en la posición de los focos y de los planos principales. Tratándose de una lente semiesférica, y dado que trabajamos en la zona paraxial el plano imagen H´ es tangente a la esfera por su parte convexa, más adelante comprobaremos esta afirmación.
La ecuación que da la distancia focal imagen en una lente gruesa es:

$$\frac{1}{f´} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2 e}{n\, r_1 r_2}$$

r_1 y r_2 son los radios de las caras de la lente, e el espesor y n el índice de refracción.

Aplicando la fórmula anterior a la lente del problema

$$\frac{1}{f´} = (1,5-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-7,5}\right) + \frac{(1,5-1)^2 \cdot 7,5}{1,5\cdot\infty\cdot(-7,5)} = \frac{0,5}{7,5} \Rightarrow f´= +15\,\text{cm}$$

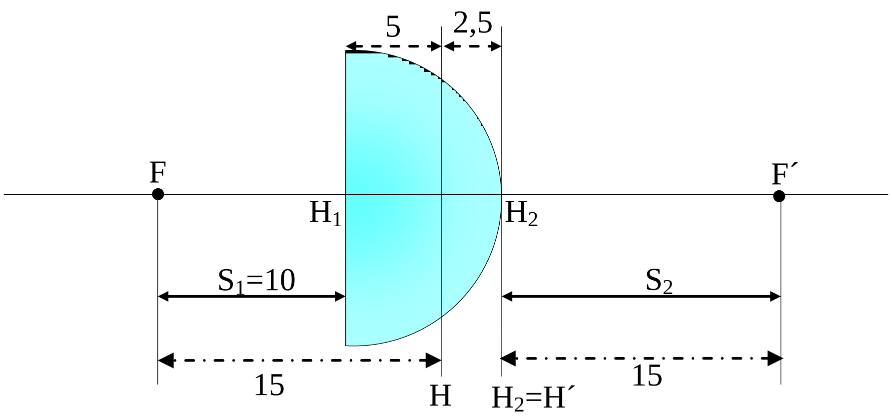
La distancia focal objeto es –f=15 cm, ya que los medios de entrada y salida de la lente es el mismo, esto es, el aire con n=1.

Calculamos la distancia que existe desde el foco objeto a la cara plana de la lente:

e

$$H_1F = s_1 = -f´ - \frac{(n-1)}{n}\frac{e\cdot f´}{r_2} = -15 - \frac{0,5}{1,5}\cdot\frac{7,5\cdot 15}{-7,5} = -10\,\text{cm}$$

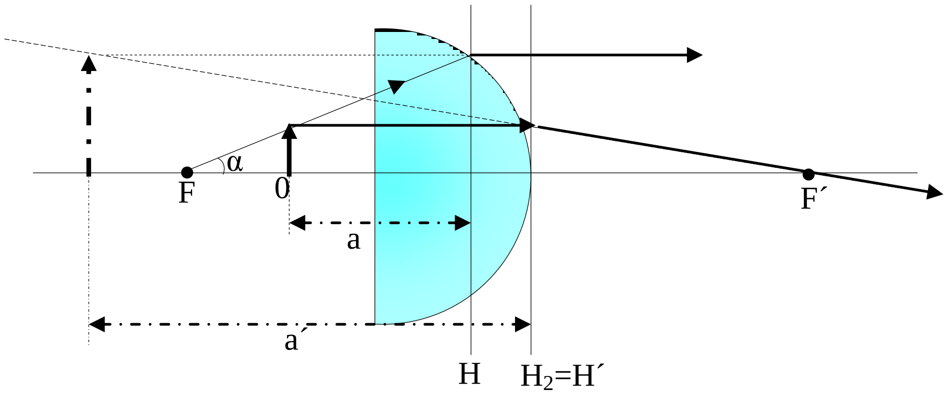
El plano principal H está a una distancia de 5 cm de la cara plana y por ello la distancia entre los planos principales es 2,5 cm. En la figura se han indicado los valores absolutos de las distancias. Los puntos H_1 y H_2 son los centros de figura.



s_2 designa la distancia entre H_2 y F´.

$$= H_2F´ = s_2 = +f´ - \frac{n-1}{n}\frac{e f´}{r_1} = +15 - \frac{0,5}{1,5}\cdot\frac{7,5\cdot 15}{\infty} = 15\text{cm}$$

Este valor coincide con la distancia focal imagen H´F, luego para las lentes semiesféricas el plano principal imagen es tangente a la lente por la parte convexa, tal como afirmamos antes.



En la figura anterior, se ha colocado el objeto (una flecha derecha) a una distancia de 5 cm de la cara plana de la lente, por tanto, está a una distancia en valor absoluto de 10 cm del plano principal imagen.

Para construir gráficamente la imagen del objeto se trazan dos rayos procedentes del objeto, uno paralelo al eje FF´ llega a los planos principales y pasa por el foco imagen F´, otro como si procediera del foco objeto llega a los planos principales y sale paralelo a FF´. En la figura se ve que el haz es divergente, por lo que la imagen será virtual y se formará en las prolongaciones de los rayos hacia atrás, tal como indica la figura.

Si designamos con a, la distancia del plano principal objeto al objeto y con a´ la distancia del plano principal imagen a la imagen, tenemos:

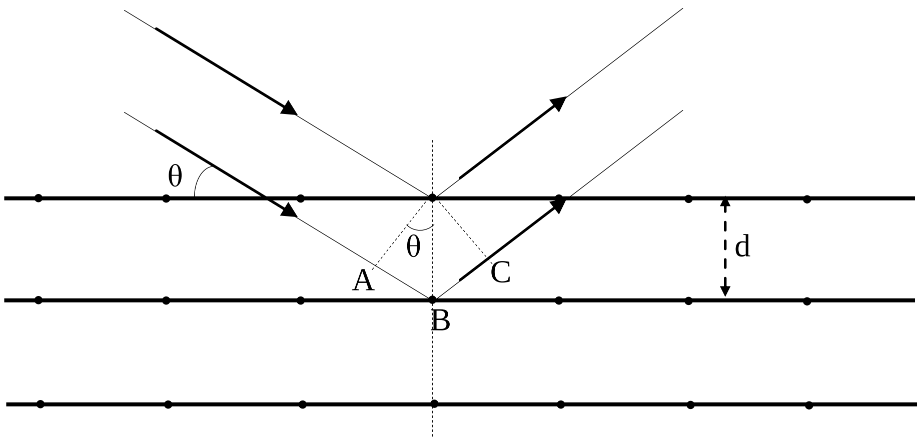
$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a´}=\frac{1}{f´} \Rightarrow -\frac{1}{-10}+\frac{1}{a´}=\frac{1}{15´} \Rightarrow \frac{1}{a´}=\frac{1}{15}-\frac{1}{10}=\frac{-5}{150} \Rightarrow a´=-30\,\text{cm}$$

Para determinar el tamaño de la imagen, se deduce de la figura anterior:

$$\text{tag}\,\alpha=\frac{\text{tamaño objeto}}{\text{FO}}=\frac{\text{tamaño imagen}}{\text{FH}} \Rightarrow \frac{+2\,\text{cm}}{-5\,\text{cm}}=\frac{y´}{-15} \Rightarrow y´=+6\,\text{cm}$$

La imagen es virtual, derecha y tres veces mayor que el objeto.

329- Un haz de electrones monoenergéticos incide sobre la cara de un cristal con un ángulo θ=30º. Este ángulo se forma entre la dirección del haz y el plano cristalino, tal como indica la figura inferior. La distancia entre los planos cristalinos es d=0,20 nm. Si los electrones se aceleran desde el reposo con una tensión U, se observa un máximo en la reflexión especular. El siguiente máximo en esa reflexión se produce cuando la tensión de aceleración es: nU = 2,25 U . Determinar el valor de U.
Datos. Constante de Planck = 6,63.10^{-34} Js; masa del electrón m=9,11.10^{-31} kg , carga del electrón q = 1,602.10^{-19} C



En la figura del problema se observa que el haz incidente en la cara cristalina y el reflejado en el plano cristalino inferior tienen una diferencia de marcha de

$$AB + BC = 2\,d\,\mathrm{sen}\theta$$

Si esta diferencia de marcha es un múltiplo entero de la longitud de onda de los electrones se producirá un máximo (ley de Braag).

$$2\,d\,\mathrm{sen}\,\theta = k\lambda$$

El siguiente máximo se produce cuando

$$2\,d\,\mathrm{sen}\,\theta = k'\lambda' = (k+1)\lambda' \quad \Rightarrow \quad k\,\lambda = (k+1)\lambda' \;\Rightarrow\; \frac{k+1}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (1)$$

Las longitudes de onda de los electrones están determinadas por la teoría de De Broglie que establece la dualidad onda corpúsculo

$$\lambda = \frac{h}{mv} \;; \qquad \lambda' = \frac{h}{m\,v'}$$

h es la constante de Planck, *m* la masa del electrón; *v* y *v´* sus velocidades, las cuales dependen de la tensión con que se han acelerado los electrones. Igualamos el trabajo eléctrico con la energía cinética adquirida por los electrones

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{2qnU}{m}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2qmU}} \quad ; \quad \lambda' = \frac{h}{\sqrt{2qmnU}}$$

Sustituyendo en (1)

$$1 + \frac{1}{k} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2qmU}}}{\frac{h}{\sqrt{2qnmU}}} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} = \sqrt{n} - 1 \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = k\lambda \quad \Rightarrow 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \cdot \frac{h}{\sqrt{2qmU}} \quad \Rightarrow U = \frac{h^2}{8\left(\sqrt{n} - 1\right)^2 qmd^2\,\mathrm{sen}^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{\left(6{,}63.10^{-34}\right)^2}{8\left(\sqrt{2{,}25} - 1\right)^2 \cdot 1{,}602.10^{-19} \cdot 9{,}11.10^{-31} \cdot \left(0{,}20.10^{-9}\right)^2 \cdot \mathrm{sen}^2 30} = 151\ \mathrm{V}$$