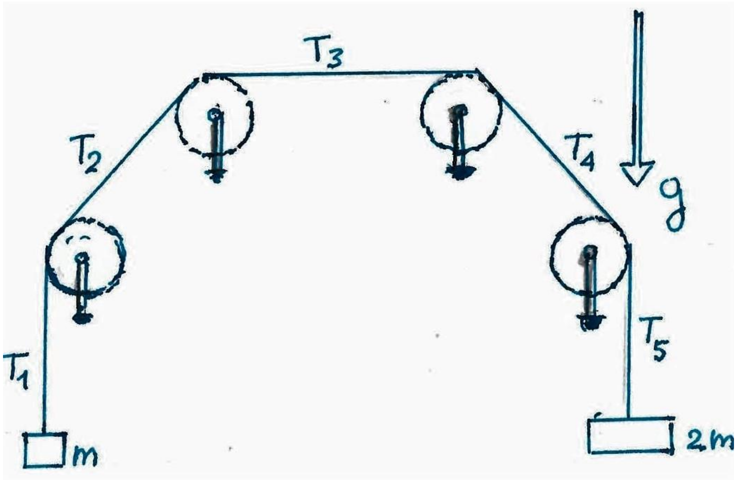
474.- En la figura inferior aparece un sistema de masas y poleas. Cada polea tiene un momento de inercia $I=\frac{1}{2}mR^2$ (m= masa, R= radio). Se admite que las poleas carecen de rozamiento que giran sin que la cuerda deslice sobre ellas y que la cuerda es inextensible. Calcular
a) La aceleración de las masas cuando el sistema se deja en libertad
b) La tensión de cada una de las cuerdas.



a) Consideramos que las dos masas están inicialmente al mismo nivel. Tomamos un nivel de referencia por debajo de las masas colgantes, siendo h la distancia respecto de ellas. Dejamos en libertad al sistema y aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre la posición inicial (sin velocidad de las masas) y cuando la masa 2m haya recorrido la distancia h. Respecto de h, inicialmente el sistema tiene energía potencial de las masas m y 2m, al final tienen energías cinéticas de traslación las dos masas, energía potencial adquirida por la masa m y energía cinética de rotación de las cuatro poleas.

$$2mgh+mgh=\frac{1}{2}2mv^2+\frac{1}{2}mv^2+mg2h+4\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

La velocidad angular está relacionada con v por la ecuación $\omega=\frac{v}{R}$

$$2mgh+mgh=\frac{1}{2}2mv^2+\frac{1}{2}mv^2+mg2h+4\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh=\frac{3}{2}mv^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\frac{v^2}{R^2}\right)\Rightarrow\ gh=\frac{5}{2}v^2\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{2gh}{5}}$$

Si a representa la aceleración de la masa 2m verticalmente hacia abajo y la de la masa m verticalmente hacia arriba

$$h=\frac{1}{2}at^2\ ;\ v=at\quad\Rightarrow\quad h=\frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2}\quad\Rightarrow\quad a=\frac{v^2}{2h}=\frac{2gh}{10h}=\frac{g}{5}$$

Sobre la masa m actúan dos fuerzas, el peso mg vertical y hacia abajo y la tensión T_1 de la cuerda vertical y hacia arriba y la masa se desplaza vertical y hacia arriba con una aceleración g/5 m/s^2
Aplicamos la segunda ley de Newton

$$T_1 - mg = m\frac{g}{5} \quad \Rightarrow \quad T_1 = mg(\frac{1}{5}+1) = \frac{6}{5}mg$$

Sobre la masa 2m actúan dos fuerzas, el peso 2mg vertical y hacia abajo y la tensión T_5 de la cuerda vertical y hacia arriba y la masa se desplaza vertical y hacia abajo con una aceleración g/5 m/s^2

Aplicamos la segunda ley de Newton

$$2mg - T_5 = 2m\frac{g}{5} \quad \Rightarrow \quad T_5 = mg(2-\frac{2}{5}) = \frac{8}{5}mg$$

Aplicamos la ley de Newton para la rotación para la polea que está sometida a las tensiones T_1 y T_2.

$$T_2 R - T_1 R = I\alpha$$

Puesto que la cuerda no desliza $a = \alpha R$

$$T_2 = T_1 + \frac{I\alpha}{R} = \frac{6}{5}mg + \frac{\frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R}}{R} = \frac{6}{5}mg + \frac{1}{2}m\frac{g}{5} = \frac{13}{10}mg$$

Para la polea sometida a las tensiones T_2 y T_3

$$T_3 = T_2 + \frac{I\alpha}{R} = \frac{13}{10}mg + \frac{\frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R}}{R} = \frac{13}{10}mg + \frac{1}{2}m\frac{g}{5} = \frac{14}{10}mg$$

Para la polea sometida a las tensiones T_3 y T_4

$$T_4 = T_3 + \frac{I\alpha}{R} = \frac{14}{10}mg + \frac{\frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{a}{R}}{R} = \frac{14}{10}mg + \frac{1}{2}m\frac{g}{5} = \frac{15}{10}mg$$

475.- **Cosmología newtoniana.**

Utilizando la ley de Hubble para pequeños desplazamientos al rojo $v_R = HR$, donde v_R es la velocidad radial y R la distancia al objeto astrofísico y H la constante de Hubble, encontrar la ecuación de la densidad crítica del Universo, utilizando argumentos simples de la energía newtoniana. Suponer que el Universo es isotrópico y homogéneo. Utilice en este problema una corona en lugar de esferas.

Tal como se considera al Universo podemos escoger una esfera de radio R del universo y a su alrededor una corona de espesor ΔR. Designamos con ρ a la densidad del Universo. La corona se expansiona con una velocidad v_R . Como consecuencia la masa de esa corona posee energía cinética y además energía potencial por interacción de su materia con la del universo que existe en su interior. Si la suma de estas dos energías es nula la densidad es la crítica. Por encima el universo estará en expansión y por debajo llegará un momento en que empiece a contraerse.

Cálculo de la energía cinética

Masa de la corona $\Delta m = 4\pi R^2 \Delta R\, \rho$

Energía cinética $E_C = \frac{1}{2}\Delta m\, v_R^2 = \frac{1}{2} 4\pi R^2 v_R^2\, \Delta R\rho = 2\pi R^2 v_R^2\, \Delta R\rho$

Cálculo de la energía potencial

$$E_P = -G\frac{Mi\, M_C}{R} = -G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot 4\pi R^2 \Delta R\rho}{R} = -\frac{16\pi^2 R^4 G\rho^2}{3}\Delta R$$

$$E_T = 2\pi R^2 H^2 R^2 \Delta R\rho - \frac{16\pi^2 R^4 G\rho^2}{3}\Delta R = 0 \Rightarrow 2H^2 = \frac{16\pi G\rho}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

476.-Dos cuerpos idénticos tienen como capacidad C, siendo esta independiente de la temperatura. El cuerpo más caliente está inicialmente a una temperatura T_C y el otro a una temperatura inferior T_F. Se establece un ciclo de Carnot tomando a los cuerpos como las fuentes de calor y frío, transcurriendo el proceso por etapas infinitesimales hasta que ambos adquieren la misma temperatura T_E. Calcular el valor de T_E.

El ciclo transcurre tomando calor de forma infinitesimal del cuerpo más caliente y llevando una parte de este calor al cuerpo frío y produciendo una cantidad de trabajo. La entropía del cuerpo caliente disminuye y aumenta la del frío, pero en conjunto la suma es nula, esto es, el proceso es isoentrópico.

En un instante T'_C es la temperatura T''_F la del frío

$$\frac{dQ_C}{T'_C} + \frac{dQ_F}{T'_F} = 0$$

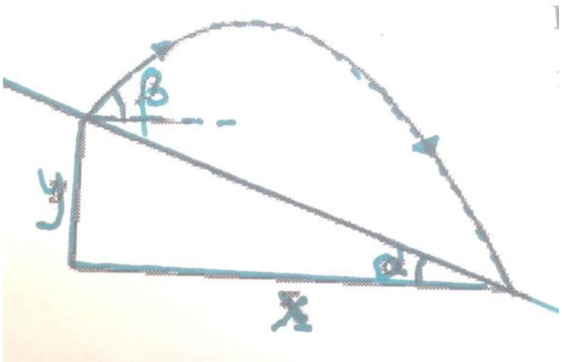
Si la temperatura disminuye dT'_C en el cuerpo caliente y aumenta dT'_F en el frío

$$-\frac{C\,dT'_C}{T'_C} = \frac{C\,dT'_F}{T'_F} \quad \Rightarrow \quad \frac{C\,dT'_C}{T'_C} + \frac{C\,dT'_F}{T'_F} = 0$$

Integrando la ecuación anterior entre las temperaturas iniciales y la de equilibrio resulta

$$\int_{T_C}^{T_E} \frac{dT'_C}{T''_C} + \int_{T_F}^{T_E} \frac{dT'_C}{T''_C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{T_E}{T_C} + \ln\frac{T_E}{T_F} = 0 \Rightarrow \frac{T_E}{T_C} = \frac{T_F}{T_E} \Rightarrow \qquad T_E = \sqrt{T_C\, T_F}$$

477.-Desde un plano inclinado de ángulo α con la horizontal se lanza un cuerpo con velocidad inicial v, formando con la dirección horizontal un ángulo beta (ver la figura inferior). Determinar el valor de beta
a) Para que el tiempo de vuelo sea el mayor posible
b) Para que el alcance del cuerpo sea máximo.



a) Las ecuaciones paramétricas del movimiento del cuerpo respecto de unos ejes cartesianos localizados en el punto de lanzamiento son.

$$x = v(\cos\beta)t \ (1) \quad ; \quad y = v(\text{sen}\beta)t - \frac{1}{2}g\,t^2 \ (2)$$

Cuando el cuerpo choque con el plano inclinado las coordenadas de ese punto son
(x, -y), por tanto:

$$\text{tag}\,\alpha = -\frac{y}{x} \quad (3)$$

De (1) y (3) $\quad -\dfrac{y}{\text{tag}\,\alpha} = v(\cos\beta)t \quad (4)$

Sustituyendo (2) en (4)

$$-\frac{v(\text{sen}\,\beta)\,t - \frac{1}{2}gt^2}{\text{tag}\,\alpha} = v(\cos\beta)t \quad \Rightarrow -v(\text{sen}\,\beta) + \frac{1}{2}gt = v(\cos\beta)\text{tag}\,\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2\,v(\cos\beta)\text{tag}\,\alpha}{g} + \frac{2\,v(\text{sen}\,\beta)}{g} = \frac{2\,v}{g}\left[\cos\beta\cdot\text{tag}\,\alpha + \text{sen}\,\beta\right]$$

Para hallar el máximo derivamos la función t respecto de β e igualamos a cero

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{2\,v}{g}(-\text{sen}\,\beta\cdot\text{tag}\,\alpha + \cos\beta) = 0 \ ; \ \text{sen}\,\beta\cdot\text{tag}\,\alpha = \cos\,\beta \Rightarrow \quad \text{tag}\,\beta\cdot\text{tag}\,\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \beta + \alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

b) Partimos de las ecuaciones (1) , (2) y (3).

De (3) en (2) $\quad -x\,\text{tag}\,\alpha = v(\text{sen}\,\beta)\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \quad (5)$

Despejamos t de (1) y se sustituye en (5)

$$-x\,\mathrm{tag}\,\alpha = v(\mathrm{sen}\,\beta)\frac{x}{v\cos\beta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\beta}\right)^2 \Rightarrow -\mathrm{tag}\,\alpha = \mathrm{tag}\,\beta - \frac{g\,x}{2\,v^2\cos^2\beta} \quad \Rightarrow$$

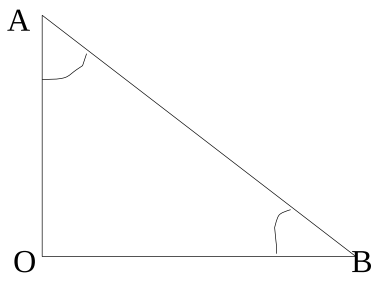
$$\Rightarrow g\,x = 2\,v^2\cos^2\beta(\mathrm{tag}\,\beta + \mathrm{tag}\,\alpha) \Rightarrow \quad x = \frac{v^2}{g}\left(2\cos\beta\ \mathrm{sen}\,\beta + 2\cos^2\beta\ \mathrm{tag}\,\alpha\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{v^2}{g}\left(\mathrm{sen}\ 2\ \beta + 2\cos^2\beta\ \mathrm{tag}\,\alpha\right)$$

Derivamos la función x respecto de β e igualamos a cero

$$\frac{dx}{d\beta} = \frac{v^2}{g}\left(2\cos 2\beta - 4\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta\ \mathrm{tag}\,\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos 2\beta - 2\mathrm{tag}\,\alpha\ \mathrm{sen}\,2\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tag}\,\alpha\ \ \mathrm{sen}\,2\beta = \cos 2\beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha\,\mathrm{tag}\,2\beta = 1$$

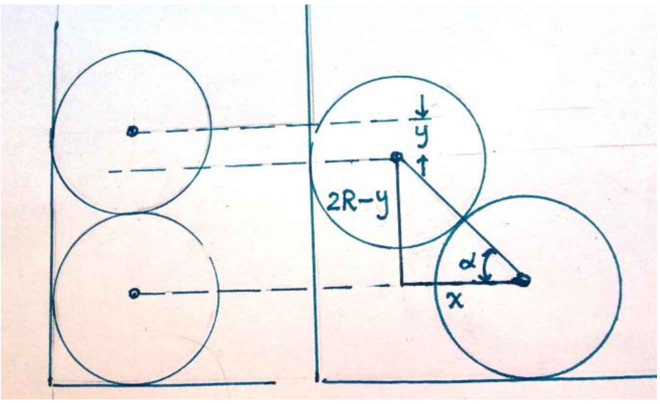


El ángulo en A y en B son complementarios $A + B = 90º$

$$\mathrm{tag}\,A = \frac{OB}{OA} \quad ; \quad \mathrm{tag}\,B = \frac{OA}{OB} \quad \Rightarrow \ \mathrm{tag}\,A \cdot \mathrm{tag}\,B = \frac{OB}{OA}\cdot\frac{OA}{OB} = 1$$

$$\mathrm{tag}\,\alpha\,\mathrm{tag}\,2\beta = 1 \Rightarrow \quad \alpha + 2\beta = 90º \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{90º - \alpha}{2}$$

478.-Dos cilindros iguales de radio R se encuentran uno encima del otro y ambos apoyados sobre una pared vertical. Al cilindro inferior se le da un muy ligero empujón hacia la derecha de modo que empieza a deslizar manteniéndose en contacto con el superior al mismo tiempo que éste sigue en contacto con la pared vertical. La figura inferior indica la posición inicial y luego un tiempo después. Se supone que no hay rozamientos por lo que ambos cilindros no rotan.
a) Se pide la velocidad máxima que adquiere el cilindro inferior.
b) Determinar para qué valor de y los módulos de las velocidades de los dos cilindros son iguales.



a) En los dibujos los cilindros están vistos desde una de sus bases. Inicialmente uno está encima del otro, luego, el de arriba se ha desplazado hacia abajo una distancia y, y el inferior una distancia x hacia la derecha

En la figura se observa que y es menor que x por tanto la velocidad del cilindro inferior es mayor que la del superior, pero como veremos después la del superior crece hasta alcanzar la misma velocidad que el inferior y a partir de ese momento cesa el contacto y el superior se desplaza en caída libre y el inferior ha alcanzado la máxima velocidad y ésta se mantiene porque no hay rozamiento.

A medida que transcurre el proceso el ángulo α se hace más pequeño.

Se deduce que

$$(2R-y)^2+x^2=4R^2$$

Diferenciamos la anterior ecuación

$$2(2R-y)(-dy)+2x\ dx=0\ \Rightarrow\ (2R-y)\left(\frac{dy}{dt}\right)=x\left(\frac{dx}{dt}\right)\ \Rightarrow\frac{(2R-y)}{2R}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{x}{2R}\left(\frac{dx}{dt}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (\operatorname{sen}\alpha)\,v_Y=(\cos\alpha)\,v_X\quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica. El cilindro superior pierde energía potencial que aparece como cinética en los dos cilindros

$$m\,g\,y=\frac{1}{2}m\,v_Y^2+\frac{1}{2}m\,v_X^2\quad\Rightarrow\quad 2\,g\,y=v_Y^2+v_X^2\quad (2)$$

Combinando (1) y (2)

$$2g\,y=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}v_X^2+v_X^2\Rightarrow 2g\,y=v_X^2\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)=\frac{v_X^2}{\operatorname{sen}^2\alpha}\Rightarrow\quad v_X^2=2\,g\,y\operatorname{sen}^2\alpha$$

Tanto α como y son dos variables pero que están relacionadas entre sí

$$v_X^2 = 2gy\left(\frac{2R-y}{2R}\right)^2 = 2gy\left(1-\frac{y}{2R}\right)^2 = 2gy\left(1+\frac{y^2}{4R^2}-\frac{y}{R}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_X^2 = 2gy + \frac{gy^3}{2R^2} - \frac{2gy^2}{R}$$

La velocidad v_X aumenta mientras haya contacto entre los dos cilindros y adquiere un valor máximo y también es máximo su cuadrado

$$\frac{d\left(v_X^2\right)}{dy} = 2g + \frac{3\,g\,y^2}{2R^2} - \frac{4gy}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 8Ry + 4R^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$y = \frac{8R \pm \sqrt{64R^2 - 48R^2}}{6} = \frac{8R \pm 4R}{6} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2R \;\; ; \;\; y_2 = \frac{2}{3}R$$

La derivada segunda es: $6y - 8R = 0$

La solución y_1 conduce a un valor positivo de la segunda derivada y la solución y_2 a un valor negativo, luego y_2 es el máximo
Sustituimos y_2 en seno de alfa

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2R - \frac{2}{3}R}{2R} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 41{,}8^{\circ}$$

El valor de v_Y para este ángulo lo hallamos sustituyendo en la ecuación (2) $2gy = v_Y^2 + v_X^2$

$$v_Y^2 = 2gy - v_X^2 = 2gy - \left(2gy + \frac{gy^3}{2R^2} - \frac{2gy^2}{R}\right)^2$$

Calculamos las velocidades cuando $y_2=2/3\ R$

$$v_X^2 = 2g\frac{2}{3}R + \frac{g\frac{8}{27}R^3}{2R^2} - \frac{2g\frac{4}{9}R^2}{R} = \frac{4gR}{3} + \frac{8gR}{54} - \frac{8gR}{9} = gR\frac{72+8-48}{54} = \frac{32gR}{54} = \frac{16gR}{27}$$

$$v_Y^2 = 2g\frac{2}{3}R - \frac{16gR}{27} = gR\frac{36-16}{27} = \frac{20}{27}gR$$

b) Si los módulos de las velocidades son iguales también lo son sus cuadrados

$$v_X^2 + v_y^2 = 2gy \quad \Rightarrow \quad 2v_X^2 = 2gy \quad \Rightarrow \quad v_X^2 = gy$$

Anteriormente hemos visto que $v_x^2 = 2gy + \frac{g\,y^3}{2R^2} - \frac{2g\,y^2}{R}$, igualando ambas ecuaciones

$$gy = 2gy + \frac{g\,y^3}{2R^2} - \frac{2g\,y^2}{R} \Rightarrow y + \frac{y^3}{2R^2} - \frac{2\,y^2}{R} = 0 \quad \Rightarrow y^2 - 4Ry + 2R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{4R \pm \sqrt{16R^2 - 8R^2}}{2} = \frac{4R \pm 2\sqrt{2}R}{2} = R(2 - \sqrt{2})$$

La solución del problema es la indicada anteriormente ya que la positiva supone un valor de y = 3,41 R , y si observamos la figura del problema el mayor valor que puede tomar y es 2 R.