PROBLEMAS VARIADOS 2-2018

428.-Una bala de forma esférica de 2 gramos de masa y 9 mm de diámetro abandona el arma con una velocidad de 250 m/s y atraviesa un cilindro de 15 m de longitud y diámetro 1 m que contiene argón a la presión de 20 atmósferas y a temperatura ambiente de T = 300 K.. Durante su paso por el gas está sometida a una fuerza de frenado

$$F = -\frac{1}{2}\varepsilon\,\rho\,A v^2$$

ε es un coeficiente de valor 0,5 para la esfera, ρ es la densidad del gas, A el área del círculo máximo de una esfera y v la velocidad de la bala.
Se desprecia la acción de la gravedad.
a) Calcular la ecuación que relaciona la velocidad de la bala con el tiempo
b) Determinar el tiempo que emplea la bala en recorrer el cilindro
c) Calcular la pérdida de energía cinética de la bala al travesar el gas y determinar el aumento de su temperatura si la pérdida de energía cinética se transforma íntegramente en calor en el gas.
Datos masa molar del argón M =39,9 g/mol,
Calor específico 312,5 J/(kg K)

Olimpiadas Universidad de Toronto

a) Aplicamos la segunda ley de Newton

$$F = -\frac{1}{2}\varepsilon\rho A v^2 = -k v^2 = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int \frac{-k}{m}dt = \int \frac{dv}{v^2} \Rightarrow -\frac{k}{m}t = -\frac{1}{v} + Cte$$

Cuando t=0 , la velocidad es la inicial v_o.; $Cte = \frac{1}{v_o}$

$$-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_o} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_o} + \frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{m + k v_o t}{m v_o} \Rightarrow v = \frac{m v_o}{m + k v_o t}$$

Calculamos el valor de la densidad del gas a partir de la ecuación de los gases perfectos

$$PV = \frac{g}{M}RT \Rightarrow P = \frac{\rho}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT} = \frac{20\cdot 101325\frac{N}{m^2}\cdot 39{,}9.10^{-3}\frac{kg}{mol}}{8{,}31\frac{J}{mol\,K}\cdot 300K} = 32{,}4\frac{kg}{m^3}$$

Calculamos el valor de k: $k = \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 32{,}4\frac{kg}{m^3}\pi\left(4{,}5.10^{-3}\right)^2 m^2 = 5{,}15.10^{-4}\frac{kg}{m}$

$$v = \frac{2.10^{-3}kg\cdot 250\frac{m}{s}}{2.10^{-3}kg + 5{,}15.10^{-4}\frac{kg}{m}\cdot 250\frac{m}{s}t} = \frac{0{,}5}{2.10^{-3} + 0{,}1288t}\ \frac{m}{s}$$

b) Para calcular el tiempo hacemos uso de la ecuación v= v(t)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{0,5}{2.10^{-3} + 0,1288.t} \Rightarrow \quad \int dx = 0,5\int \frac{1}{2.10^{-3} + 0,1288.t}dt$$

Para resolver la segunda integral hacemos uso del siguiente cambio de variable

$$2.10^{-3} + 0,1288\,t = p \quad \Rightarrow \quad 0,1288\,dt = dp \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dp}{0,1288} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0,5\int \frac{dp}{0,1288\,p} = \frac{0,5}{0,1288} \cdot \ln p = \frac{0,5}{0,1288} \cdot \ln\left(2.10^{-3} + 0,1288\,t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{0,5}{0,1288} \cdot \ln\left(2.10^{-3} + 0,1288\,t\right) + Cte$$

Cuando t=0 , x= 0 m, $Cte = -\frac{0,5}{0,1288} \ln 2.10^{-3} = 24,13$

El tiempo pedido corresponde a que el valor de x sea 15 m

$$15 = \frac{0,5}{0,1288} \ln\left(2.10^{-3} + 0,1288t\right) + 24,13 \Rightarrow 3,864 = \ln\left(2.10^{-3} + 0,1288\,t\right) + 6,22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2,356 = \ln\left(2.10^{-3} + 0,1288\,t\right) \Rightarrow \quad e^{-2,356} = 2.10^{-3} + 0,1288\,t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{0,0948 - 2.10^{-3}}{0,1288} = 0,72\,s$$

c) Calculamos la velocidad que posee la bala después de recorrer los 15 m de longitud

$$v = \frac{m\,v_o}{m + k\,v_o\,t} = \frac{2.10^{-3} \cdot 250}{2.10^{-3} + 5,15.10^{-4} \cdot 250 \cdot 0,72} = 5,3\,\frac{m}{s}$$

La pérdida de energía cinética

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} m\left(5,3^2 - 250^2\right) = -62,5\ J$$

Esta energía pérdida aparece en energía calorífica que hace aumentar la temperatura del gas del cilindro. La masa del gas del cilindro es: $M = \pi \cdot 0,5^2 15 \cdot 32,4 = 381,7\,kg$

$$\Delta T = \frac{62,5\ J}{381,7\,kg \cdot 312,5\,\frac{J}{kgK}} = 5,2.10^{-4}\ K$$

429.-Se tienen n moles de un gas ideal monoatómico de constante γ=5/3 que evoluciona según el ciclo reversible ABCDA de la figura inferior. Entre C y D el gas evoluciona a volumen constante hasta D donde la presión es P_o/k, siendo k una constante $k \geq 10$.El ciclo se cierra por un proceso adiabático entre D y A.

Calcular

a) La temperatura en D.

b) La presión en C y el volumen en D en función de k y el volumen V_A.

c) Los trabajos en los procesos AB y BC.

d) Los trabajos en los procesos CD y DA.

e) Variación de entalpía en el proceso AB

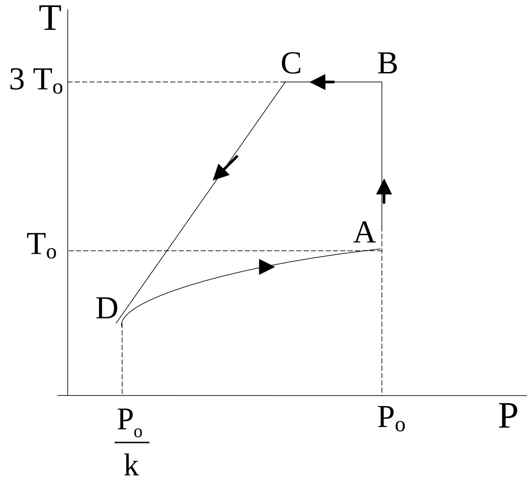
f) Calores implicados en los procesos BC y CD.

g) Variación de entalpía en el ciclo

h) Variación de entropía en el proceso AB.

i) Variación de entropía en los procesos BC y CD

j) Rendimiento de un ciclo de Carnot operando entre las temperaturas T_A y T_C.



Examen propuesto en la Escuela de Ingeniería Aeronáutica de Madrid

a) La ecuación de una adiabática es: $P V^{\gamma} = Cte$ y la de los gases perfectos $PV = n R T$ .Combinado las dos ecuaciones

$$V = \frac{n R T}{P} \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{n R T}{P}\right)^{\gamma} = P^{1-\gamma}\, n^{\gamma}\ R^{\gamma}\ T^{\gamma} = Cte$$

Aplicando la ecuación anterior entre los estados A y D

$$P_o^{1-\gamma}\, n^{\gamma}\ R^{\gamma}\ T_o^{\gamma} = \left(\frac{P_o}{k}\right)^{1-\gamma} n^{\gamma}\, R^{\gamma}\ T_D^{\gamma} \Rightarrow \quad P_o^{1-\gamma}\, T_o^{\gamma} = \frac{P_o^{1-\gamma}}{k^{1-\gamma}} T_D^{\gamma} \Rightarrow \quad T_D = T_o k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_o\, k^{-\frac{2}{5}}$$

b) Aplicamos lay de los gases perfectos entre los estados A y B y a continuación entre B y C

$$\frac{P_o\,V_A}{T_o}=\frac{P_o\,V_B}{3T_o}\;\Rightarrow\;V_B=3V_A\;\;;\;\;\frac{P_o\;3V_A}{3T_o}=\frac{P_C\,V_C}{3T_o}\Rightarrow\;\;P_C\,V_C=3P_o\,V_A$$

Aplicamos lay de los gases perfectos entre los estados C y D

$$\frac{P_C\,V_C}{3T_o}=\frac{\frac{P_o}{k}V_D}{T_D}\;;V_C=V_D\quad\Rightarrow\quad\frac{P_C}{3T_o}=\frac{\frac{P_o}{k}}{T_D}=\frac{\frac{P_o}{k}}{T_o\,k^{-\frac{2}{5}}}\Rightarrow\quad P_C=3P_o k^{-\frac{3}{5}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad V_C=\frac{3P_o\,V_A}{3P_o k^{-\frac{3}{5}}}=k^{\frac{3}{5}}\,V_A$$

Aplicamos lay de los gases perfectos entre los estados D y A.

$$\frac{\frac{P_o}{k}V_D}{T_o k^{-\frac{2}{5}}}=\frac{P_o\,V_A}{T_o}\;\Rightarrow\;\frac{V_D}{k^{\frac{3}{5}}}=V_A\;\Rightarrow\;V_D=k^{\frac{3}{5}}\,V_A$$

Las coordenadas termodinámicas de A, B, C y D son:

$$\mathbf{A}\left(P_o\;,V_A\;,T_o\right)\;;\;\;\mathbf{B}\left(P_o\,,\,3V_A\;,3T_o\right)\;;\;\;\mathbf{C}\left(3P_o\,k^{-\frac{3}{5}}\;,\;V_A\,k^{\frac{3}{5}}\,,\,3T_o\right)\;;$$

$$\mathbf{D}\left(\frac{P_o}{k}\;,\;V_A k^{\frac{3}{5}}\;,\;T_o\,k^{-\frac{2}{5}}\right)$$

c)

$$W_{AB}=P_o\left(V_B-V_A\right)=P_o\left(3V_A-V_A\right)=2P_o\,V_A=2\,n\,R\,T_o$$

$$W_{BC}=\int p\,dV=\int\frac{nR\;3T_o}{V}dV=3\,n\,R\,T_o\cdot\ln V\Big|_{V_B}^{V_C}=3\,n\,R\,T_o\cdot\ln\frac{V_A k^{\frac{3}{5}}}{3V_A}=3\,n\,R\,T_o\ln\left(\frac{k^{\frac{3}{5}}}{3}\right)$$

d)

$$W_{CD}=p\,\Delta V=0$$

$$\Delta U_{DA} = W_{DA} = nC_V\left(T_A - T_D\right) = n\,C_V\left(T_o - T_o k^{-\frac{2}{5}}\right)$$

$$C_p - C_V = R \ ; \ \frac{C_P}{C_V} = \gamma \quad \Rightarrow \ \gamma C_V - C_V = R \ \Rightarrow \ C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{3}{2}R \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad W_{DA} == n\frac{R}{\gamma-1}\left(T_o - T_o k^{-\frac{2}{5}}\right) = \frac{3}{2}n\,R\,T_o\left(1 - k^{-\frac{2}{5}}\right)$$

e)

$$\Delta H_{AB} = n\,C_P\left(T_B - T_A\right) = n\,C_P\left(3T_o - T_o\right)$$

$$C_P - C_V = R \ ; \ \frac{C_P}{C_V} = \gamma \quad \Rightarrow \ C_P - \frac{C_P}{\gamma} = R \ \Rightarrow \ C_P = \frac{R}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} = \frac{5}{2}R$$

$$\Delta H_{AB} = n\frac{5}{2}R \cdot 2T_o = 5\,n\,R\,T_o$$

f)

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} + W_{BC} \Rightarrow 0 = Q_{BC} + W_{BC} \Rightarrow Q_{BC} = -W_{BC} = -3\,n\,R\,T_o \ln\left(\frac{k^{\frac{3}{5}}}{3}\right)$$

El calor entre los estados B y C es negativo, esto significa que es evacuado desde el sistema hacia el exterior.

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} + W_{CD} \Rightarrow \Delta U_{CD} = Q_{CD} = n\,C_V\left(T_D - T_C\right) = n\frac{R}{\gamma - 1}\left(T_o k^{-\frac{2}{5}} - 3T_o\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad Q_{CD} = \frac{3}{2}n\,R\,T_o\left(k^{-\frac{2}{3}} - 3\right)$$

Q_{CD} es negativo ya que el término del paréntesis es negativo para $k \geq 10$, por consiguiente el sistema cede calor al medio.

g) La entalpía es función de estado lo que implica que sus valores solo dependen del estado de partida y el de llegada y es independiente del modo en que realice la transformación, como es un ciclo y el punto de partida es igual al de llegada la variación de entalpía es cero.

h) La variación de entropía entre dos estados 1 y 2 está dada por la ecuación:

$$\Delta S = n\,C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + n\,R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Aplicamos la ecuación anterior a los estados AB

$$\Delta S_{AB} = n\,C_V \ln\frac{T_B}{T_A} + n\,R\ln\frac{V_B}{V_A} = n\frac{3}{2}R\ln\frac{3T_o}{T_o} + n\,R\ \ln\frac{3\,V_A}{V_A} = \frac{5}{2}n\,R\ \ln 3$$

i)

$$\Delta S_{BC} = n\,C_V \ln\frac{T_B}{T_C} + n\,R\ln\frac{V_B}{V_C} = n\frac{3}{2}R\ln 1 + n\,R\ \ln\frac{3\,V_A}{V_A k^{\frac{3}{5}}} = n\,R\ \ln 3k^{-\frac{3}{5}}$$

$$\Delta S_{CD} = n\,C_V\ \ln\frac{T_D}{T_C} + n\,R\ln\frac{V_D}{V_C} = n\frac{3}{2}R\ln\frac{T_o k^{-\frac{2}{5}}}{3T_o} + n\,R\ \ln\ 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Delta S_{CD} = \frac{3}{2}n\,R\ln\frac{k^{-\frac{2}{5}}}{3}$$

j) El foco caliente T_C=3$T_{o;}$ el foco frio T_A= To

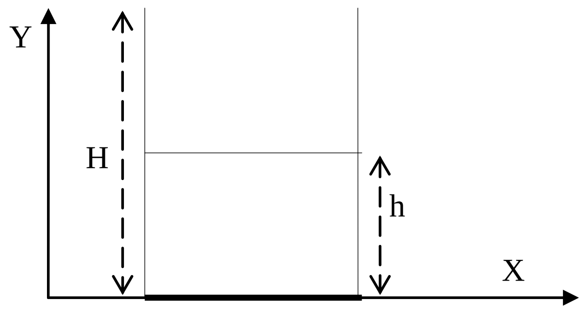
$$\eta = \frac{3T_o - T_o}{3T_o} = \frac{2}{3}$$

430.- Un vaso de forma cilíndrica tiene una masa total M, distribuida $\frac{M}{4}$ en su base y el resto por las paredes. Se pide para qué altura de agua añadida al vaso el centro de masas ocupa la posición más baja.

Calcular su valor numérico si M= 200 gramos; radio R = 6 cm y altura H =20 cm

Dato. Densidad del agua ρ= 10^3 kg/m^3

En la figura h es la altura que alcanza el agua en el vaso.



Calculamos primero la posición del centro de masas del vaso sin agua, suponiendo que el espesor de la base del vaso es prácticamente cero.

$$y_V = \frac{\frac{M}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}M\cdot\frac{H}{2}}{M} = \frac{3}{8}H$$

Calculamos la posición del centro de masas del vaso con agua hasta una altura h

$$y_S = \frac{M\cdot\frac{3}{8}H + M_{agua}\cdot\frac{h}{2}}{M + M_{agua}} = \frac{M\cdot\frac{3}{8}H + \pi R^2 h\rho\cdot\frac{h}{2}}{M + \pi R^2 h\rho} = \frac{M\cdot\frac{3}{4}H + \pi R^2\rho h^2\cdot}{2M + 2\pi R^2 h\rho}$$

Para hallar el valor de h mínimo derivamos la anterior ecuación e igualamos a cero

$$\frac{dy_S}{dh} = \frac{\left(2M + 2\pi R^2\rho h\right)\cdot\left(2\pi R^2\rho h\right) - \left(M\frac{3}{4}H + \pi R^2\rho h^2\right)\cdot\left(2\pi R^2\rho\right)}{\left(2M + 2\pi R^2\rho h\right)^2} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2Mh + 2\pi R^2\rho h^2 - M\frac{3}{4}H - \pi R^2\rho h^2 = 0 \;\Rightarrow\; \pi R^2\rho h^2 + 2Mh - M\frac{3}{4}H = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$h = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 3\pi R^2 \rho M H}}{2\pi R^2 \rho} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ solución válida : } \quad h = \frac{-2M + \sqrt{4M^2 + 3\pi R^2 \rho M H}}{2\pi R^2 \rho}$$

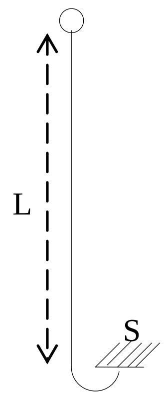
Sustituyendo los valores numéricos

$$h_{min} = \frac{-2 \cdot 0{,}2 + \sqrt{4 \cdot 0{,}2^2 + 3\pi \left(6.10^{-2}\right)^2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2}}{2\pi \left(6.10^{-2}\right)^2 \cdot 10^3} = 0{,}037\,\text{m} = 3{,}7\,\text{cm}$$

431.- Una cuerda uniforme, inextensible y rígida de masa M y longitud L está en reposo en la posición indicada en la figura ya que está sostenida por el extremo superior. El extremo inferior esta fijo a un soporte S. La longitud del bucle inferior se considera despreciable frente a la longitud L de la cuerda. Se deja en libertad la cuerda sin velocidad inicial.

a) Se pide la fuerza que el soporte S ejerce sobre la cuerda en función del tiempo.

b) El tiempo que emplea la cuerda desde el inicio del movimiento hasta que su extremo superior alcanza la posición más baja.



a) En la figura 1 se representa las posiciones de la cuerda en función del tiempo. Como el bucle tiene longitud despreciable frente a L, en la figura 1 aparece dibujado en forma discontinua.

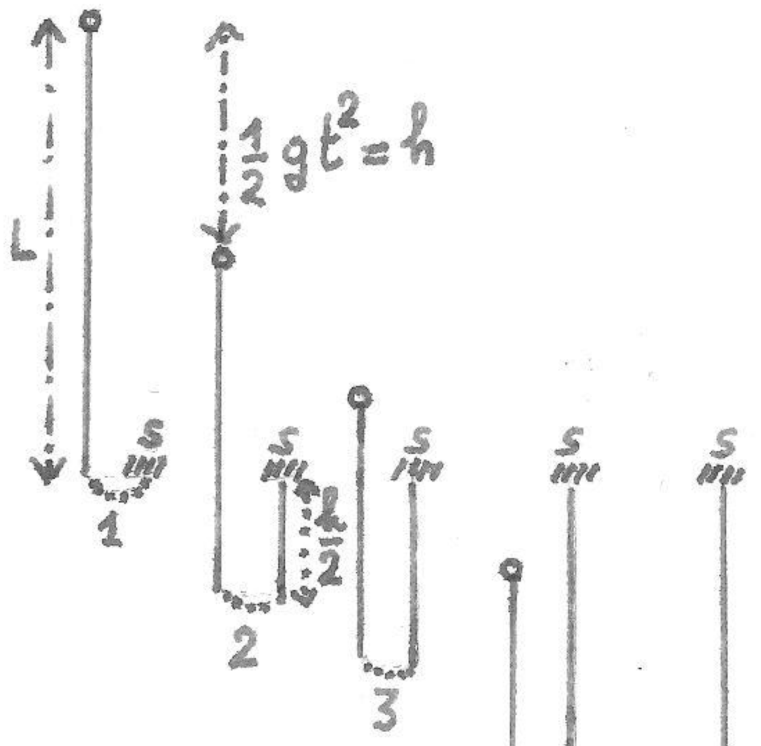


Fig.1

En ausencia de rozamiento entre las posiciones señaladas con 1 y 2 el extremo superior de la cuerda se ha desplazado una altura $h = \frac{1}{2}gt^2$, siendo t el tiempo empleado por la cuerda en ese desplazamiento. Colgando del lado del soporte S, la longitud es $\frac{h}{2} = \frac{1}{4}g\,t^2$, En ese instante el soporte tira de la cuerda que cuelga con una fuerza N, vertical y hacia arriba. Vertical y hacia abajo actúa el peso de la cuerda.

En el instante representado por el número 2 en la figura 1 la cuerda de la izquierda cuya longitud es $L - \frac{h}{2} = L - \frac{1}{4}g\,t^2$h tiene una velocidad v=gt, vertical y hacia abajo, el trozo de cuerda de longitud h/2 está en reposo.

El sistema en el tiempo t=0 tiene una cantidad de movimiento nula y en el tiempo t ha adquirido una cantidad de movimiento cuyo módulo vale

$$p = mv = \frac{M}{L}(L - \frac{1}{4}g\,t^2)\cdot g\,t$$

De acuerdo con la Dinámica clásica

$$\sum F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow Mg - N = \frac{d}{dt}\left[M\,g\,t - \frac{1}{4}\frac{M}{L}g^2t^3\right] = Mg - \frac{1}{4}\frac{M}{L}g^2\cdot 3\,t^2 \quad \Rightarrow$$

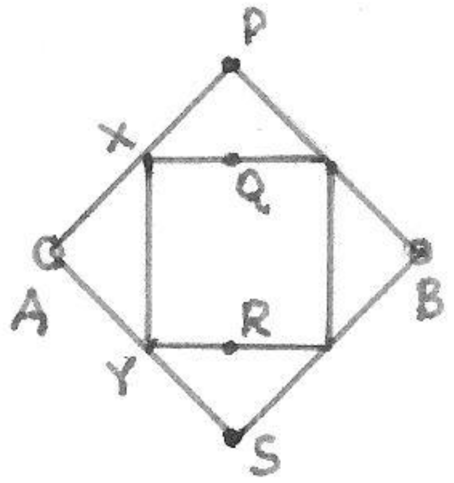
$$\Rightarrow \qquad N = \frac{3}{4}\frac{M\,g^2t^2}{L} \quad (1)$$

b) De la observación de la figura 1 se deduce que el extremo superior de la cuerda se desplaza como máximo hacia abajo una longitud 2L.

$$2L = \frac{1}{2}g\,t_M^2 \quad \Rightarrow \quad t_M = \sqrt{\frac{4L}{g}}$$

La ecuación (1) tiene validez desde t =0 a t=$t_{M..}$ Justamente después de la llegada del extremo de la cuerda la velocidad se anula en muy poco tiempo por lo que N debe sufrir una percusión y por tanto un valor muy elevado y cuando todo quede en reposo N será igual al peso de la cuerda.

432.- Con alambre del mismo grosor y la misma resistividad eléctrica se construye el dispositivo indicado en la figura.



La resistencia es proporcional a la longitud y el lado AP=L tiene una resistencia R. AX=AY=L/2. APBS es un cuadrado y dentro de él está inscrito otro. Calcular en función de R la resistencia eléctrica entre A y B.

Si en la figura del enunciado trazamos una línea vertical que pase por PQRS se observa que la mitad a la izquierda de esa línea es igual a la mitad derecha, por consiguiente, se trata de un circuito con simetría. Los puntos P,Q,R,S se encuentran al mismo potencial Nos basta con calcular la resistencia del lado izquierdo.

La resistencia de AX=AY=XP=YS= R/2.

La longitud de XY vale: $\sqrt{AX^2+AY^2} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$ y su resistencia $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

La resistencia de XQ=YR es: $\frac{R}{2\sqrt{2}}$.

Establezcamos el circuito de una manera más clara, para ello consideramos cuatro puntos A, X ,Y y el que abarca a P, Q, R y S por estar los cuatro puntos al mismo ‘potencial. Luego vamos de cada punto al que se conecta anotando la resistencia encontrada en el camino, el resultado es la figura 1.

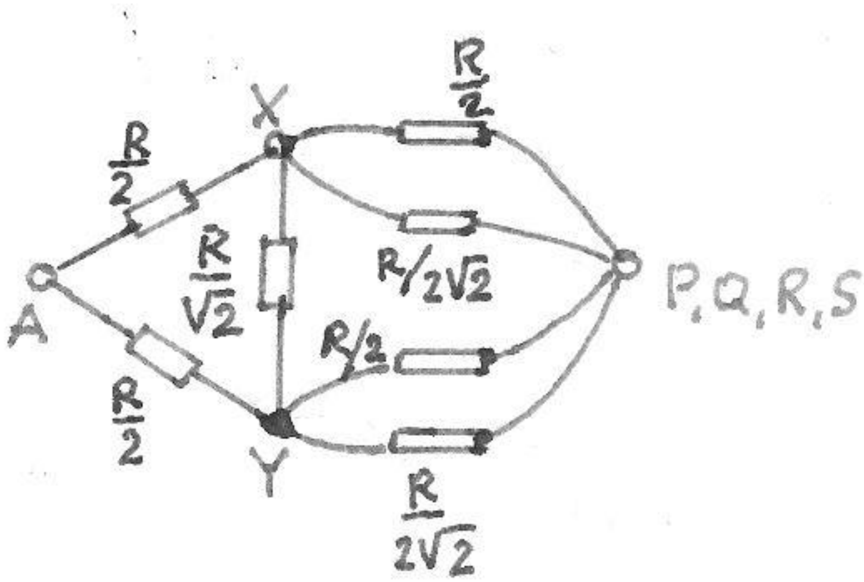


Fig 1

Las resistencias entre X y PQRS están en paralelo y lo mismo sucede entre Y y PQRS. Las sustituimos por una sola resistencia en cada tramo.

$$\frac{1}{R_E} = \frac{2}{R} + \frac{2\sqrt{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

El circuito de la figura 1 queda como el de la figura 2.

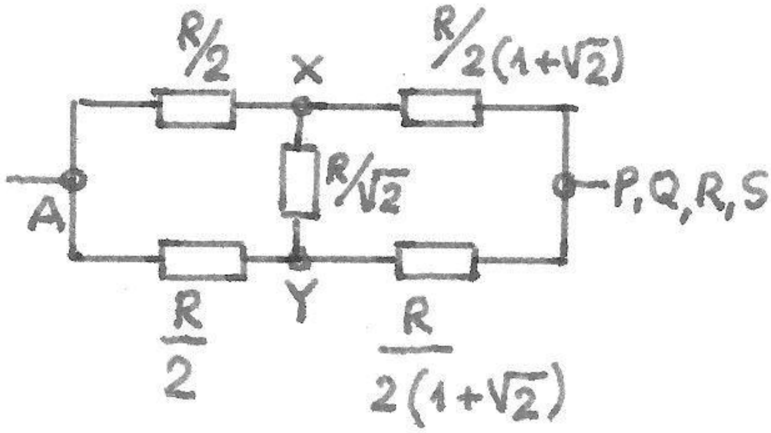


Fig.2

Los puntos X y el Y se encuentran al mismo potencial. Supongamos que por A llega una corriente I, esta se bifurca en dos cada una de valor I/2

$$V_A - V_X = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} \ ; \ V_A - V_Y = \frac{I}{2}\cdot\frac{R}{2} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_X = V_A - V_Y \quad \Rightarrow \quad V_X = V_Y$$

Al ser los potenciales de X e Y iguales por la resistencia $\frac{R}{\sqrt{2}}$ no pasa corriente y por ello es como si hubiese no estuviese (figura3).

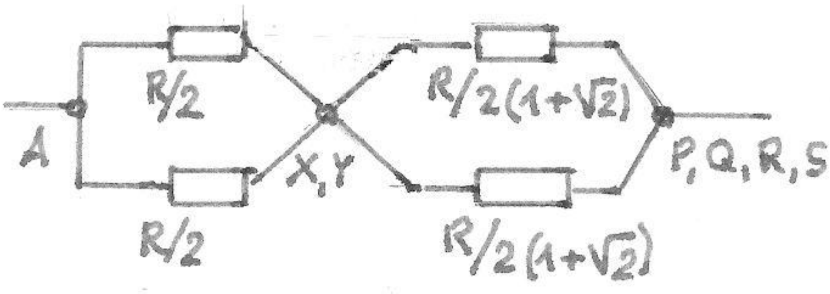


Fig.3

Entre A y X, y entre A e Y hay dos resistencias en paralelo y entre X,Y y P,Q,R.S otras dos en paralelo

$$\frac{1}{R_E} = \frac{2}{R} + \frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R}{4} \quad ;$$

$$\frac{1}{R_E} = \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{R} + \frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)}{R} = \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{R} \quad \Rightarrow \quad R_E = \frac{R}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

El circuito es el de la figura 4 con dos resistencias en serie.

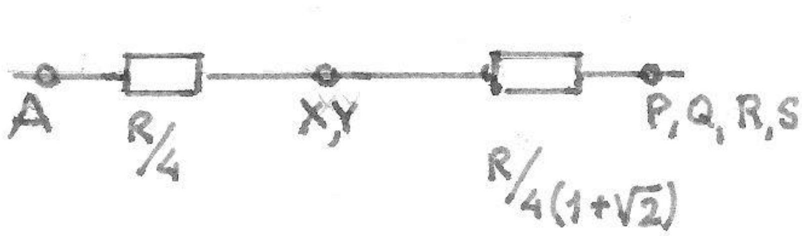


Fig.4

La resistencia es la suma de las dos

$$R_E = \frac{R}{4} + \frac{R}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{R\left(1+\sqrt{2}\right)+R}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}$$

Hasta ahora solo hemos calculado la mitad del circuito del problema, la resistencia total es la suma

$$R_t = \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} + \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{R\left(2+\sqrt{2}\right)}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}$$