PROBLEMAS VARIADOS 2-2017

398.- Por un plano inclinado, de ángulo α, sube un cuerpo de masa m con velocidad constante y por la línea de máxima pendiente, al que se le aplica una fuerza F ascendente que forma un ángulo β con el plano. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo es μ.

a) Determinar el ángulo β para el cual la fuerza F sea mínima.

b) Si α = 60º determinar los valores del coeficiente de rozamiento μ en que es posible aplicar esa fuerza del apartado anterior sin que el cuerpo se separe del plano inclinado.

c) Obtener el valor de F y representar el cociente F/mg para α =60º en función del coeficiente de rozamiento.

Nota. Los apartados b) y c) deben realizarse empleando una hoja de cálculo.

a) En la figura 1 se han representado las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m.

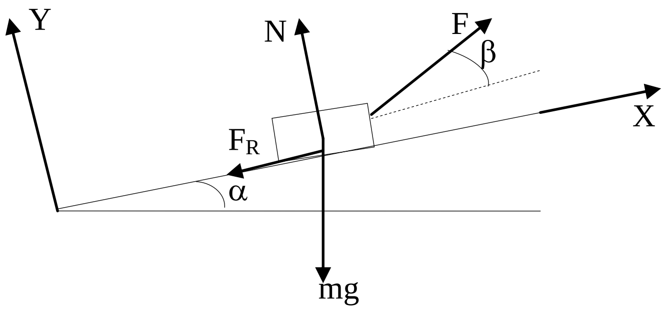


Fig.1

Al subir el cuerpo con movimiento uniforme se cumple

$$\sum F_X = F\cos\beta - F_R - m\,g\,\text{sen}\alpha = 0 \;;\; \sum F_Y = F\,\text{sen}\,\beta + N - m\,g\cos\alpha = 0$$

Despejando N de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera y teniendo en cuenta que $F_R = \mu\, N$

$$F\cos\beta - \mu\left(m\,g\cos\alpha - F\,\text{sen}\,\beta\right) - m\,g\,\text{sen}\,\alpha = 0 \Rightarrow F\left(\cos\beta + \mu\,\text{sen}\,\beta\right) = m\,g\left(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{m\,g\left(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha\right)}{\cos\beta + \mu\,\text{sen}\,\beta}$$

Para calcular el mínimo de la fuerza F, derivamos F con respecto a β e igualamos a cero

$$\frac{dF}{d\beta} = mg\left(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha\right)\cdot\frac{-\left(-\text{sen}\,\beta + \mu\cos\beta\right)}{\left(\cos\beta + \mu\,\text{sen}\,\beta\right)^2} = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \mu\cos\beta \Rightarrow \quad \text{tag}\,\beta = \mu$$

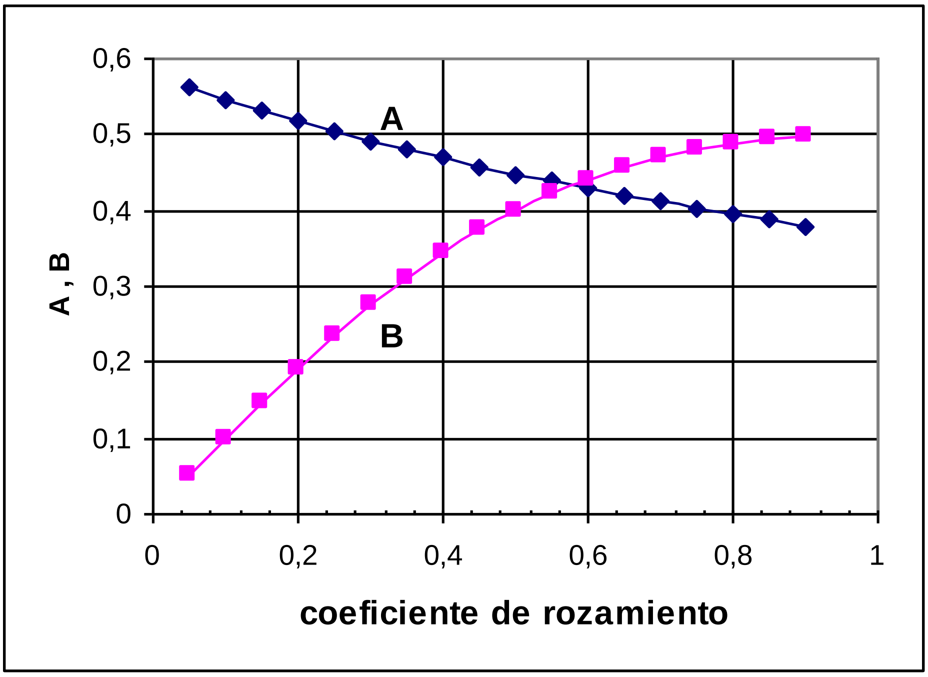
Si el cuerpo, de masa m, ha de estar sobre el plano se tiene que cumplir que N>0, lo

$$mg\cos\alpha > F\,\text{sen}\,\beta\ ;\ \Rightarrow\ \ mg\cos\alpha > \frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\beta+\mu\,\text{sen}\,\beta}\,\text{sen}\,\beta\ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha > \frac{\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\beta+\mu\,\text{sen}\,\beta}\,\text{sen}\,\beta\ \Rightarrow\ \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha} > \frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta+\mu\,\text{sen}\,\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha} > \frac{\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{1+\mu\dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta}} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha} > \frac{\text{tag}\,\beta}{1+\mu\,\text{tag}\,\beta} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha} > \frac{\mu}{1+\mu^2}$$

Aplicamos la ecuación anterior cuando α = 60º y hacemos la representación de los dos miembros de la inecuación, dando valores al coeficiente de rozamiento. A es el primer miembro de la inecuación y B el segundo miembro.



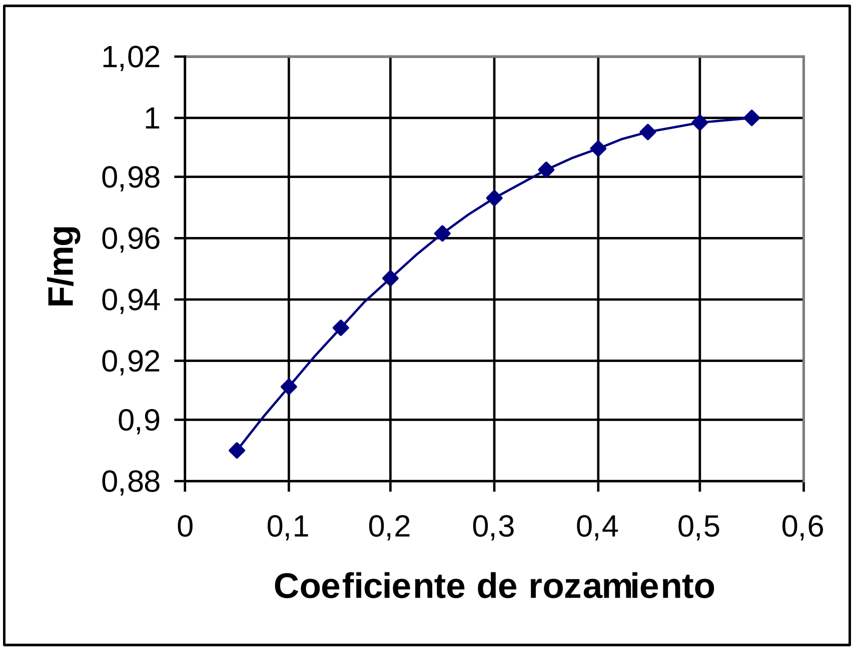
Si el coeficiente de rozamiento está por debajo de 0,59 es posible el movimiento y el cuerpo m permanece sobre el plano, si μ es mayor el cuerpo se separa del plano.

c)

$$F=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\beta+\mu\,\text{sen}\,\beta}\ ;\ \ \text{tag}\beta=\mu\Rightarrow\ \ \frac{1}{\cos^2\beta}=1+\text{tag}^2\beta=1+\mu^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\mu^2}}+\mu\sqrt{1-\cos^2\beta}}=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\mu^2}}+\mu\sqrt{1-\dfrac{1}{1+\mu^2}}}=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\sqrt{\dfrac{1}{1+\mu^2}}+\mu\sqrt{\dfrac{\mu^2}{1+\mu^2}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}+\dfrac{\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}}=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\dfrac{1+\mu^2}{\sqrt{1+\mu^2}}}=\frac{m\,g(\text{sen}\,\alpha+\mu\cos\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$$



399.- Sobre un espejo plano de masa m_o incide perpendicularmente un haz de rayos láser, siendo E_i la energía de los fotones del haz. Determinar
a) La velocidad que adquiere el espejo
b) La energía que se refleja en él.

a) El espejo recibe el haz y parte lo refleja en sentido contrario a la marcha del haz incidente y el espejo adquiere una velocidad en el sentido del movimiento del haz incidente.

Hacemos un balance de energía, designando a la energía del haz reflejado como E_r, c, a la velocidad de la luz y v, a la del espejo. La energía inicial de la luz más la energía en reposo del espejo es igual a la energía reflejada más la energía total del espejo

$$E_i + m_o c^2 = E_r + mc^2 = E_r + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento recordando que $p = \frac{E\,v}{c^2}$

$$\frac{E_i}{c} = -\frac{E_r}{c} + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2} \Rightarrow \frac{E_i}{c} = -\frac{E_r}{c} + \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E_r = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_i \quad (2)$$

El signo menos que aparece en el momento del rayo reflejado es porque camina en sentido contrario al haz incidente. Sustituimos (2) en (1).

$$E_i + m_o c^2 = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_i = \frac{m_o c(v+c)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_i = \frac{m_o c^2 (v+c)}{\sqrt{c^2 - v^2}} - E_i \Rightarrow$$

$$E_i + m_o c^2 = \frac{m_o c^2 (v+c)}{\sqrt{(c+v)(c-v)}} - E_i \qquad \Rightarrow \quad 2E_i + m_o c^2 = m_o c^2 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2E_i}{m_o c^2} + 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow \left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow c\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 - v\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 = c + v \Rightarrow$$

$$c\left[\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 - 1\right] = v\left[\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 + 1\right] \Rightarrow \qquad v = c\,\frac{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 + 1} \qquad (3)$$

b) A partir de la ecuación (2)

$$E_r + E_i = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_r + E_i}{vc} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Sustituimos en la ecuación (1)

$$E_i + m_o c^2 = E_r + c^2 \frac{E_r + E_i}{vc} \Rightarrow E_i + m_o c^2 - E_r = \frac{c}{v}(E_r + E_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{E_r + E_i}{E_i + m_o c^2 - E_r} \; (4)$$

A partir de las ecuaciones (3) y (4)

$$\frac{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 - 1}{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 + 1} = \frac{E_r + E_i}{E_i + m_o c^2 - E_r}$$

Para operar de manera más cómoda hacemos: $\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2 = K$

$$\frac{E_r + E_i}{E_i + m_o c^2 - E_r} = \frac{K-1}{K+1} \Rightarrow E_r K + E_r + E_i K + E_i = E_i K - E_i - E_r K + E_r + m_o c^2 (K-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_r K + E_i = -E_i - E_r K + m_o c^2 (K-1) \Rightarrow \quad 2 E_r K = m_o c^2 (K-1) - 2E_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{m_o c^2 (K-1) - 2E_i}{2K} = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2}{2K} - \frac{E_i}{K} = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2 + 2E_i}{2K}$$

Sustituimos el valor de K

$$E_r = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2 + 2E_i}{2\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2} = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2 + 2E_i}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)^2} \cdot \left(m_o c^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{\left(m_o c^2\right)^2}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)} = \frac{\left(m_o c^2\right) \cdot \left(2E_i + m_o c^2\right) - \left(m_o c^2\right)^2}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)} = \frac{2E_i \cdot m_o c^2}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{E_i}{1 + \frac{2E_i}{m_o c^2}} \quad (5)$$

Si $E_i >> m_o c^2 \Rightarrow E_r = \frac{m_o c^2}{2}$; Si $E_i << m_o c^2 \Rightarrow E_r \approx E_i$

400.- En un cilindro de paredes rígidas existe un pistón móvil sin rozamiento de masa m=10 kg, el cual está situado a la mitad de su altura. En la parte inferior existen n=2 moles de gas helio (considerado gas ideal) a la temperatura de 300 K. El pistón esta unido a un muelle, en posición vertical, de constante elástica k, este muelle se encuentra unido a la base superior del cilindro y con su longitud natural (ni estirado ni comprimido). Ver la figura 1. La sección circular del pistón tiene un área A = 500 cm^2.

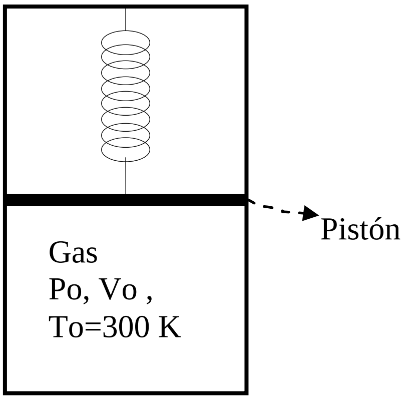


Fig.1

Se desprecian los calores específicos del pistón, cilindro y muelle, y la masa del muelle.

a) Calcular la frecuencia f de las pequeñas oscilaciones del pistón cuando éste se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio.

b) Luego el pistón se empuja hacia abajo hasta que el volumen del gas se reduce a la mitad, y a continuación se suelta el pistón sin velocidad inicial. Determinar el volumen del gas cuando la velocidad del pistón es: $v = \sqrt{\frac{4gV_o}{5A}}$.

Todos los procesos son adiabáticos.

Datos. g= 9,8 m/s^2 ; $k = \frac{mgA}{V_o}$; $R = 8{,}314\frac{J}{mol\,K}$; $\gamma = \frac{5}{3}$

Propuesto en las Olimpiadas de Asia.

a) En la posición inicial el gas ejerce sobre el pistón una fuerza vertical y hacia arriba que es igual al peso del pistón que es una fuerza vertical y hacia abajo, luego

$$P_oA = mg \;\Rightarrow\; P_0 = \frac{mg}{A} = \frac{10{\cdot},9{,}8}{500.10^{-4}} = 1960\,\mathrm{Pa}$$

Supongamos que el pistón se desplaza hacia abajo una distancia pequeña que designamos con x. El gas cambia a una presión P_1, a un volumen V_1 y a una temperatura T_1; como este proceso se considera adiabático podemos escribir.

$$P_oV_o^{\gamma} = P_1V_1^{\gamma}...; \quad V_1 = V_o - Ax \quad \Rightarrow \quad P_oV_o^{\gamma} = P_1(V_o - Ax)^{\gamma} \;\Rightarrow\; P_1 = \frac{P_oV_o^{\gamma}}{(V_o - Ax)^{\gamma}}$$

Ahora sobre el pistón actúan: vertical y hacia arriba la fuerza que ejerce el gas , en la misma dirección y sentido la fuerza con que el muelle tira del pistón y hacia abajo el peso del mismo, estas fuerzas dan lugar a una aceleración hacia arriba del pistón, esto es, llevándolo a su posición inicial.

$$\frac{P_o V_o^\gamma}{(V_o - Ax)^\gamma} \cdot A + kx - mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_o V_o^\gamma}{(V_o - Ax)^\gamma} \cdot A + \frac{m g A}{V_o} x - mg = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

(Se ha sustituido k por el dato del problema)

Teniendo en cuenta que x es un valor pequeño, hacemos la siguiente aproximación

$$\frac{P_o V_o^\gamma}{(V_o - Ax)^\gamma} = \frac{P_o}{\left(1 - \frac{Ax}{V_o}\right)^\gamma} \approx P_o\left(1 + \gamma\frac{A x}{V_o}\right) \Rightarrow P_o\left(1 + \gamma\frac{A x}{V_o}\right)A + \frac{m g A}{V_o} x - mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_o\left(1 + \gamma\frac{A x}{V_o}\right)A + \frac{m g A}{V_o} x - P_o A = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow P_o \gamma\frac{A^2 x}{V_o} + \frac{m g A}{V_o} x = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(P_o \gamma\frac{A^2}{V_o} + \frac{m g A}{V_o}\right) \cdot x = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow\Rightarrow \left(P_o \gamma\frac{\left(\frac{mg}{P_o}\right)^2}{V_o} + \frac{m g \frac{m g}{P_o}}{V_o}\right) \cdot x = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 g^2\left(\frac{1+\gamma}{P_o V_o}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow mg^2\left(\frac{1+\gamma}{n R T_o}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{mg^2\left(\frac{1+\gamma}{n R T_o}\right)}$$

Sustituyendo valores numéricos

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{10 \cdot 9{,}8^2\left(\frac{1 + \frac{5}{3}}{2 \cdot 8{,}314 \cdot 300}\right)} = 0{,}114\,\mathrm{Hz}$$

b) En la figura 2 se indican los tres estados por los que pasa el sistema. Hacemos un balance de energías, teniendo en cuenta que los procesos de cambio son adiabáticos tal como indica el enunciado del problema

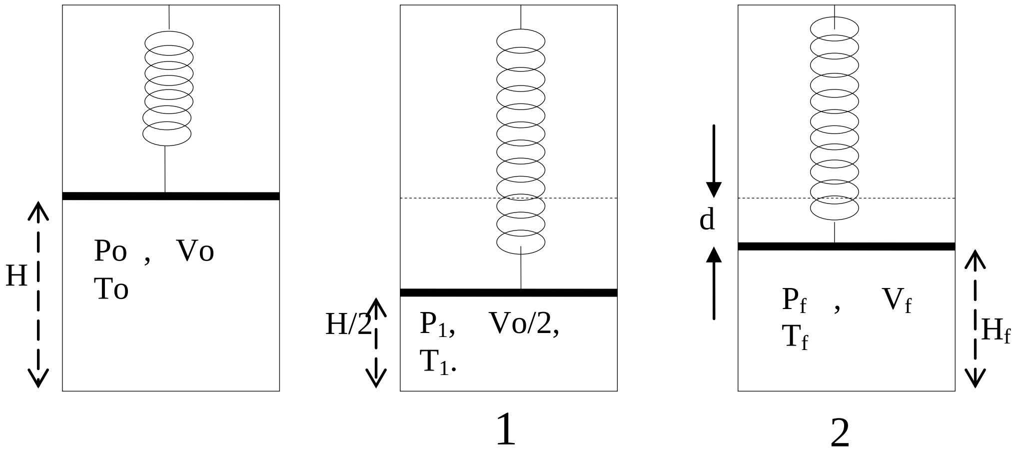


Fig. 2

Estado 1

Energía potencial del pistón: $mg\frac{H}{2}$, como $AH = V_o \Rightarrow mg\frac{V_o}{2A}$

Energía elástica del muelle: $\frac{1}{2}k\left(\frac{H}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{2A}\right)^2$

Energía interna del gas: U_1

Estado 2

Energía potencial del pistón: mgH_f, como $AH_f = V_f \Rightarrow mg\frac{V_f}{A}$

Energía elástica del muelle: $\frac{1}{2}kd^2$, como $H_f + d = H \Rightarrow \frac{1}{2}k(H - H_f)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)$

Energía interna del gas: U_2

Energía cinética del pistón: $\frac{1}{2}mv^2$

$$mg\frac{V_o}{2A} + \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{2A}\right)^2 + U_1 = mg\frac{V_f}{A} + \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 + U_2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$mg\frac{V_o}{2A} + \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{2A}\right)^2 = mg\frac{V_f}{A} + \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 + (U_2 - U_1) + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

Veamos el valor de U_2-U_1

$$U_2 - U_1 = nC_v(T_f - T_1)$$

Entre el estado inicial y el estado 1 podemos escribir

$$P_oV_o = nRT_o \;\; ; \; P_1\frac{V_o}{2}nRT_1 \;\Rightarrow\; \frac{P_oV_o}{P_1\frac{V_o}{2}} = \frac{T_o}{T_1} \;\Rightarrow\; \frac{2P_o}{P_1} = \frac{T_o}{T_1} \;\Rightarrow\; T_1 = \frac{P_1T_o}{2P_o}$$

$$P_oV_o^{\gamma} = P_1\left(\frac{V_o}{2}\right)^{\gamma} \;\Rightarrow\; P_1 = 2^{\gamma}P_o \qquad T_1 = \frac{2^{\gamma-1}P_oT_o}{P_o} = 2^{\gamma-1}T_o$$

Entre el estado el estado 1 y el estado 2, podemos escribir

$$P_fV_f = nRT_f \;\Rightarrow\; T_f = \frac{P_fV_f}{nR} \;\; ; \;\; \frac{P_1V_1^{\gamma}}{V_f^{\gamma}} = P_f \;\Rightarrow T_f = \frac{\frac{P_1V_1^{\gamma}}{V_f^{\gamma}}V_f}{nR} = \frac{P_1\left(\frac{V_o}{2}\right)^{\gamma}V_f^{1-\gamma}}{nR}$$

La diferencia de energías internas es:

$$U_2 - U_1 = nC_v\left[\frac{P_1\left(\frac{V_o}{2}\right)^{\gamma}V_f^{1-\gamma}}{nR} - 2^{\gamma-1}T\right]_o$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$mg\frac{V_0}{2A} + \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{2A}\right)^2 = mg\frac{V_f}{A} + \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 + nCv\left[\frac{P_1\left(\frac{V_o}{2}\right)^{\gamma}V_f^{1-\gamma}}{nR} - 2^{\gamma-1}T_o\right] + \frac{1}{2}mv^2$$

Vamos a sustituir valores numéricos en la ecuación anterior

$$V_o = \frac{nRT_o}{P_o} = \frac{2\cdot 8{,}314\cdot 300}{1960} = 2{,}545\,m^3 \;\; ; \;\; k = \frac{mgA}{V_o} = \frac{10\cdot 9{,}8\cdot 500.10^{-4}}{2{,}545} = 1{,}925\,\frac{N}{m}$$

$$P_1 = 2^{\gamma}P_0 = 2^{\frac{5}{3}}\cdot 1960 = 6222{,}6 \text{ Pa} \qquad mg\frac{V_0}{2A} = 10\cdot 9{,}8\frac{2{,}545}{2\cdot 500.10^{-4}} = 2494{,}1 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{2A}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}925\left(\frac{2{,}545}{2\cdot 500.10^{-4}}\right)^2 = 623{,}4 \text{ J}$$

$$mg\frac{V_f}{A} = \frac{10\cdot 9{,}8}{500.10^{-4}}V_f = 1960\,V_f\;; \qquad \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1{,}925}{\left(500.10^{-4}\right)^2}\left(2{,}545 - V_f\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}k\left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 = 385\,\left(2{,}545 - V_f\right)^2$$

$$n\,Cv\left[\frac{P_1\left(\frac{V_o}{2}\right)^{\gamma}V_f^{1-\gamma}}{nR}-2^{\gamma-1}\,T_o\right]=n\,Cv\left[\frac{6222{,}6\cdot\left(\frac{2{,}545}{2}\right)^{\frac{5}{3}}}{2\cdot 8{,}314}V_f^{1-\gamma}-2^{\frac{2}{3}}\cdot 300\right]=$$

$$=2\cdot\frac{3}{2}\cdot 8{,}314\left(559{,}2\ V_f^{1-\gamma}-476{,}2\right)\Rightarrow 13947{,}6\,V_f^{1-\gamma}-11877{,}4$$

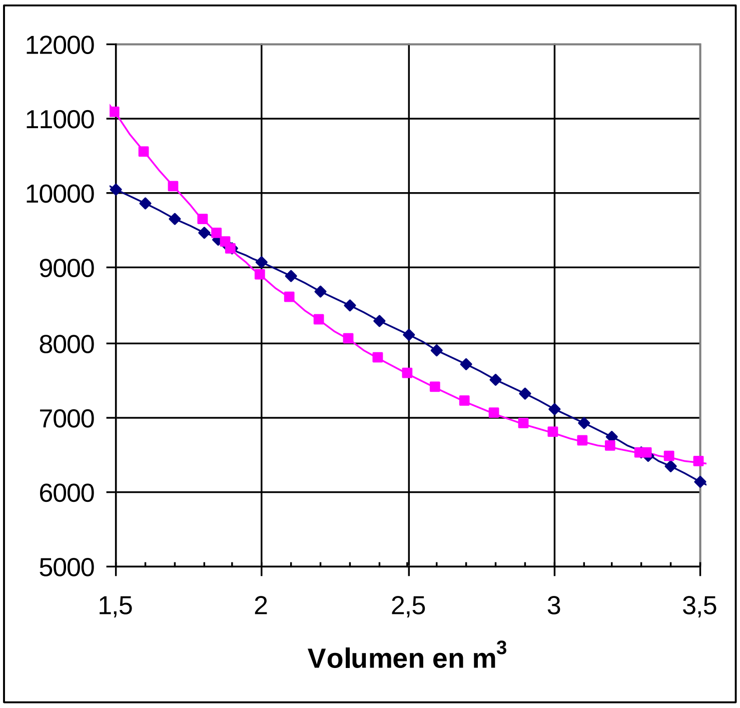
$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{4gV_o}{5A}=\frac{10\cdot 2\cdot 9{,}8\cdot 2{,}545}{5\cdot 500.10^{-4}}=1995{,}3\,J$$

La ecuación escrita con sus valores numéricos es:

$$2494{,}1+623{,}4=1960\,V_f+385(2{,}545-V_f)^2+13947{,}6\,V_f^{-\frac{2}{3}}-11877{,}4+1995{,}3\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 12999{,}6-1960\,V_f=385(2{,}545-V_f)^2+13947{,}6\,V_f^{-\frac{2}{3}}$$

La ecuación anterior hay que resolverla por tanteo. Lo mejor es representar los dos miembros de la ecuación en una sola gráfica, como el primer miembro es una recta cortará a la representación del segundo miembro que es una curva y en ese punto o puntos de corte está la solución.



Hay dos soluciones una a 1,88 m^3 y otra a 3,32 m^3

401.- En la figura 1, OA es un péndulo simple de longitud d. La esfera de su extremo que se considera puntual tiene una masa m y una carga +q El hilo que sostiene la esfera carece de masa y es no conductor.
A una distancia d de la posición más baja del péndulo (B en la figura), está situada una carga –q, que no se puede desplazar.
a) Se pide la tensión de la cuerda cuando la esfera pase por la parte inferior, después de salir de su posición inicial sin velocidad.
b) Determinar el valor máximo de q para el que puede verificarse el movimiento pendular. Realizar el cálculo numérico si $m=10^{-3}$ kg , d= 1 m y el ángulo inicial del péndulo es $\theta = 45^o$

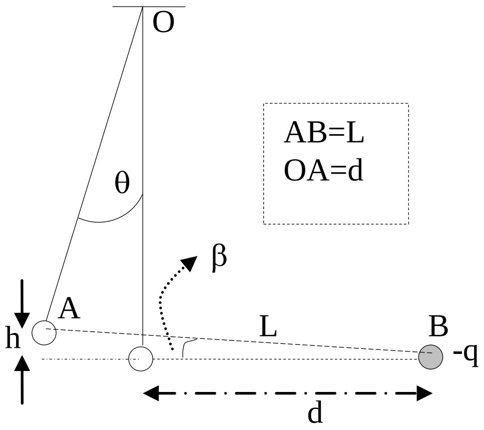


Fig.1

a) Consideramos la posición más baja de la esfera como altura cero para evaluar la energía potencial de la esfera.
La esfera inicialmente tiene una energía potencial gravitatoria y una energía potencial eléctrica. En su posición más baja, su energía potencial gravitatoria es nula, tiene energía cinética y potencial eléctrica.
Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$mgh - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L} = \frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d} \quad (1)$$

Calculamos h y L en función de θ y d.

$$h = d - d\cos\theta = d(1-\cos\theta)$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{L} \Rightarrow L = \frac{d(1-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\beta}$$

$$\operatorname{tag}\beta = \frac{h}{d + d\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{(1-\cos\theta)}{1+\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \quad \frac{1-\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta} = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} + 1 = \frac{(1+\operatorname{sen}\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\operatorname{sen}\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2}}$$

Sustituyendo en (1)

$$m\,g\,d(1-\cos\theta) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2 \operatorname{sen}\beta}{d(1-\cos\theta)} = \frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d} \Rightarrow$$

$$m\,g\,d(1-\cos\theta) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2(1-\cos\theta)}{d(1-\cos\theta)\left[\sqrt{(1+\operatorname{sen}\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}\right]} = \frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d} \Rightarrow$$

$$v^2 = 2\,g\,d(1-\cos\theta) - \frac{1}{2\,m\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d}\left[\frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}} - 1\right]$$

La tensión de la cuerda cuando la esfera pasa por la parte inferior soporta el peso y proporciona la fuerza centrípeta que exige el movimiento de la esfera

$$T = mg + \frac{mv^2}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = mg + \frac{m}{d}\left[2\,g\,d(1-\cos\theta) - \frac{1}{2\,m\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}} - 1\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg\,[3 - 2\cos\theta] + \frac{g}{2\,\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d^2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{sen}\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}}\right] \quad (1)$$

b) La ecuación (1) nos da la tensión de la cuerda en el supuesto de que el movimiento pendular se pueda verificar, pero existe una condición previa que determina cuál es el valor máximo que puede tener la carga q para que ese movimiento se verifique.

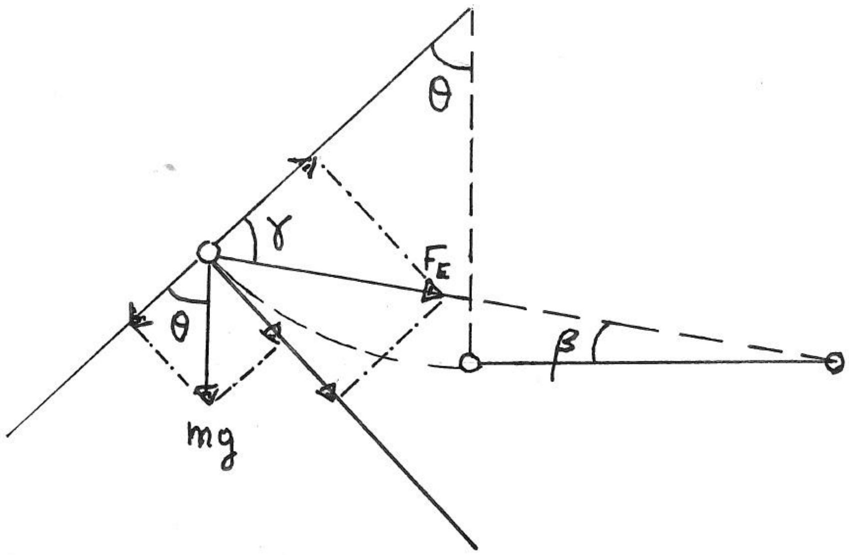


Fig.2

En la figura 2 se han representado, a escala arbitraria, el peso mg y la fuerza eléctrica F_E y sus componentes en la dirección de la cuerda y en la dirección perpendicular a ella.

En el momento inicial del movimiento, al que corresponde el ángulo θ, la cuerda debe tener tensión para que se verifique el movimiento pendular, si la tensión es nula entonces no existe este movimiento, luego la condición es que

$$m\,g\cos\theta \geq F_E \quad \cos\gamma \quad (2)$$

Designamos con ρ al ángulo que forman los vectores peso y fuerza eléctrica

$$\beta + \rho = 90^{o}\ ;\ \theta + \rho + \gamma = 180^{o} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = 180 - \theta - \rho = 180 - \theta - 90 + \beta \Rightarrow \gamma = 90 - \theta + \beta$$

Sustituyendo en (2)

$$m\,g\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{L^2}\cos(90-\theta+\beta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\left[\frac{d(1-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\beta}\right]^2}\cos(90-\theta+\beta) \qquad (3)$$

$$\operatorname{tag}\ \beta = \frac{1-\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} \quad (4)$$

Utilizamos la ecuación (4) para calcular el ángulo β

$$\operatorname{tag}\beta = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 0{,}172 \quad \Rightarrow \quad \beta = 9{,}7^{o}$$

Operamos en la ecuación (3)

$$10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85.10^{-12}}\cdot\frac{q^2\cdot\operatorname{sen}^2 9{,}7}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cos(90-45+9{,}7) \Rightarrow$$

$$6{,}93.10^{-3} = 5{,}20.10^{9}\cdot\frac{0{,}0568}{2-\sqrt{2}}q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{6{,}93.10^{-3}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{2{,}954.10^{8}}$$

$$\Rightarrow q = 3{,}71..10^{-6}\,C$$

402.- Una distribución esférica uniforme de carga tiene un radio R y una carga total Q. En el centro de dicha distribución se sitúa una carga puntual –q de masa m y en el instante t=0 dotada de una energía cinética E_o. La mencionada carga llega justamente al borde de la distribución esférica con velocidad nula. La distribución de carga esférica no puede desplazarse. Se pide

a) Determinar el valor de E_o en función de Q, q y R.

b) Deducir el tiempo empleado por la carga en el anterior desplazamiento.

Propuesto en las Olimpiadas de USA.

a) Vamos a calcular la diferencia de potencial que existe entre el centro de la distribución esférica de carga y el borde de la misma. Para ello imaginemos una esfera concéntrica con la distribución de radio r<R y aplicamos el teorema de Gauss. Teniendo en cuenta la simetría del problema la dirección y sentido del vector campo y del vector superficie son iguales

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_r = \frac{q'}{4\pi r^2 \varepsilon_o}$$

En la ecuación anterior q es la carga contenida en la esfera de radio r. Como la distribución de carga es uniforme podemos escribir.

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad q' = Q\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \quad E_r = \frac{Q\frac{r^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3}$$

Utilizamos la relación entre el campo y el potencial

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_C}^{V_B} -dV = \int_0^R \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3} dr \Rightarrow \qquad V_C - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3} \left. \frac{r^2}{2} \right|_o^R = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}$$

El trabajo para llevar la carga –q desde el centro al borde de la distribución vale

$$T = -q(V_C - V_B) = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_o R}$$

El signo menos indica que ese trabajo hay que aportarlo y ese aporte es la pérdida de energía cinética que tiene la carga –q,

$$-\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_o R} = E_{C(borde)} - E_{C(centro)} = 0 - E_o \Rightarrow \quad E_o = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_o R}$$

b) En la figura 1 se representa la posición de la carga –q en un determinado instante y la fuerza que actúa sobre ella

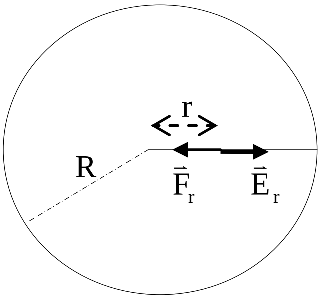


Fig.1

Dado que la carga q es negativa la fuerza tiene la misma dirección que el campo pero sentido contrario. Esto significa que al desplazarse la carga –q hacia el borde aparece una fuerza que tiende a contrarrestar este movimiento.
Aplicamos la segunda ley de Newton

$$-qE_r = m\frac{d^2r}{dt^2} \Rightarrow -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\cdot r \Rightarrow \quad -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o m R^3}\cdot r = \frac{d^2r}{dt^2}$$

La ecuación anterior nos dice que la carga –q efectúa un movimiento armónico, cuyo periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_o m R^3}{qQ}}$$

El desplazamiento entre el centro y el borde es una cuarta parte del periodo

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_o m R^3}{qQ}}$$