PROBLEMAS VARIADOS 10(2013-2015)

362.- Comprobar que si un fotón incide sobre un electrón en reposo es imposible que toda la energía del fotón se transmita íntegramente al electrón.

Designamos con ν_o la frecuencia del fotón y tomamos el sistema de referencia ligado al electrón que se encuentra en reposo. La energía del fotón es: $h\nu_o$.
La energía del electrón es la energía cinética que adquiere por el impacto del fotón:

$$E_e = (m - m_o)c^2 = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_o \right) c^2 = m_o c^2 (\gamma - 1)$$

Siendo v la velocidad del electrón después del impacto y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Si toda la energía del fotón se transfiriese al electrón, podríamos escribir:

$$h\nu_o = m_o c^2 (\gamma - 1) \quad (1)$$

Por la conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{h\nu_o}{c} = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_o v \gamma \quad \Rightarrow \quad h\nu_o = m_o c \cdot v \cdot \gamma \quad (2)$$

Igualando (1) y (2).

$$m_o c^2 (\gamma - 1) = m_o c \cdot v \cdot \gamma \Rightarrow \quad c(\gamma - 1) = v\gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow$$

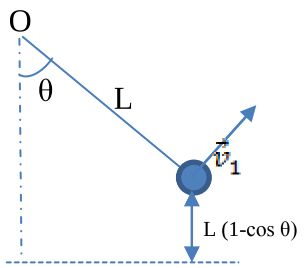
$$\Rightarrow \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \Rightarrow \left[1-\left(\frac{v}{c}\right)\right]^2 = 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow 1+\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{v}{c}\right) = 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 2\left(\frac{v}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 1$$

Si se transfiriese toda la energía, la velocidad del electrón sería igual a la de la luz, lo cual está en contradicción con la teoría de la relatividad. Por tanto, en el proceso descrito, solamente una parte de la energía del fotón se transmite al electrón; es el efecto Compton relativista.

363.- Un péndulo simple de longitud L y masa de la esfera m, cuelga de un punto O. Si el punto O se desplaza hacia la izquierda con una velocidad horizontal constante de módulo v. Determinar el valor de dicha velocidad a) si el péndulo alcanza sin rebasar la posición horizontal.
b) si el péndulo alcanza la posición vertical por encima de O. c) En este caso determinar la tensión del hilo del péndulo cuando pase por la posición horizontal.

a) Para resolver el problema tomamos como referencia un sistema cartesiano ligado al punto O. Este sistema es inercial y por tanto las leyes de la Física son iguales de válidas que si tomásemos un sistema de referencia ligado al laboratorio.
Desde el punto de vista del observador ligado a O, el punto O está en reposo y la esfera del péndulo tiene inicialmente una velocidad de módulo constante *v* horizontal y dirigida en sentido contrario, es decir hacia la derecha. Cuando esta esfera forme un ángulo con la dirección vertical θ, posee una velocidad v_1. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica.

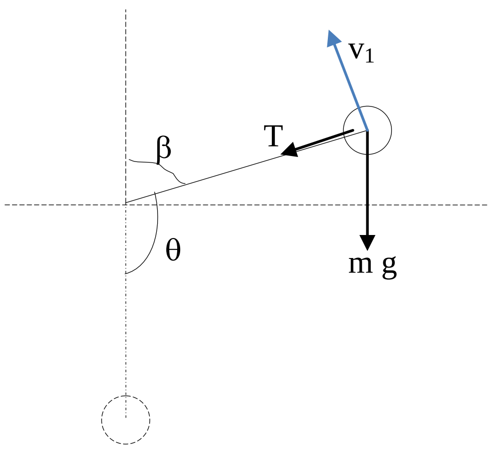


$$\frac{1}{2}mv^2 = m\,g\,L(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}m\,v_1^2$$

Cuando el péndulo alcance la posición horizontal sin rebasarla, el ángulo θ = 90º y v1 = 0, luego

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = m\,g\,L \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2gL}$$

b) Si $v>\sqrt{2gL}$, el péndulo describirá también un arco de circunferencia por encima de la horizontal y dependiendo de su velocidad, alcanzará una cierta altura. El ángulo θ es mayor que 90º pero menor que 180º y en esa posición, la velocidad de la masa es v_1.



Sobre la masa m, actúa el peso mg y la tensión de la cuerda T. La tensión T más la componente de mg sobre la cuerda proporcionan a m la fuerza centrípeta que necesita para girar.

$$T + mg\cos\beta = \frac{m\,v_1^2}{L} \quad (1)$$

Sea V la velocidad de m en la parte inferior y aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, tomando como referencia de energía potencial cero, la posición más baja de m.

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgL(1+\cos\beta) + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Los ángulos θ y β son suplementarios: $\cos\beta = -\cos\theta$

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (2)$$

Eliminamos v_1 entre las ecuaciones (1) y (2)

$$m\cdot V^2 = 2mgL(1-\cos\theta) + TL + mgL\cos\beta = 2mgL(1-\cos\theta) + TL - mgL\cos\theta$$

Si la tensión de la cuerda se anula la masa m dejará de describir la circunferencia de radio L.

$$m\cdot V^2 = 2mgL(1-\cos\theta) - mgL\cos\theta$$

Si la tensión se anula cuando θ= 180º, resulta:

$$m\cdot V^2 = 4mgL + mgL = 5mgL \quad\Rightarrow\quad V = \sqrt{5gL}$$

V es la velocidad de desplazamiento de la masa m en el punto más bajo de la trayectoria, y en módulo es igual a la velocidad de desplazamiento de O. En estas condiciones, la velocidad de la masa m en lo alto de la trayectoria nos la da la ecuación (1) haciendo en ella T = 0.

$$mg\cos\beta = \frac{mv_1^2}{L} \;\Rightarrow\; g\cos\theta = \frac{v_1^2}{L} \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{gL}$$

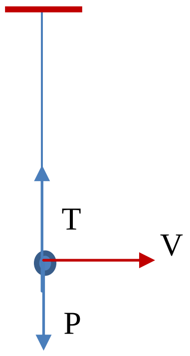
c) Cuando la masa m pase por la posición horizontal la tensión de la cuerda proporciona la fuerza centrípeta, porque el peso actúa en la dirección del vector velocidad y no da componente perpendicular a ésta.

$$T = \frac{mv_H^2}{L}$$

El valor de la velocidad v_H lo calculamos aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgL(1-\cos 90) + \frac{1}{2}mv_H^2 \;\Rightarrow\; v_H^2 = V^2 - 2gL = 5gL - 2gL \Rightarrow T = \frac{m\cdot 3gL}{L} = 3mg$$

364.- Un péndulo simple de longitud L, oscila en un plano vertical. Si la aceleración de la masa del péndulo en su punto más bajo es igual a la aceleración en el punto más alto, determinar el ángulo que forma con la vertical el péndulo en ese punto más alto.



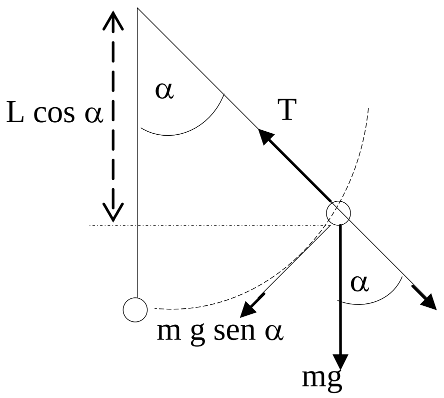
Designamos con V a la velocidad de la masa del péndulo en su punto más bajo. En dicho lugar al tener la tensión de la cuerda y el peso dirección vertical, no hay aceleración tangencial pero sí centrípeta, de módulo $\frac{V^2}{L}$

En el punto más alto, designamos con α el ángulo que forma el péndulo con la dirección vertical. En ese lugar la velocidad del péndulo es nula, por tanto, no hay fuerza centrípeta $mv^2/L = 0$; ni aceleración centrípeta, pero sí la hay aceleración tangencial debido a la componente tangencial que da el peso y vale g sen α.

Como las aceleraciones en estos dos puntos son iguales, según indica el enunciado del problema, resulta:

$$\frac{V^2}{L} = g\,\text{sen}\,\alpha$$

Para calcular el valor de V en función de α, aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica, igualando la energía cinética abajo a la energía potencial arriba.



$$\frac{1}{2} m V^2 = m g L (1 - \cos\alpha) \Longrightarrow \quad V^2 = 2 g L (1 - \cos\alpha)$$

$$\frac{V^2}{L} = \frac{2 g L (1 - \cos\alpha)}{L} = g\ \text{sen}\,\alpha = g\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

Resolvemos elevando al cuadrado la ecuación anterior:

$$[2g(1 - \cos\alpha)]^2 = g^2(1 - \cos\alpha)^2$$

$$4(1-\cos\alpha)^2 = 1-\cos^2\alpha \quad \Rightarrow 4+4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 5\cdot 3}}{10} = \frac{8\pm 2}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \quad \alpha = 53{,}1^{o}$$

La solución cos α = 1 que proporciona un α = 0; no es la que se busca.

365.- La energía mínima de excitación del átomo de helio es 21,1 eV. Supongamos que un átomo de helio está en reposo en el sistema del laboratorio (sistema L) y sobre él: a) choca un protón dotado de una energía de 24 eV; b) un electrón con la misma energía. Mostrar si en estos choques es posible que se produzca una colisión inelástica, la cual llevaría al átomo de helio a un estado excitado.

En una colisión elástica se transfiere en bloque la energía de excitación desde la partícula incidente a la de reposo, por tanto, para que esto ocurra la energía de la partícula en movimiento tiene que ser mayor que la energía de excitación. Si la energía de la partícula incidente es menor que la energía de excitación el choque es inelástico.
Pero la condición anterior no es suficiente para que pueda producirse un choque elástico, pues en el proceso intervienen las masas de las partículas, tanto la incidente como la de reposo.
En el problema que nos ocupa se cumple la condición de la energía, ya que tanto la del protón como la del electrón superan a la energía de excitación del átomo de helio.

Designamos con la letra Y a la partícula incidente; en el problema Y representa o al protón o al electrón, con B al blanco en reposo, esto es, al átomo de helio en su estado fundamental, siendo E_F esa energía y Ex en el estado excitado

$$\Delta E = E_X - E_F = 21{,}1 \ \ eV$$

P_Y es la cantidad de movimiento de la partícula incidente y P_B=0 de la partícula en reposo antes del choque. Después del choque las cantidades de movimiento las escribimos como P'_Y y P'_B. En el choque se conserva la cantidad de movimiento y suponemos que se producen en la misma dirección:

$$P_Y = P'_Y + P'_B$$

El balance de energía conduce a

$$\frac{1}{2m}P_Y^2 + E_F = \frac{1}{2m}\left(P'_Y\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(P'_B\right)^2 + E_X \Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2m}\left(P'_Y\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(P'_B\right)^2 + \Delta E \quad (1)$$

En la ecuación anterior m es la masa de la partícula incidente (protón o electrón) y M la masa del átomo de helio. Se ha utilizado la expresión de la energía cinética en función de la cantidad de movimiento:.

La energía cinética mínima del proyectil para verificar el proceso es aquella que tanto la partícula incidente como el blanco se encuentren en reposo en el sistema C (del centro de masa) después de la colisión, ya que en este caso no hay energía cinética de las partículas.

Si v representa la velocidad de la partícula incidente y v_{CM} la del centro de masas, antes del choque ocurrirá que

$$v_{CM} = \frac{m\,v}{m+M}$$

Sustituyendo términos de la ecuación (1)

$$P'_Y = m\,v_{CM} = m\frac{m\,v}{m+M} = \frac{m\,P_Y}{m+M} \quad ; \quad P'_B = M\,v_{CM} = \frac{M\,P_Y}{m+M}$$

La ecuación (1) queda ahora

$$\frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2m}\frac{m^2P_Y^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2M}\frac{M^2P_Y^2}{(m+M)^2} + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{mP_Y^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2}\frac{M\,P_Y^2}{(m+M)^2} + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{P_Y^2}{(m+M)^2}(m+M) + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{P_Y^2}{m+M} + \Delta E \Rightarrow \frac{P_Y^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+M}\right) = \Delta E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_Y^2}{2m}\left(\frac{M}{m+M}\right) = \Delta E \quad \Rightarrow \frac{P_Y^2}{2m} = \left(\frac{m+M}{m}\right)\Delta E \quad \Rightarrow \quad E_c = \left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E \quad (2)$$

Para el protón la relación $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{4}$, luego la energía cinética mínima para producir una colisión inelástica es: 1,25·21,1 =31,7 eV, como solamente lleva 24 eV, el protón no producirá ese proceso.

Para el electrón la relación $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{8000}$, puesto que aproximadamente un electrón tiene una masa 2000 veces menor que la del protón, luego la energía cinética mínima es:
$\left(1+\frac{1}{8000}\right)\cdot 21{,}1 \approx 21{,}1\ \text{eV}$, como el electrón posee una energía cinética 24 eV puede producir ese proceso de excitación del átomo de helio.

366.- Sobre el plano XY existen dos distribuciones rectilíneas de carga positiva, longitud infinita y densidad lineal de carga λ. Ambas son paralelas al eje Y siendo la distancia de cada una al origen de coordenadas d. Determinar:

a) El módulo del campo eléctrico en puntos del eje Z cuya distancia al origen de coordenadas es +h.

b) El valor de h para que el módulo del campo sea máximo.

c) Un positrón se encuentra en la posición (0, 0, h =3 m) con una velocidad de $\vec{v} = -3,2.10^7\vec{k}\ m/s$ ***. Calcular la ecuación de la velocidad de esa partícula en función de h, entre h=+3 m y 0. Construir la gráfica de la velocidad en función de h.***

Datos: masa del positrón m= 9,1.10^{-31} kg , carga del positrón q =+ 1,6.10^{-19} C , λ = 10^{-8} C/m , d= 1m. $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N m^2}$,

a) En la figura 1a existe un esquema de las distribuciones de carga y en la 1b visto el campo desde el eje Y.

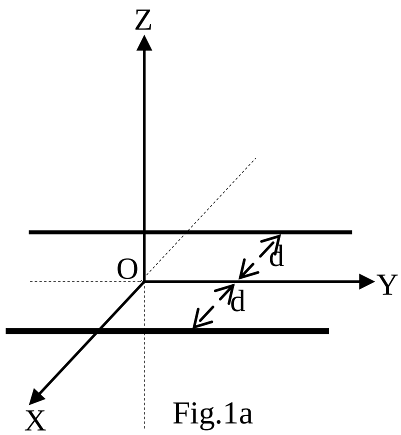


Fig.1a

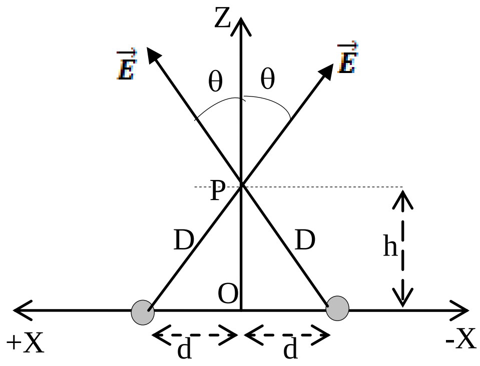


Fig.1b

Para calcular el módulo del campo creado por una de las distribuciones rectilíneas, tendremos en cuenta que por ser rectilínea e indefinida (no hay problemas de contorno), el campo eléctrico tendrá en módulo el mismo valor, en puntos situados a la misma distancia de la distribución, de modo que existe simetría cilíndrica y por este motivo también podremos hacer uso del teorema de Gauss, para determinar el valor del campo eléctrico, (el teorema de Gauss permite siempre hallar el valor del flujo y si además hay mucha simetría el valor del campo, como es el caso que nos ocupa).
Consideramos como superficie de Gauss, que ha de ser cerrada con la carga en su interior, pasando por el punto donde se pretende calcular el módulo del campo eléctrico, un cilindro de radio D y altura H, cuyo eje central es la distribución rectilínea (figura 2). Dada la simetría, el flujo eléctrico solamente atraviesa el área lateral del cilindro y el vector campo es perpendicular en cada punto al eje.

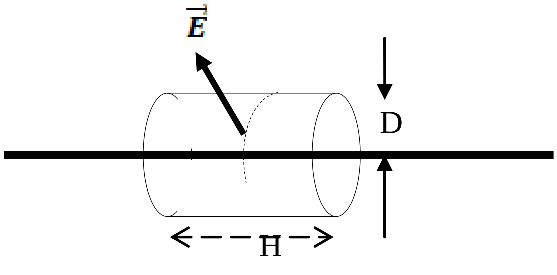


Fig. 2a

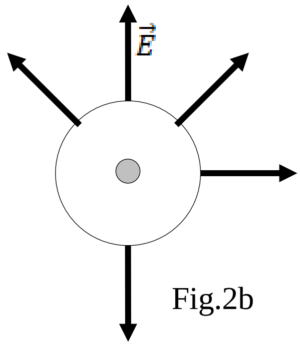


Fig.2b

Si λ es la carga en cada unidad de longitud, la carga que está contenida en el cilindro es: λ H . El área lateral del cilindro es: $2\pi DH$. El campo en cada punto del área lateral tiene el mismo módulo. En la figura 2b se observa el cilindro visto desde una de sus bases se han dibujado varios vectores campo eléctrico, todos ellos son perpendiculares al eje que es la distribución de carga rectilínea. Aplicando el teorema de Gauss, flujo a través de la superficie cerrada que contiene la carga en su interior, es igual a la carga encerrada, partido por la constante dieléctrica del medio, para el vacío εo

$$\emptyset = \iint \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{interior}}{\varepsilon_o}$$

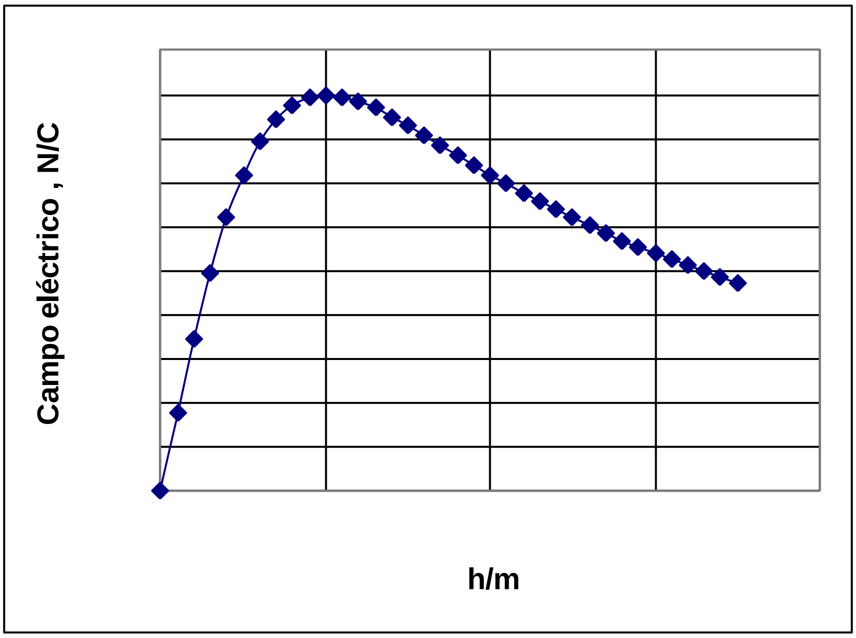
$$\phi = E\iint \cos 0\, dS = E\cdot S = E\cdot 2\pi DH = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda H}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o D} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\sqrt{h^2+d^2}}$$

Por el principio de superposición, el campo total en el punto P es la suma de los dos vectores campo, producidos por cada distribución en el punto considerado, fig.1.b. Las componentes proyectadas sobre el eje X se anulan por ser de sentidos opuestos y se refuerzan las del eje Z, sumándose por del mismo sentido.

$$E_P = 2\cdot\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+d^2}}\cos\theta = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+d^2}}\cdot\frac{h}{D} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+d^2}}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} = \frac{\lambda h}{\pi\varepsilon_0\left(h^2+d^2\right)}$$

El vector campo es: $$\overrightarrow{E_P} = \frac{\lambda h}{\pi\varepsilon_0\left(h^2+d^2\right)}\vec{k}$$

La representación del módulo del campo eléctrico frente a h es la gráfica siguiente:



b) Para determinar cuál es el valor de h en el cual el módulo del campo es máximo, derivamos la ecuación anterior respecto de la variable h, e igualamos a cero.

$$\frac{dE_P}{dh} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_o}\frac{\left(h^2+d^2\right)\cdot 1 - h\cdot 2h}{\left(h^2+d^2\right)^2} = 0 \Rightarrow h^2+d^2-2h^2=0 \quad \Rightarrow \quad h=d$$

El módulo del campo máximo vale:

$$E_{P(max)} = \frac{\lambda\, d}{\pi\varepsilon_o\, 2d^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o d} = \frac{10^{-8}}{2\;\pi\;8{,}8510^{-12}\cdot 1^2} = 179{,}8\;\frac{N}{C}$$

c) El campo ejerce sobre el positrón una fuerza $q\overrightarrow{E_P}$ de módulo q E_P, dirigida según el eje positivo de Z, en consecuencia, el campo hace disminuir la velocidad del positrón, ya que la aceleración está dirigida en el sentido de la fuerza: $q\overrightarrow{E_P} = m\cdot\vec{a}$
El módulo de la aceleración es:

$$a = \frac{q}{m}\frac{\lambda h}{\pi\varepsilon_o\left(h^2+d^2\right)} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} \Rightarrow a{\cdot}dh = v{\cdot}dv \quad \Rightarrow \quad \int\frac{q}{m}\frac{\lambda h}{\pi\varepsilon_o\left(h^2+d^2\right)}dh = \int v\,dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q\lambda}{m\pi\varepsilon_o}\int\frac{h}{\left(h^2+d^2\right)} = \frac{v^2}{2} + Cte \quad (1)$$

Para resolver la integral anterior hacemos un cambio de variables:

$$h^2 + d^2 = p^2 \Rightarrow \quad h\,dh = p\,dp$$

$$\int \frac{h\,dh}{h^2 + d^2} = \int \frac{p\,dp}{p^2} = \int \frac{dp}{p} = \ln p = \ln \sqrt{h^2 + d^2}$$

Llevando el valor de la integral a (1)

$$\frac{q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \sqrt{h^2 + d^2} = \frac{v^2}{2} + Cte \quad (2)$$

Para determinar el valor de la constante de la ecuación (2) recurrimos a las condiciones iniciales: cuando v=3,2.10^7 m/s, h= +3 m

$$\frac{q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \sqrt{3^2 + d^2} = \frac{\left(3{,}2.10^7\right)^2}{2} + Cte \Rightarrow \quad Cte = \frac{q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \sqrt{3^2 + d^2} - 5{,}12.10^{14} \Rightarrow$$

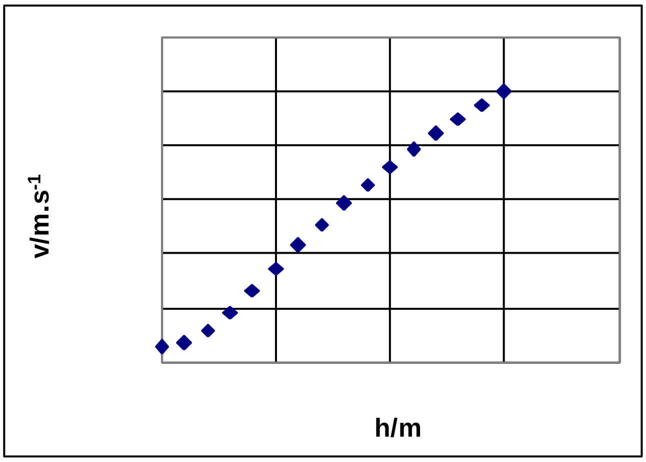
$$\Rightarrow \frac{q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \sqrt{h^2 + d^2} - \frac{q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \sqrt{3^2 + d^2} + 5{,}12.10^{14} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{\sqrt{10}} + 10{,}24.10^{14} = v^2 \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2q\lambda}{m\pi\varepsilon_o} \ln \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{\sqrt{10}} + 10{,}24.10^{14}}$$

Sustituyendo los valores numéricos resulta para la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6.10^{-19} \cdot 10^{-8}}{9{,}1.10^{-31} \cdot \pi \cdot 8{,}85.10^{-12}} \cdot \ln \sqrt{\frac{h^2 + 1^2}{10}} + 10{,}24.10^{14}} = \sqrt{1{,}265.10^{14} \cdot \ln \sqrt{\frac{h^2 + 1^2}{10}} + 10{,}24.10^{14}} \quad \frac{m}{s}$$

La representación de la velocidad frente a h es:



Observe que la velocidad disminuye a medida que el valor de h se acerca al origen de coordenadas.