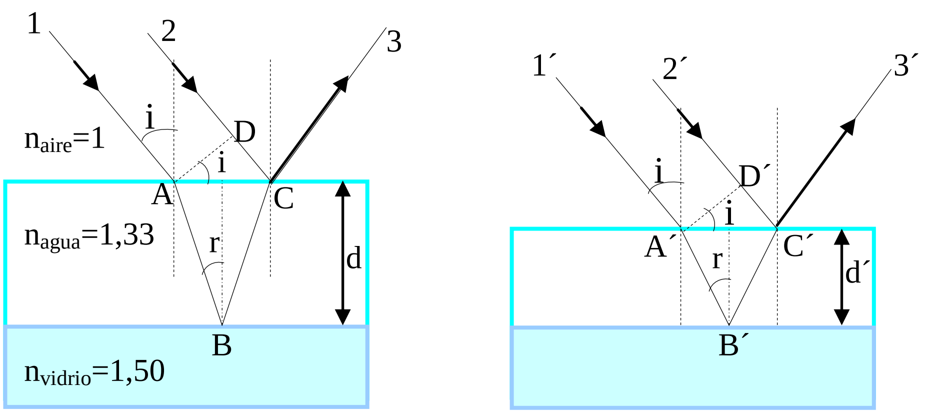
PROBLEMAS VARIADOS 1(2013-2014)

321-. Sobre la superficie de un vidrio de índice de refracción 1,50 se encuentra una capa uniforme de agua (n=1,33). Un haz luminoso de λ=680 nm, incide con un ángulo de 30º sobre el agua. Se observa un máximo en la interferencia por reflexión Debido a la evaporación del agua y después de transcurridos 15 minutos se vuelve a detectar un máximo. Calcular la velocidad con que disminuye el grosor de la película.

Designamos con d el espesor de la capa de agua cuando se observa el primer máximo y con d´ cuando se observa el segundo máximo. En la figura 1 se representa la marcha de los rayos. El rayo 2 se refleja en una superficie de mayor índice de refracción por lo que hay un cambio de fase, el rayo refractado 1 también se refleja con un cambio de fase, por tanto, el efecto del cambio de fase se anula. La interferencia se produce entre el reflejado 3 y el refractado procedente de 1 que se ha reflejado en B.



(a) Fig 1 (b)

La diferencia de caminos ópticos recorridos por los rayos (ver fig.1a) es:

Por producirse un máximo: $n_{H2O}(AB+BC)-n_{aire}DC=k\lambda$ (1)

De la figura se deduce:

$$AB=BC=\frac{d}{\cos r}\Rightarrow \quad AC=2d\,\mathrm{tag}\,r \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\,i=\frac{DC}{AC}\Rightarrow \quad DC=2d\,\mathrm{tag}\,r\cdot\mathrm{sen}\,i$$

La ecuación (1) recordando que n_{aire}=1; queda ahora:

$$n_{H2O}\frac{2d}{\cos r}-2d\,\mathrm{tag}\,r\cdot\mathrm{sen}\,i=k\lambda \quad (2)$$

Aplicamos la ley de Snell:

$$1\cdot\mathrm{sen}\,i=n_{H2O}\mathrm{sen}\,r=n_{H2O}\sqrt{1-\cos^2 r}\Rightarrow \mathrm{sen}^2 i=n^2_{H2O}\left(1-\cos^2 r\right)\Rightarrow \cos r=\sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2 i}{n^2_{H2O}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tag}\,r=\frac{\mathrm{sen}\,r}{\cos r}=\frac{\frac{\mathrm{sen}\,i}{n_{H2O}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2 i}{n^2_{H2O}}}}=\frac{\mathrm{sen}\,i}{\sqrt{n^2_{H2O}-\mathrm{sen}^2 i}}$$

Llevado lo anterior a (2), resulta.

$$n_{H2O}\frac{2d}{\sqrt{1-\frac{sen^2 i}{n_{H2O}^2}}}-2d\frac{sen^2 i}{\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}=k\lambda \Rightarrow \frac{2d\,n_{H2O}^2}{\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}-2d\frac{sen^2 i}{\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}=k\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2d}{\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}\left(n_{H2O}^2-sen^2 i\right)=k\lambda \Rightarrow \quad 2d\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}=k\lambda \Rightarrow \quad d=\frac{k\lambda}{2\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}$$

Aplicando el mismo razonamiento a la figura 1b:

$$d'=\frac{k'\lambda}{2\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}$$

La velocidad de evaporación es:

$$\frac{d-d'}{\Delta t}=\frac{\lambda(k-k')}{2\Delta t\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}=\frac{\lambda}{2\Delta t\sqrt{n_{H2O}^2-sen^2 i}}=\frac{680}{2\cdot 15\cdot 60\sqrt{1{,}33^2-sen^2 30}}=0{,}307\frac{nm}{s}$$

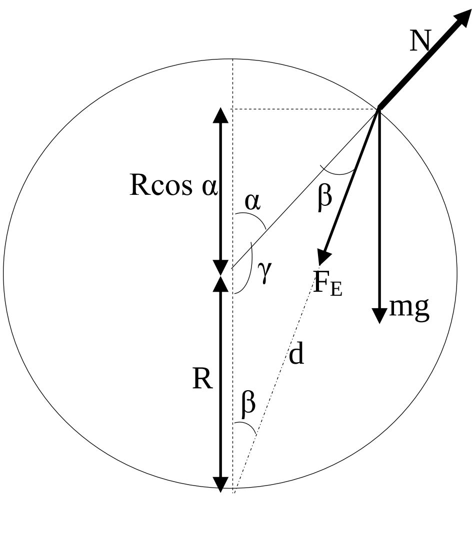
322-. En lo alto de una esfera de radio R existe una masa m que posee una cierta carga q. En el punto más bajo de la esfera, esto es, a una distancia 2R de m, existe una carga fija Q. La fuerza de atracción entre las dos cargas es en módulo la cuarta parte del peso de m. La masa m comienza a moverse, sin velocidad inicial y sin rozamiento, a lo largo de la esfera y se separa de ella formado un cierto ángulo entre el radio vector de m en el momento de separarse de la esfera y la dirección vertical.
Determinar el valor del ángulo θ.

La fuerza de atracción entre las cargas cuando m se halla en lo más alto de la esfera es:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{(2R)^2}=\frac{1}{4}mg \quad \Rightarrow \quad \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}=R^2 mg$$

En la figura 1 se ha colocado la masa m en una cierta posición: En esa posición se representan las fuerzas que actúan sobre la masa m: El peso mg, la fuerza eléctrica F_E y la fuerza de reacción N con que la esfera empuja a la masa.

Fig.1



Desde la posición inicial de m hasta el lugar indicado en la figura 1, hacemos un balance de energías: En la parte más alta, la masa m tiene energía potencial eléctrica y energía potencial gravitatoria (respecto de la posición más baja de la esfera) y en la posición indicada en la figura 1, a las anteriores energías hay que añadir la cinética. Como ambos campos, gravitatorio y eléctrico son conservativos, se conserva la energía de la masa ya que no hay disipación, en consecuencia ésta vele igual en la posición inicial que en la genérica.

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{2R}+mg\,2R=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{d}+mg\,R(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow$$

$$-\frac{R^2mg}{2R}+mg\,2R=-\frac{R^2mg}{d}+mg\,R(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{3gR}{2}=-\frac{R^2g}{d}+gR(1+\cos\alpha)+\frac{1}{2}v^2\quad\Rightarrow\quad v^2=3gR+\frac{2R^2g}{d}-2gR(1+\cos\alpha)\quad(1)$$

La masa m tiene, en la posición de la figura 1, una velocidad v y se mueve sobre la esfera, por tanto, para que dicha masa siga pegada a la esfera debe haber alguna/s fuerza/s que proporcione/n la fuerza centrípeta. Esta fuerza es proporcionada por la resultante de las componentes sobre la dirección del radio R: del peso, de la fuerza eléctrica y de la reacción.

$$mg\cos\alpha+F_E\cos\beta-N=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow mg\cos\alpha+\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{d^2}\cos\beta-N=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\cos\alpha+\frac{R^2mg}{d^2}\cos\beta-N=\frac{mv^2}{R}\Rightarrow gR\cos\alpha+\frac{R^3g\cos\beta}{d^2}-NR=v^2\quad(2)$$

De la figura 1 se deduce:

$$\alpha+\gamma=180^o\ ;\ \gamma+2\beta=180^o\quad\Rightarrow\quad\alpha=2\beta$$

$$d=\sqrt{[R+R\cos\alpha]^2+(R\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2}=\sqrt{R^2+R^2\cos^2\alpha+2R^2\cos\alpha+R^2\mathrm{sen}^2\alpha}=R\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$$

Cuando la masa m se separa de la esfera, no hay reacción y la fuerza N=0. De igualar (1) y (2) deducimos:

$$3gR+\frac{2R^2g}{R\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-2gR(1+\cos\alpha)=gR\cos\alpha+\frac{R^3g\cos\frac{\alpha}{2}}{R^2\,2(1+\cos\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3gR+\frac{2Rg}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-2gR(1+\cos\alpha)=gR\cos\alpha+Rg\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\alpha)}\Rightarrow$$

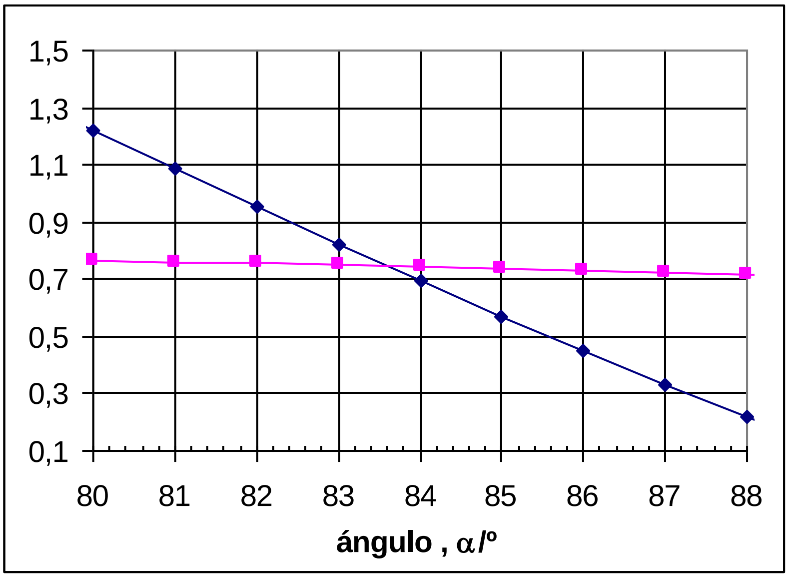
$$\Rightarrow 3+\frac{2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-2(1+\cos\alpha)=\cos\alpha+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\alpha)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-3\cos\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2(1+\cos\alpha)}\quad\Rightarrow$$

$$2(1+\cos\alpha)\frac{4(1+\cos\alpha)}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-6\cos\alpha(1+\cos\alpha)=\cos\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$$

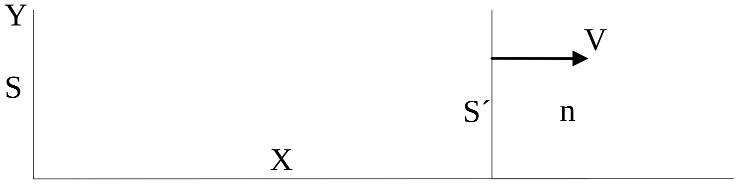
$$\Rightarrow\quad\frac{8(1+\cos\alpha)^2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}}-6\cos\alpha(1+\cos\alpha)=\cos\frac{\alpha}{2}\qquad(3)$$

Para resolver la ecuación anterior operamos por tanteo, damos valores al ángulo α y hallamos los correspondientes valores del primero y del segundo miembro de la ecuación (3), aquel ángulo para el cual el primer miembro y el segundo sean iguales, es la solución.
Además, hacemos las representaciones gráficas y observamos que la solución ocurre cuando las dos gráficas se cortan.



De la gráfica se deduce que α =83,6º.

323-. Un sistema de referencia S´ se desplaza respecto de un sistema inercial S con una velocidad V<< c, tal como se indica en la figura. El índice de refracción del sistema S´ es n. Un rayo de luz se desplaza por S´ en la misma dirección y sentido que V. Calcular la velocidad del rayo de luz medida por un observador ligado al sistema S.



En el sistema S´ la luz viaja en un medio distinto al vacío y esto supone que su velocidad es inferior a la del vacío c. Si la velocidad de la luz en el medio es c´ según la definición de índice de refracción

$$c' = \frac{c}{n}$$

Designamos con u la velocidad del rayo medida por el observador situado en S. La relación relativista de velocidades es:

$$u = \frac{c' + V}{1 + \frac{V c'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V c}{n c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{n c}} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right)}{\left(1 + \frac{V}{n c}\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right)}{1 - \frac{V^2}{n^2 c^2}}$$

Como V<<c el termino del denominador se puede aproximar a la unidad, entonces.

$$u=\left(\frac{c}{n}+V\right)\left(1-\frac{V}{nc}\right)=\frac{c}{n}+V-\frac{cV}{n^2c}-\frac{V^2}{nc}\approx\frac{c}{n}+V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

24-Una esfera de radio R posee una carga volumétrica ρ, distribuida uniformemente. Considerar sobre la esfera un círculo cuyo centro dista del centro de la esfera r_o<R. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa el citado círculo.

En la fig.1 se ha representado la esfera de radio R y el círculo de radio d. Sobre ese círculo se considera una corona circular a una distancia x del centro del circulo de espesor dx. Para los cálculos posteriores x es variable y sus valores extremos son: cero y d.
De la fig. 1 se deducen las siguientes relaciones:

$$d=\sqrt{R^2-r_o^2} \quad ; \quad L=\sqrt{r_o^2+x^2}$$

Con centro en O trazamos una esfera de radio L, de puntos en la fig-1.

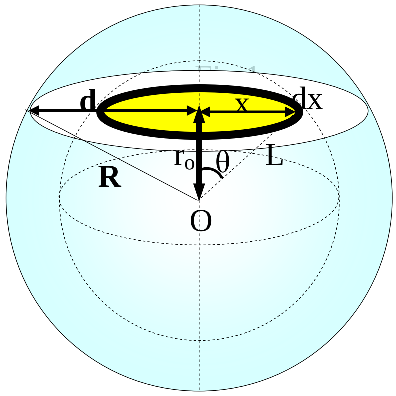


Fig.1

La carga eléctrica que existe dentro de la esfera de radio L es: $q=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi L^3$

El campo eléctrico que existe en la superficie de esa esfera, lo calculamos mediante el teorema de Gauss, considerando solamente la carga que tiene dentro dicha esfera.

$$\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_o}\;\Rightarrow\; E\cdot 4\pi\;L^2=\frac{\frac{4}{3}\pi L^3\rho}{\varepsilon_o}\;\Rightarrow\; E=\frac{\rho L}{3\varepsilon_o}=\frac{\rho\sqrt{r_o^2+x^2}}{3\varepsilon_o}$$

El valor hallado de E, representa solamente el módulo del vector campo. El campo como magnitud vectorial $\vec{E}$ se ha representado en la fig.2, en dos lugares opuestos de la corona circular y en un lado $\vec{E}$ se ha descompuestos en dos componentes. Evidentemente, al otro lado sucede exactamente igual.

Se observa en la fig.2 que las componentes horizontales se anularán dos a dos, y se suman las componentes verticales. Sobre la corona circular de radio x, y espesor dx, el vector campo eléctrico es perpendicular a la misma y el flujo elemental.

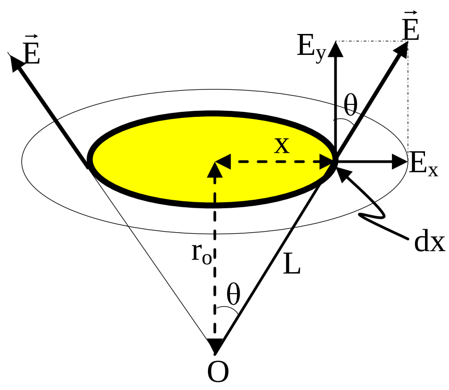


Fig.2

$$d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cos\theta\cdot 2\pi x\,dx = \frac{\rho\sqrt{r_o^2+x^2}}{3\varepsilon_o}\frac{r_0}{L}2\pi x\,dx = \frac{\rho\sqrt{r_o^2+x^2}}{3\varepsilon_o}\frac{r_0}{\sqrt{r_o^2+x^2}}2\pi x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d\Phi = \frac{\rho\, r_o}{3\varepsilon_o}2\pi x\,dx$$

Para calcular el flujo que atraviesa el círculo de radio d, debemos sumar todas las contribuciones de las coronas circulares comprendidas entre cero y d.

$$\Phi = \int_0^{\sqrt{R^2-r_0^2}} \frac{\rho\, r_o}{3\varepsilon_o}2\pi x\,dx = \frac{\rho\, r_o}{3\varepsilon_o}\cdot\frac{2\pi x^2}{2}\Bigg|_o^{\sqrt{R^2-r_0^2}} = \frac{\rho\, r_o\,\pi}{3\varepsilon_o}\left(R^2-r_o^2\right)$$

325-Una oscilación es la suma de tres oscilaciones de la misma dirección, cuyas ecuaciones son:

$$\varepsilon_1 = a\cos 0{,}5t\ ;\ \varepsilon_2 = 2a\ \mathrm{sen}\,0{,}5t\ ;\ \varepsilon_3 = 1{,}5a\cos\left(0{,}5t+\frac{\pi}{3}\right)$$

Determinar el tiempo en el que la oscilación resultante adquiere su valor máximo y el valor de ese máximo.

Por el principio de superposición, la oscilación resultante es la suma de las tres funciones armónicas.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = a\cos 0{,}5t + 2a\,\mathrm{sen}\,0{,}5t + 1{,}5a\cos\left(0{,}5t+\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = a\cos 0{,}5t + 2a\,\mathrm{sen}\,0{,}5t + 1{,}5a\cos 0{,}5t\cdot\cos\frac{\pi}{3} - 1{,}5a\,\mathrm{sen}\,0{,}5t\cdot\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_r = 1{,}75a\cos 0{,}5t + a\left(2-\frac{1{,}5\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{sen}\,0{,}5t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_r = 1{,}75a\cos 0{,}5t + \left(\frac{4-1{,}5\sqrt{3}}{2}\right)a\ \mathrm{sen}0{,}5t$$

Dado que la oscilación resultante ha de ser máxima, hallamos la derivada de ε_r respecto del tiempo e igualamos a cero.

$$\frac{d\varepsilon_r}{dt} = -1{,}75a\cdot 0{,}5\,\mathrm{sen}\,0{,}5t + \left(\frac{4-1{,}5\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 0{,}5a\cos 0{,}5t = 0\Rightarrow$$

$$-1{,}75\,\mathrm{sen}\,0{,}5t + \left(\frac{4-1{,}5\sqrt{3}}{2}\right)\cos 0{,}5t = 0 \Rightarrow \mathrm{tag}\,0{,}5t = \frac{\left(\frac{4-1{,}5\sqrt{3}}{2}\right)}{1{,}75} = 0{,}400\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5t = \mathrm{arc\,tg}\,0{,}400 = 0{,}38;\quad t = \frac{0{,}38}{0{,}5} = 0{,}76\,s$$

Para hallar el valor del máximo sustituimos t =0,76 s en ε_r

$$\varepsilon_r = 1,75\,a\cos(0,5\cdot 0,76) + a\left(2 - \frac{1,5\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{sen}(0,5\cdot 0,76) = 1,625a + 0,260\,a = 1,885\,a$$

Hemos representado las gráficas cuando a = 1.