OLIMP-PVARIADOS1-2019

469.- Una grabadora emite a una sola frecuencia f_o. Se deja caer (sin velocidad inicial) desde una altura h. En el suelo y directamente debajo de ella existe un dispositivo que mide el tiempo de caída y la frecuencia del sonido. El tiempo medido por ese dispositivo se designa con t y cuando t=0 es cuando la grabadora inicia la caída. Los tiempos y frecuencias son los de la siguiente tabla.

Tiempo, t/s	***2,0***	***4,0***	***6,0***	***8,0***	***10,0***
Frecuencia; f/Hz	***581***	***619***	***665***	***723***	***801***

1.- Determinar la frecuencia medida f en función de f_o, g , h , y v_S, siendo $g=9,8\ m/s^2$ y v_S la velocidad del sonido 340 m/s.

2.- Determinar la frecuencia f_o y la altura h.

American Association of Physics Teacher

1.- En la figura 1, en un tiempo t´ (medido desde que se inicia la caída), la grabadora se ha desplazado hacia abajo una altura h´. El tiempo registrado en el suelo es t.

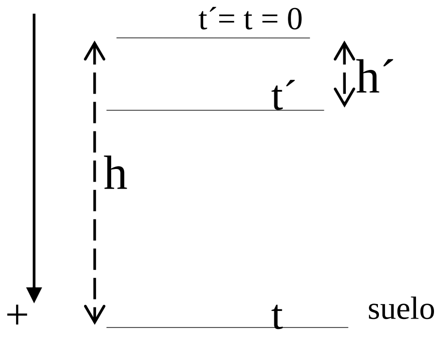


Fig.1

El tiempo t registrado en el suelo es mayor que t´, ya que el registro se hace cuando llega el sonido y éste emplea un tiempo en recorrer la distancia h-h´, v_s es la velocidad del sonido

$$t = t' + \frac{h - h'}{v_S}$$

La caída de la grabadora es un movimiento uniformemente acelerado. Con v_G designamos a la velocidad de la grabadora cuando pasa por h´.

$$h' = \frac{1}{2} g (t')^2 \quad ; \quad v_G = g t' \quad ; \Rightarrow \quad t = t' + \frac{h - \frac{1}{2} g (t')^2}{v_S} \Rightarrow v_S t = v_S t' + h - \frac{1}{2} g (t')^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g (t')^2 - v_S t' + v_S t - h = 0 \quad \Rightarrow \quad (t')^2 - \frac{2 v_S}{g} t' + \frac{2}{g}(v_S t - h) = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$t' = \frac{2\frac{v_S}{g} \pm \sqrt{\frac{4 v_S^2}{g^2} - \frac{8}{g}(v_S t - h)}}{2} = \frac{v_S}{g} \pm \sqrt{\frac{v_S^2}{g^2} - \frac{2}{g}(v_S t - h)} = \frac{v_S \pm \sqrt{v_S^2 - 2g(v_S t - h)}}{g}$$

Ahora decidimos qué signo debemos escoger en la doble solución anterior. Cuando h=0 , t=0=t´, luego la solución es escoger el signo negativo. Sustituimos t´ en v_G.

$$v_G = g \frac{v_S - \sqrt{v_S^2 - 2g(v_S t - h)}}{g} = v_S - \sqrt{v_S^2 - 2g(v_S t - h)}$$

La frecuencia medida por el dispositivo de tierra es diferente de la frecuencia emitida por la grabadora ya que ésta se desplaza hacia el aparato de medida. La relación entre la frecuencia medida y la frecuencia emitida está dada por el efecto Doppler

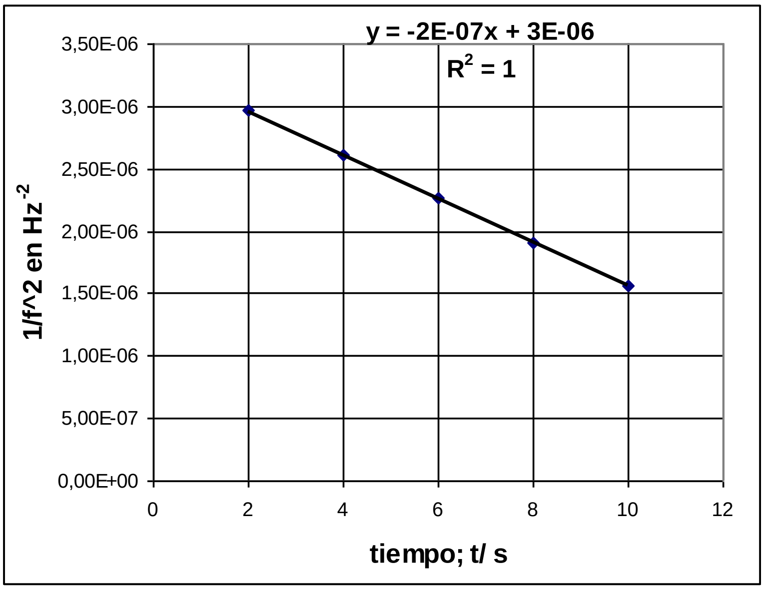
$$f = \frac{f_o}{1 - \frac{v_G}{v_S}} = \frac{f_o}{1 - \frac{v_S - \sqrt{v_S^2 - 2g(v_S t - h)}}{v_S}} = \frac{f_o v_S}{\sqrt{v_S^2 - 2g(v_S t - h)}} \Rightarrow f^2 = \frac{f_o^2 v_S^2}{v_S^2 - 2g(v_S t - h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_o^2} \frac{v_S^2 - 2g(v_S t - h)}{v_S^2} = \frac{1}{f_o^2} \frac{v_S^2 - 2 v_S g t + 2 g h}{v_S^2} = \frac{1}{f_o^2}\left(1 - \frac{2 g t}{v_S} + \frac{2 g h}{v_S^2}\right) \Rightarrow$$

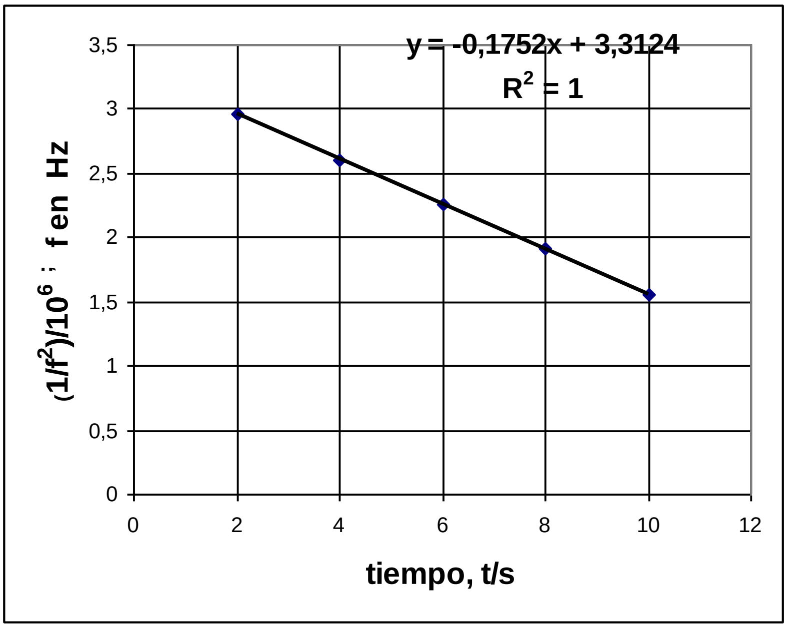
$$\Rightarrow -\frac{1}{f^2} = \frac{2 g t}{f_o^2 v_S} + \frac{1}{f_o^2}\left(1 + \frac{2 g h}{v_S^2}\right) \quad (1)$$

Según la ecuación (1) al representar en el eje de abscisas el tiempo y en el de ordenadas el inverso de la frecuencia se obtiene una línea recta cuya pendiente es $-\frac{2g}{f_o^2\, v_S}$, con ordenada en el origen $\frac{1}{f_o^2}\left(1+\frac{2gh}{v_S^2}\right)$

Con los valores que aparecen en el enunciado se obtiene la siguiente gráfica



Como la hoja de cálculo da los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen con una sola cifra, hacemos otra gráfica con los valores de la frecuencia multiplicados por un millón



Los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen proporcionados por esta segunda gráfica deben dividirse por un millón

$$-0{,}1752.10^{-6}=-\frac{2g}{f_o^2\,v_S}\Rightarrow f_o=\sqrt{\frac{2g}{0{,}172.10^{-6}\cdot v_S}}=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8}{0{,}1752.10^{-6}\cdot 340}}=574\,\mathrm{Hz}$$

$$3{,}3124.10^{-6}=\frac{1}{f_o^2}\left(1+\frac{2gh}{v_S^2}\right)\Rightarrow 3{,}3124.10^{-6}\cdot 574^2=1+\frac{2\cdot 9{,}8}{340^2}h\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}0914-1=1{,}6955.10^{-4}\,h\quad\Rightarrow h=\frac{0{,}0914}{1{,}6955.10^{-4}}=539\,\mathrm{m}$$

470.- Una carga positiva está distribuida de manera uniforme sobre un cilindro muy largo de radio R. La densidad de carga por unidad de volumen es ρ.

a) Encontrar el módulo del campo eléctrico en función de la distancia desde el eje del cilindro al punto interior (x) y exterior del cilindro (r).

b) Determinar para las mismas distancias el potencial eléctrico tomando como referencia de potencial nulo la superficie del cilindro.

c) Hacer lo mismo que en el apartado anterior, pero tomando como referencia el potencial nulo cuando la distancia r= 3R.

d) Calcular que la diferencia de potencial entre los puntos exteriores r = 10R y r = R y entre los puntos interiores x= R/6 y x=R/3 ; empleando los dos criterios de potencial nulo. Comentar el resultado.

e) Hacer la representación grafica de la distancia frente al potencial con R= 1m y el criterio del apartado. Repetir pero con el criterio del apartado c).

Suponer que $\frac{\rho}{\varepsilon_o}=1$

a) Aplicamos el teorema de Gauss, a una superficie cilíndrica de radio r>R que rodea por completo al cilindro de radio R y longitud L>>R.. En este caso, dada la simetría, se cumple en cada punto de la superficie cilíndrica de radio r que el vector campo y el vector superficie forman un ángulo de cero grados, y por ello $\mathbf{E_E}\cdot\mathbf{dS}=E_E\,dS\cos 0^o=E_E\,dS$

$$\int E_E\,dS=\frac{\sum Q}{\varepsilon_o}\Rightarrow\quad E_E\,S=\frac{V\rho}{\varepsilon_o}\Rightarrow\quad E_E\cdot 2\pi r L=\frac{\pi R^2 L\rho}{\varepsilon_o}\Rightarrow\quad E_E=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}\quad r\geq R$$

Para los puntos interiores consideramos una superficie cilíndrica de radio x<R y longitud L incrustada en el interior del cilindro y aplicamos la ley de Gauss

$$\int E_I\, dS = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E_I\, S = \frac{V\rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E_I \cdot 2\pi x L = \frac{\pi x^2 L \rho}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad E_I = \frac{\rho x}{2\varepsilon_o} \quad r \le R$$

b) Entre el campo y el potencial existe la siguiente relación

$$E_E = -\frac{dV_E}{dr} \quad \Rightarrow \quad -V_E = \int E_E dr = \int \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r} dr = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln r + Cte$$

Cuando r= R el potencial es nulo de acuerdo con el criterio del enunciado

$$Cte = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln R \quad \Rightarrow -V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln r - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln R \Rightarrow \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln \frac{R}{r} \quad r \ge R \quad (1)$$

Para puntos del interior del cilindro, cuando x= R el potencial es nulo

$$E_I = -\frac{dV_I}{dx} \quad \Rightarrow \quad -V_I = \int E_I\, dr = \int \frac{\rho x}{2\varepsilon_o} dx = \frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + Cte' \quad \Rightarrow$$

$$Cte' = 0 - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad -V_I = \frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} - \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad V_I = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - x^2\right) \quad x \le R \qquad (2)$$

c) La diferencia con el apartado b) es que la constante de integración es distinta. Partimos de las ecuaciones del anterior apartado

$$-V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln r + Cte$$

Cuando r= 3R al potencial se le atribuye el valor nulo, ahora la constante vale

$$0 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln 3R + Cte \quad \Rightarrow \quad Cte = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln 3R \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln r - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln 3R \quad \Rightarrow \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln \frac{3R}{r}\right) \qquad (3)$$

Para $V_{I,}$ utilizamos el hecho de que el potencial de V_E e V_I es el mismo cuando x=r=R

$$-V_I = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} + Cte' \;\Rightarrow\; V_I = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o} - Cte' = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln\frac{3R}{R}\right) \Rightarrow Cte' = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad V_I = -\frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

d) *Puntos exteriores al cilindro*

Empleando la ecuación (1): $V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln \frac{R}{r}$

$$\Delta V_E = V_{10R} - V_R = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln \frac{R}{10R} - 0 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}(-\ln 10) \quad (5)$$

Empleando la ecuación (3) : $V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln \frac{3R}{r}\right)$

$$\Delta V_E = V_{10R} - V_R = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln \frac{3R}{10R} - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o} \ln \frac{3R}{R} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}(\ln \frac{3}{10} - \ln 3) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 - \ln 10 - \ln 3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(-\ln 10\right) \quad (6)$$

Puntos interiores al cilindro

Empleando la ecuación (2) : $V_I = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - x^2\right)$

$$\Delta V_I = V_{R/6} - V_{R/3} = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - \frac{R^2}{36}\right) - \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right) = \frac{\rho}{4\varepsilon_o} \cdot \frac{35R^2}{36} - \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\frac{8R^2}{9} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_I = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left(\frac{35}{36} - \frac{32}{36}\right) \Rightarrow \quad \Delta V_I = \frac{\rho R^2}{48\varepsilon_o} \quad (7)$$

Empleando la ecuación (4): $V_I = -\frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right)$

$$\Delta V_I = -\frac{\rho R^2}{36 \cdot 4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) - \left[-\frac{\rho R^2}{9 \cdot 4\varepsilon_o} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right) \Rightarrow$$

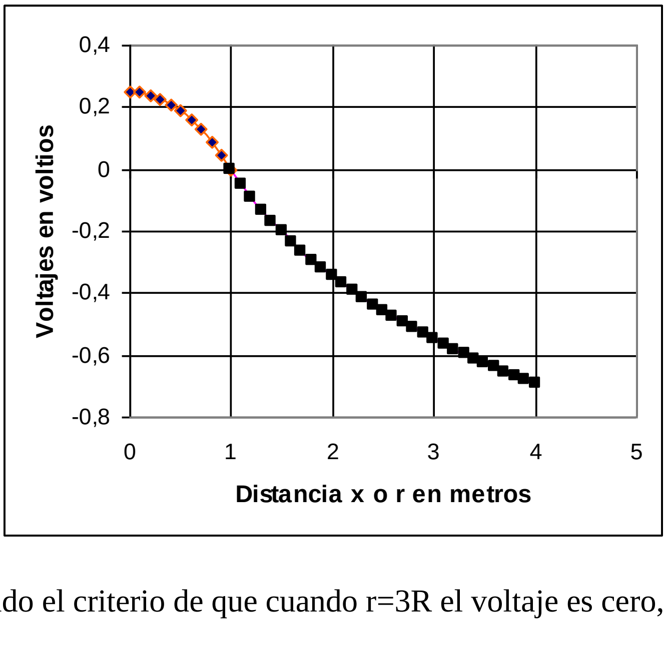
$$\Rightarrow \quad \Delta V_I = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}\left(\frac{-1+4}{36}\right) = \frac{\rho R^2}{48\varepsilon_o} \quad (8)$$

El valor del potencial depende del referencial elegido, por eso las ecuaciones (1) y (3) son diferentes y también lo son las ecuaciones (2) y (4).
Pero la diferencia de potencial entre dos puntos no depende del referencial elegido y así son iguales las ecuaciones (5) y (6) deducidas con distinto referencial y las ecuaciones (7) y (8) también elegidas con diferente referencial.
Esto ocurre porque sería absurdo que al cambiar el referencial variase la diferencia de potencial, ya que ésta mide el trabajo por unidad de carga positiva entre los dos puntos. De no ser así nos encontraríamos que con cambiar de referencial y llevar la carga entre 1os puntos A y B se necesita un trabajo pero entre B y A cambiando de referencial otro trabajo, esto nos permitiría obtener trabajo gratuito y eso es imposible pues violaría el principio de conservación de la energía.

e) Utilizando el criterio de que el voltaje en la superficie del cilindro es nulo, las ecuaciones son:

$$V_I = \frac{\rho}{4\varepsilon_o}\left(R^2 - x^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right) \quad ; \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{R}{r} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{r}$$

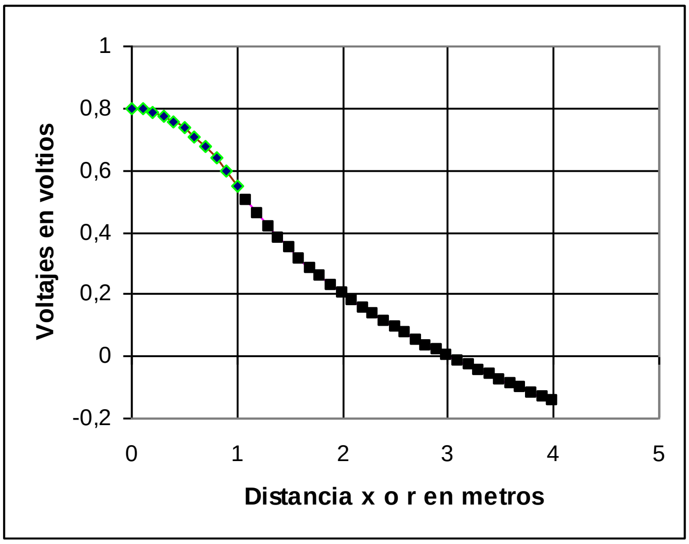
La gráfica de las ecuaciones anteriores es:



Utilizando el criterio de que cuando r=3R el voltaje es cero, las ecuaciones son

$$V_I = -\frac{\rho x^2}{4\varepsilon_o} + \left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\ln 3 + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad V_E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\frac{3R}{r} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{r}$$

La gráfica de las ecuaciones anteriores es:



471.- Una delgada varilla de longitud L se encuentra situada sobre el eje X, un extremo en el origen y el otro en la coordenada +L. La densidad lineal de carga de la varilla es : $\lambda = (+k)\ x$. a) Calcular el potencial eléctrico en los puntos P y Q , siendo sus coordenadas P(-r,0) y Q (0, +r) b) Dibujar las gráficas del potencial (eje Y) frente a distintos valores de r (eje X) siendo $L = 1\ m$ y $k = \frac{1}{9}10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$. c) Calcular la diferencia de potencial ΔV entre los puntos P y Q para distintos valores de r. Construir la gráfica ΔV frente a r. d) Calcular el valor de r correspondiente al máximo de esa diferencia

a) En la figura 1 se detalla la situación de la varilla y los puntos P y Q. También se indica un elemento de la varilla de longitud dx situado a una distancia x del origen

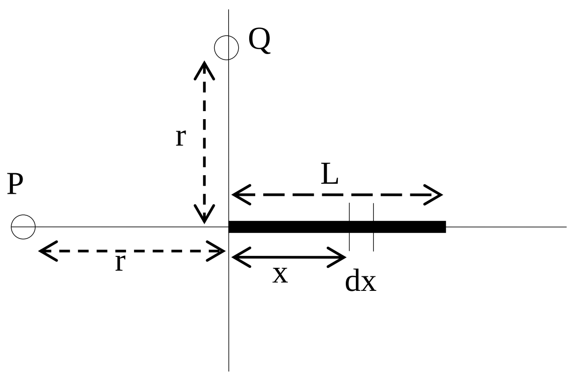


Fig. 1

La carga del elemento dx es: $dq = \lambda\ dx = k\ x\ dx$ y crea un potencial en P

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{dq}{x+r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O}\frac{k\,x\,dx}{x+r}$$

El potencial creado por toda la carga de la varilla es

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^L \frac{k\,x}{x+r}dx$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$x+r=b \;\Rightarrow\; dx = db \;\Rightarrow\; \int_0^L \frac{k\,(b-r)}{b}db = k\int_0^L\left(1-\frac{r}{b}\right)db = k\left[b - r\,\ln b\right]_0^L =$$

$$= \left[k\,(x+r) - k\,r\ln(x+r)\right]_o^L \quad \Rightarrow\; V_P = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[\,(x+r) - r\ln(x+r)\right]_o^L \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; V_P = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[L + r - r\ln(L+r) - (r - r\ln r)\right] \;\Rightarrow\; V_P = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left(L - r\,\ln\frac{L+r}{r}\right)$$

Siguiendo el procedimiento anterior, calculamos el potencial en el punto Q teniendo en cuenta que la distancia entre el elemento dx y el punto Q es; $\sqrt{x^2+r^2}$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^L \frac{k\,x}{\sqrt{x^2+r^2}}dx$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable: $x^2+r^2=v^2$

$$x^2+r^2=v^2 \quad\Rightarrow\; 2\,x\,dx = 2\,v\,dv \quad\Rightarrow\; x\,dx = v\,dv \;\Rightarrow\; V_Q = \frac{k}{4\pi\varepsilon_O}\int_o^L\frac{v\,dv}{v} \quad\Rightarrow$$

$$V_Q = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[v\right]_o^L = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left[\sqrt{x^2+r^2}\right]_o^L \;\Rightarrow\; V_Q = \frac{k}{4\pi\varepsilon_o}\left(\sqrt{L^2+r^2} - r\right)$$

b) Sustituyendo valores en las ecuaciones de los potenciales

$$V_Q = \frac{\frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\,\frac{C}{m^2}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\sqrt{L^2+r^2}-r\right) = \frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\,\frac{C}{m^2}.9.10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\left(\sqrt{L^2+r^2}-r\right) = 1\cdot\frac{N}{C}\left(\sqrt{L^2+r^2}-r\right)$$

Las distancias L y r se expresarán en metros para que V_Q se obtenga en voltios, ya que

$$\text{Voltio} = \frac{\text{Trabajo}}{\text{carga}} = \frac{N\,m}{C}$$

Las ecuaciones que se representan son

$$V_Q = \sqrt{1+r^2} - r \quad \text{y} \quad V_P = 1 - r\,\ln\frac{1+r}{r}$$

Para hacer la representación gráfica damos valores a r en las dos ecuaciones anteriores y hacemos con ellos la representación de la figura 2.

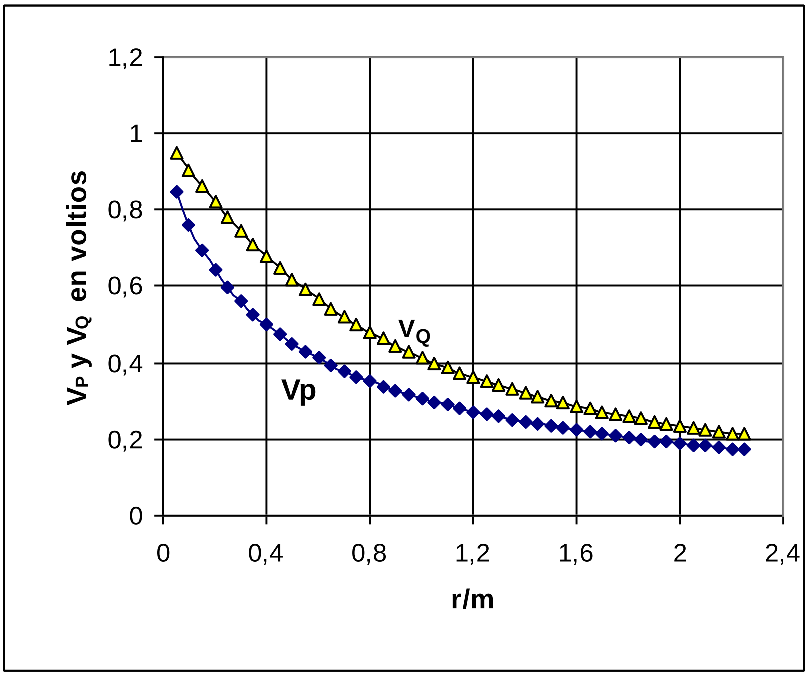


Fig.2

c) La diferencia entre ambos potenciales es

$$\Delta V = \sqrt{1+r^2} - r - \left(1 - r\ln\frac{1+r}{r}\right) = \sqrt{1+r^2} - r - [1 - r\ln(1+r) + r\ln r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta V = \sqrt{1+r^2} - r - 1 + r\ \ln(1+r\ \ ) - r\ln r$$

Dando valores a r se obtiene la gráfica de la figura 3.

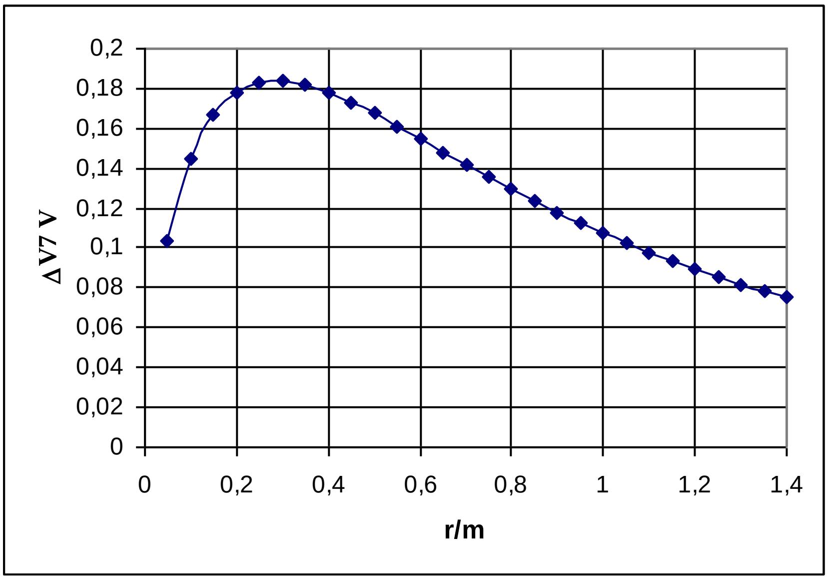


Fig. 3

d) Para calcular el máximo derivamos la función ΔV respecto de r e igualamos a cero.

$$\frac{d(\Delta V)}{dr} = \frac{2r}{2\sqrt{1+r^2}} - 1 + r\cdot\frac{1}{1+r} + \ln(1+r) - \left(r\cdot\frac{1}{r} + \ln r\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{r}{1+r} + \ln(1+r) = 2 + \ln r \Rightarrow r\left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} + \frac{1}{1+r}\right) = 2 + \ln\frac{r}{1+r}$$

La ecuación última la resolvemos por tanteo, teniendo en cuenta dónde se encuentra el máximo en la figura 3, empezamos por el valor r = 0,26

$$0{,}26\left(\frac{1}{\sqrt{1+0{,}26^2}} + \frac{1}{1+0{,}26}\right) = 2 + \ln\frac{0{,}26}{1+0{,}26} \Rightarrow 0{,}4580 > 0{,}4228$$

$$0{,}28\left(\frac{1}{\sqrt{1+0{,}28^2}} + \frac{1}{1+0{,}28}\right) = 2 + \ln\frac{0{,}28}{1+0{,}28} \Rightarrow 0{,}4883 > 0{,}4801$$

$$0{,}286\left(\frac{1}{\sqrt{1+0{,}286^2}} + \frac{1}{1+0{,}286}\right) = 2 + \ln\frac{0{,}286}{1+0{,}286} \Rightarrow 0{,}4973 > 0{,}4967$$

El máximo se encuentra en r = 0,286 m.

472.- Un cuerpo de masa m está inicialmente en reposo sobre un suelo horizontal y sobre él actúa una fuerza F= kt, que forma un ángulo α constante respecto del suelo.

a) Calcular la ecuación v=v(t)

b) Calcular v_f cuando el cuerpo se separa del suelo

c) Calcular la distancia que recorre el cuerpo desde el instante t=0, hasta que se separa del suelo.

a) De la figura 1 se deduce que las componentes de la fuerza F sobre las direcciones horizontal y vertical son:
b)

$$F_x = F\cos\alpha = kt\cos\alpha \quad ; \quad F_y = F\,\mathrm{sen}\alpha = kt\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

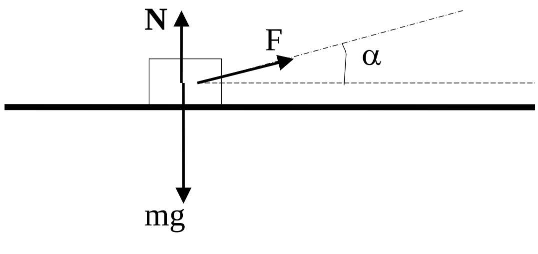


Fig 1

La componente F_x acelera el cuerpo y aplicando la segunda ley de Newton

$$kt\cos\alpha = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \int \frac{kt\cos\alpha}{m}\,dt = \int dv \quad \Rightarrow \qquad v = \frac{k\cos\alpha}{m}\frac{t^2}{2} + Cte$$

Cuando t=0 v =0, luego Cte=0 y $v = \frac{k\cos\alpha}{2m}t^2$

La ecuación anterior es válida desde t=0 a t= τ, siendo τ el tiempo que tarda el cuerpo en separarse del plano.

b) Mientras el cuerpo m esté en contacto con el plano se cumple:

$$F_y + N = mg \quad \Rightarrow k\,t\,\mathrm{sen}\,\alpha + N = mg$$

A medida que transcurre el tiempo el término k t senα de la ecuación anterior aumenta y N disminuye para que se cumpla la igualdad. llegará un tiempo, que denominamos τ, en que N es cero y por lo tanto el cuerpo deja de mantener contacto con el plano

$$k\,\tau\,\mathrm{sen}\,\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{mg}{k\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Llevando este tiempo a la ecuación de la velocidad

$$v_f = \frac{k\cos\alpha}{2m}\,\frac{m^2g^2}{k^2\mathrm{sen}^2\alpha} = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\,\mathrm{sen}^2\alpha}$$

c) A partir de la ecuación de la velocidad

$$\frac{k\cos\alpha}{2m}t^2 = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\tau \frac{k\cos\alpha}{2m}t^2dt = \int_o^{x_f} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{k\cos\alpha}{6m}t^3\Big|_0^\tau = x_f \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_f = \frac{k\cos\alpha}{6\,m}\cdot\left(\frac{mg}{k\,\mathrm{sen}\,\alpha}\right)^3 = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{6\,k^2\;\mathrm{sen}^3\alpha}$$

473.- Un recipiente de volumen 2 L contiene 2 gramos de H_2 y está saturado de vapor de agua y se encuentra a la temperatura T_1 y a la presión de 17.10^5 Pa. Se calienta el contenido del recipiente hasta una temperatura T_2, siendo entonces la presión 26.10^5Pa y quedando saturado de vapor de agua. La presión del vapor de agua en función de la temperatura es:

T/K	273	393	406	425	453
P_V/ Pa	1.10^5	2.10^5	3.10^5	1.10^5	10.10^5

Estimar las temperaturas T_1 y T_2 y los gramos de vapor de agua en el recipiente a esas dos temperaturas.
Admitir que tanto el hidrógeno como el vapor de agua se comportan como gases perfectos. Masas atómicas H=1, O =16

Olimpiadas de Moscú

Aplicamos la ley de los gases perfectos a la mezcla de hidrógeno y vapor de agua a las dos temperaturas, g y g´ son los gramos de agua que saturan el recipiente de dos litros a las dos temperaturas.

$$17.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \left(\frac{2}{2}+\frac{g}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_1 \Rightarrow \quad 3400 = \left(1+\frac{g}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_1 \qquad (1)$$

$$26.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \left(\frac{2}{2}+\frac{g´}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_2 \Rightarrow \quad 5200 = \left(1+\frac{g´}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_2 \qquad (2)$$

Aplicamos la ley de los gases perfectos al vapor de agua

$$p_v(T_1)\cdot 2.10^{-3} = \frac{g}{18}\cdot 8{,}31\cdot T_1 \qquad (3)$$

$$p_v(T_2)\cdot 2.10^{-3} = \frac{g´}{18}\cdot 8{,}31\cdot T_2 \qquad (4)$$

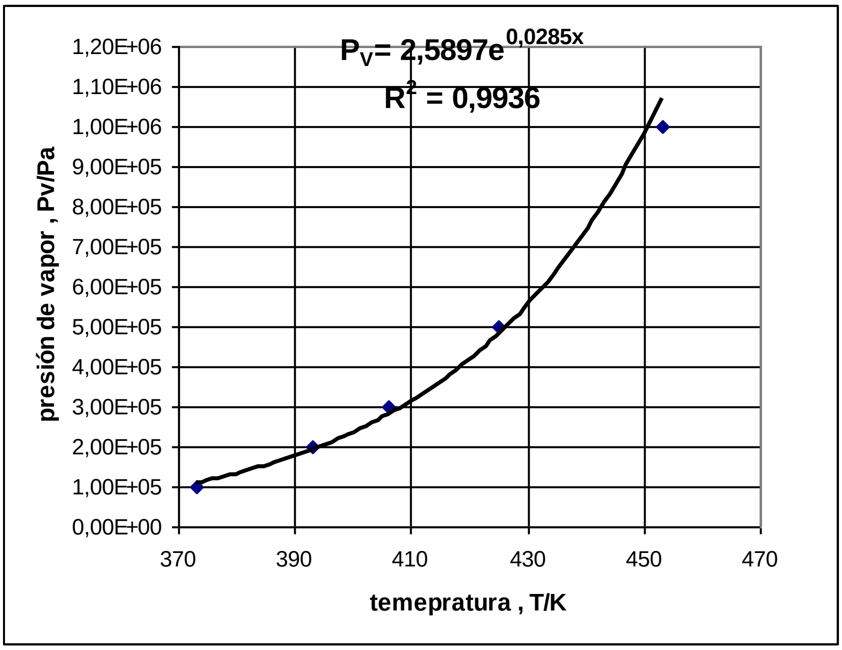
Con las cuatro ecuaciones anteriores no podemos resolverlas porque hay más incógnitas.

La forma de proceder es la siguiente. En la ecuación (3) le damos a T_1 un valor, con ese valor y la tabla de datos proporcionada determinamos la presión de vapor y aplicando la ecuación (3) determinamos g. este valor de g junto con T_1 lo llevamos al segundo miembro de la ecuación (1) y obtenemos un valor que puede o no coincidir con el primer miembro si coincide hemos acertado con el valor de T_1 y g, si no coincide hay que volver a ensayar., El mismo procedimiento se repite con las ecuaciones (4) y (2).

Para orientarnos sobre el valor que pueda tener T_1, hacemos un cálculo suponiendo que todo es hidrógeno y no hay vapor de agua

$$17.10^5 \cdot 2.10^{-3} = 1 \cdot 8{,}31 \cdot T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{17.10^5 \cdot 2.10^{-3}}{8{,}31} = 409\,\mathrm{K}$$

Para T_1 hemos de ensayar con valores inferiores a 409 K y para T_2 con valores superiores.
Este trabajo se puede hacer con una calculadora, pero lo hacemos de forma más rápida con una hoja de cálculo
Representamos la tabla de valores numéricos en una gráfica y ajustamos la curva con una ecuación



Después de realizar varios ensayos hacemos

T_1=379 K, $\quad P_V = 2{,}5897 \cdot e^{0{,}0285 \cdot 379} = 1{,}271.10^5\,\mathrm{Pa}$

$$1{,}271.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \frac{g}{18} 8{,}31 \cdot 379 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{1{,}271.10^5 \cdot 2.10^{-3} \cdot 18}{8{,}31 \cdot 379} = 1{,}45\,\mathrm{g} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3400 \approx \left(1 + \frac{1{,}45}{18}\right) \cdot 8{,}31 \cdot 379 = 3403$$

Si hacemos T_2= 442 K, $\quad P_V = 2{,}5897 \cdot e^{0{,}0285 \cdot 442} = 7{,}657.10^5\,\mathrm{Pa}$

$$7{,}657.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \frac{g'}{18} 8{,}31 \cdot 442 \quad \Rightarrow \quad g' = \frac{7{,}657.10^5 \cdot 2.10^{-3} \cdot 18}{8{,}31 \cdot 442} = 7{,}50\,\mathrm{g} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5200 \approx \left(1 + \frac{7{,}50}{18}\right) \cdot 8{,}31 \cdot 442 = 5203$$

Las soluciones del problema son: T_1 =379 K ; T_2= 442 K, g = 1,45 g , g´= 7,50 g