PROBLEMAS VARIADOS 1-2018

423.-Cuando un positrón choca de frente con un electrón se aniquilan ambos y, como resultado, se obtienen dos fotones dirigidos en sentidos contrarios. Si la energía cinética de cada partícula es de 1 MeV, determinar la longitud de onda de cada uno de los fotones producidos.

Datos: Constante de Planck h= $6,62.10^{-34}$ Js ; masa del electrón m_e=$9,1.10^{-31}$ kg ; velocidad d e la luz c=$3,0.10^{8}$ m/s; carga del electrón q= - $1,6.10^{-19}$ C.

Propuesto en el libro Problemas de Física. J. Ruiz Vázquez. Selecciones Científicas. 1985.

La cantidad de movimiento de los dos fotones es nula, por tanto, las partículas tienen la misma energía.

La energía de un fotón es : $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$.

La energía de cada partícula que se aniquila es la suma de $m_e c^2 + T$, siendo m_e la masa del electrón y también del positrón y T la energía cinética.

El principio de conservación de la energía nos dice

$$2\frac{hc}{\lambda} = 2m_e c^2 + 2T \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{m_e c^2 + T} = \frac{6,62.10^{-34} \cdot 3,0.10^{8}}{9,1.10^{-31} \cdot \left(3,0.10^{8}\right)^2 + 1,6.10^{-13}} = 8,2.10^{-13}\,m$$

424.-La energía cinética de una partícula que se mueve por una circunferencia de radio R depende del camino recorrido según la ley $E_c = \alpha\, s^2$, donde α es una constante. Determinar la fuerza que actúa sobre la partícula en función de s.
b) Si la velocidad de la partícula varía de acuerdo con la ley $v = \dfrac{k}{1+s}$ siendo k =0,5 m^2/s y R = 1 m, cuando t=0, la posición es s_o=0. Determinar en función de la variable tiempo, la posición, la velocidad, la aceleración tangencial y la centrípeta y representarlas gráficamente.

Según el enunciado $\dfrac{1}{2} m v^2 = \alpha s^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2\dfrac{\alpha s^2}{m} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}\, s$

Sobre la partícula actúan dos fuerzas, una la centrípeta dirigida constantemente al centro de la circunferencia y otra la fuerza tangencial en cada punto de la trayectoria .Ambas fuerzas forman entre sí un ángulo de 90º.

La fuerza centrípeta vale $F_C = \dfrac{m v^2}{R} = \dfrac{m\dfrac{2\alpha s^2}{m}}{R} = \dfrac{2\alpha s^2}{R}$

La fuerza tangencial:
:

$$F_T = m a_T = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = m v\frac{dv}{ds} = m v\frac{d}{ds}\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\, s\right) = m v\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} = m\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\, s\cdot\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_T = 2\alpha s$$

El módulo de la fuerza total sobre la partícula

$$F = \sqrt{F_C^2 + F_T^2} = \sqrt{\frac{(2\alpha)^2}{R^2} s^4 + (2\alpha)^2 s^2} = 2\alpha s\sqrt{1+\left(\frac{s}{R}\right)^2}$$

b)

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{k}{1+s} \quad \Rightarrow \quad \int (1+s)\,ds = \int k\,dt \quad \Rightarrow \quad s + \frac{s^2}{2} = k t + Cte$$

Cuando t=0, $s = s_o = 0$, luego la Cte=0

$$s^2 + 2s - 2kt = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8kt}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+2kt}$$

De las dos soluciones solamente es válida con el signo positivo, ya que s adquiere valores positivos al variar t.

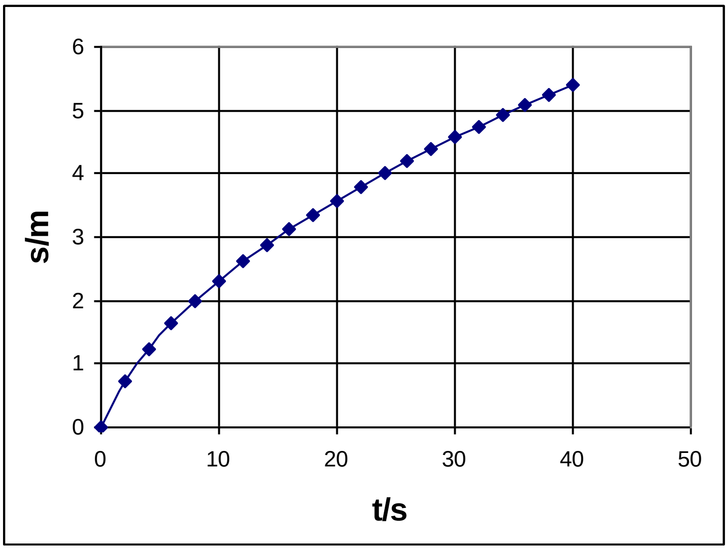
$$s = -1 + \sqrt{1+2kt} = -1 + \sqrt{1+t}$$

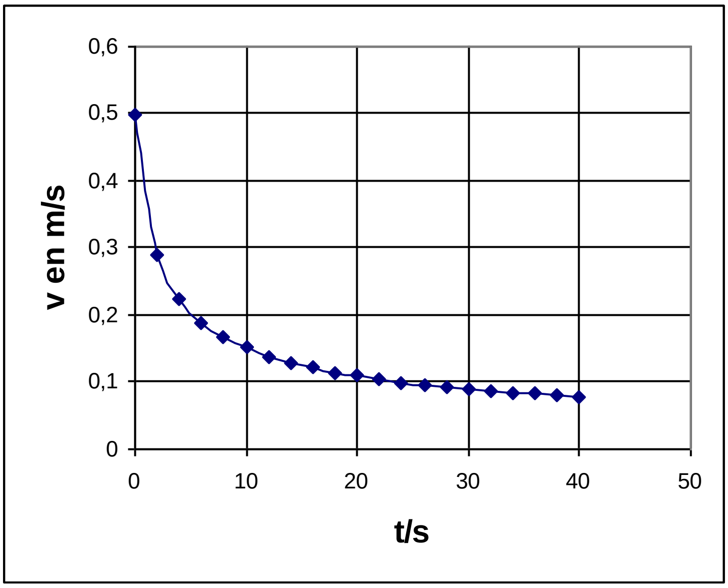
$$v = \frac{k}{1+\left(-1+\sqrt{1+2kt}\right)} = \frac{k}{\sqrt{1+2kt}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+2kt}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{1+t}}$$

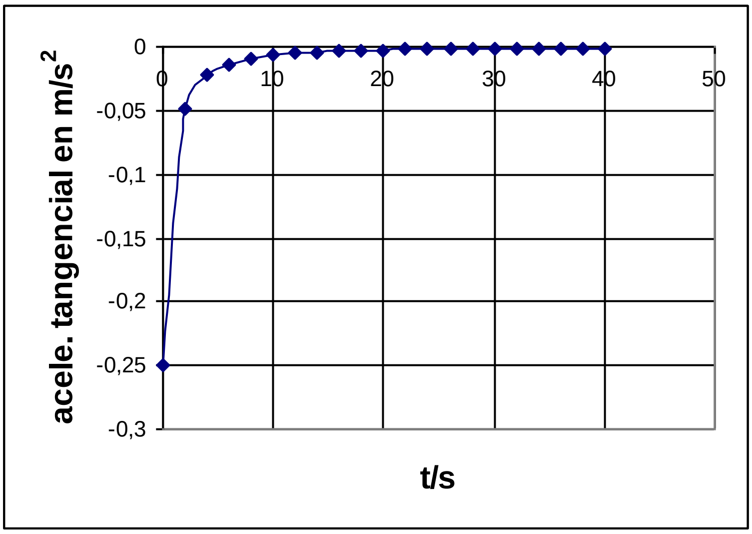
$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\left[\frac{k}{1+s}\right]\cdot v = \frac{-k}{(1+s)^2}\cdot\frac{k}{1+s} = -\frac{k^2}{(1+s)^3} = -\frac{k^2}{\left[1+\left(-1+\sqrt{1+2kt}\right)\right]^3} \Rightarrow$$

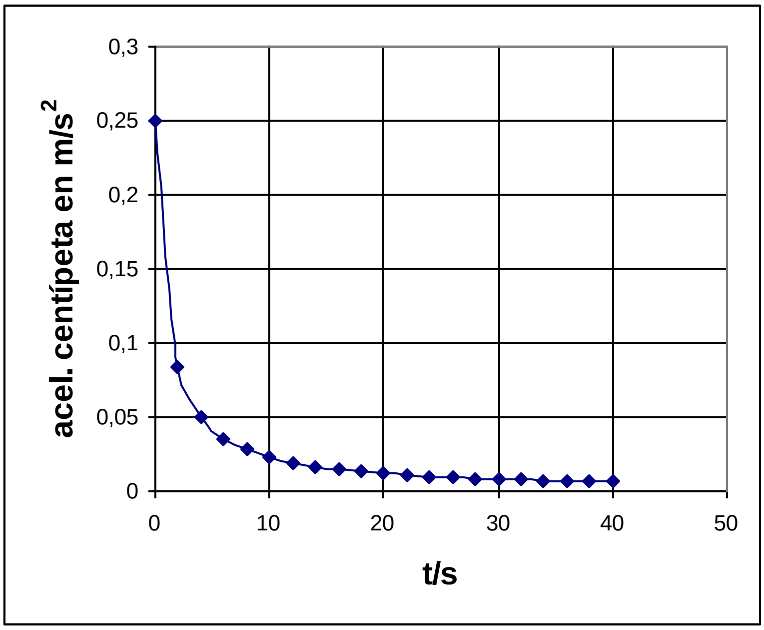
$$\Rightarrow \quad a_T = -\frac{k^2}{(1+2kt)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{0{,}25}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{\frac{0{,}25}{1+2kt}}{R} = \frac{0{,}25}{1+2kt} = \frac{0{,}25}{1+t}$$

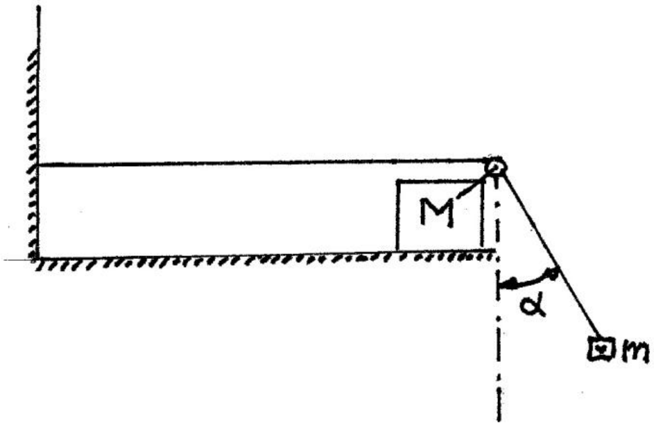





acele. tangencial en m/s^2
0
-0,05
-0,1
-0,15
-0,2
-0,25
-0,3
0
10
20
30
40
50
t/s


acel. centípeta en m/s^2
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
10
20
30
40
50
t/s

425.-En el sistema mecánico de la figura inferior, el cuerpo M puede deslizar horizontalmente sin rozamiento. En el tiempo t=0, el ángulo con la vertical es α y las dos masas tienen velocidades nulas.
a) Se pide la relación entre m y M si al dejar la masa m en libertad el ángulo α permanece constante.
b) la aceleración de la masa M.
La polea carece de masa y la cuerda es inextensible.



a) En la figura 1a se han representado las fuerzas que actúan en el sistema y en la figura 1b las posiciones de esas masas cuando ha transcurrido un cierto tiempo t. La longitud de la cuerda al ser inextensible es constante y designamos esa longitud por L.

Se observa que la masa M se mueve con una aceleración hacia la izquierda que designamos su módulo con A_X; la masa m tiene dos aceleraciones: una en sentido horizontal de módulo a_X y otra en sentido vertical descendente de módulo a_Y.

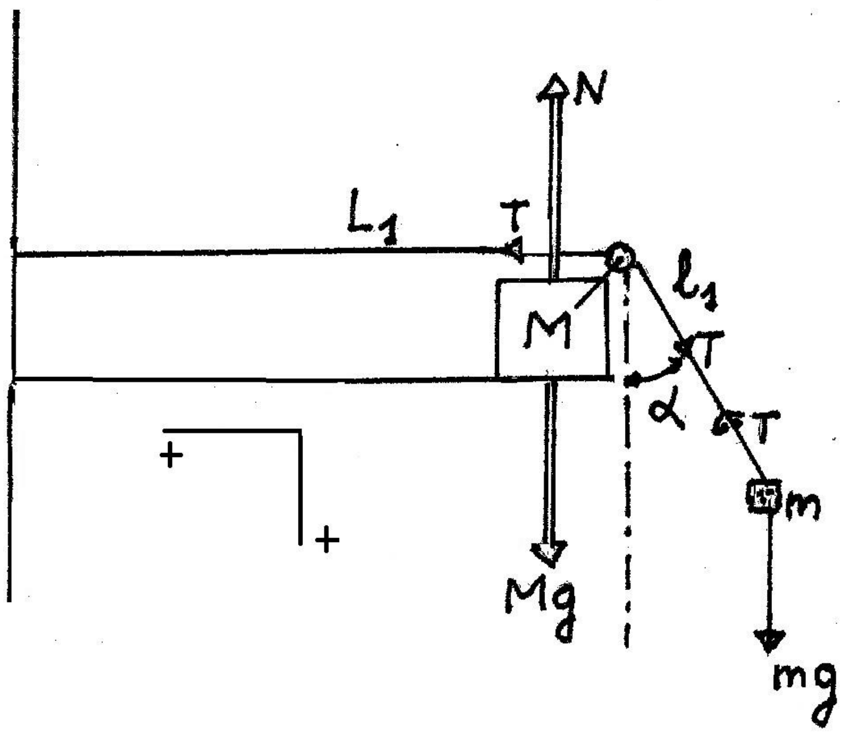


Fig.1a

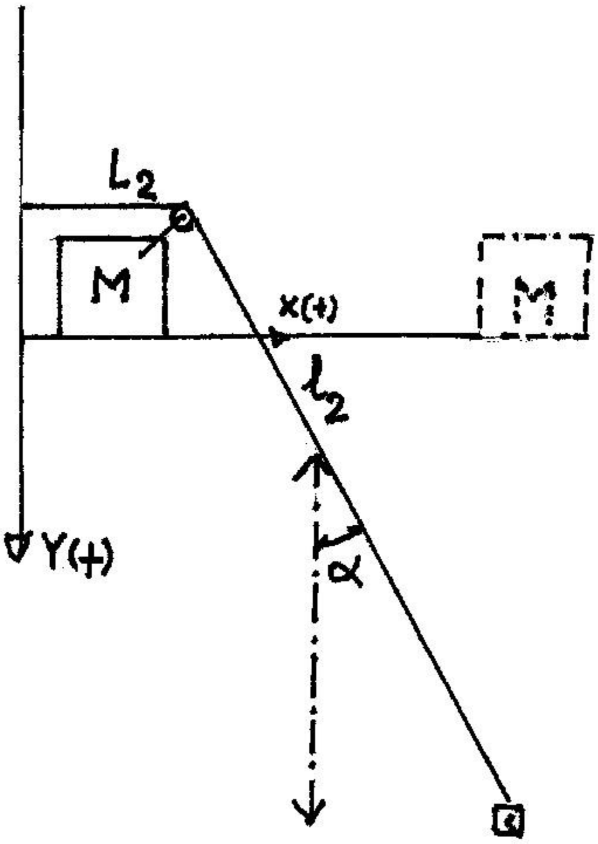


Fig.1b

Al ser la cuerda inextensible, se cumple

$$L_1 + l_1 = L_2 + l_2 \Rightarrow \quad L_1 - L_2 = l_2 - l_1 \quad (1)$$

De la figura 1a se deduce: $\quad T - T\,\mathrm{sen}\,\alpha = M A_X \Rightarrow \quad T(1 - \mathrm{sen}\,\alpha) = M A_X \quad (2)$

El módulo A_X es constante lo que significa que el movimiento de la masa M es uniformemente acelerado y dirigido hacia la izquierda; En el tiempo que transcurre desde t=0 a t=t se ha desplazado L_1-L_2 y por tanto

$$L_1 - L_2 = \frac{1}{2} A_X t^2 \Rightarrow \qquad l_2 - l_1 = \frac{1}{2} A_X t^2 \quad (3)$$

Para la masa m y a partir de la figura 1a deducimos:

$$T\,\mathrm{sen}\,\alpha = m a_x \quad (4)$$

El módulo a_X es constante lo que significa que el movimiento de la masa m es uniformemente acelerado y dirigido hacia la izquierda. En el tiempo que transcurre desde t=0 a t=t se ha desplazado

$$(L_1 + l_1 \mathrm{sen}\,\alpha) - (L_2 + l_2 \mathrm{sen}\,\alpha) = (L_1 - L_2) + \mathrm{sen}\,\alpha (l_1 - l_2) = (l_2 - l_1) - \mathrm{sen}\,\alpha (l_2 - l_1)$$

En el tiempo que media entre t=0 y t=t

$$(l_2 - l_1) - \operatorname{sen}\alpha (l_2 - l_1) = \frac{1}{2} a_X t^2 \Rightarrow \quad (l_2 - l_1)(1 - \operatorname{sen}\alpha) = \frac{1}{2} a_X t^2 \quad (5)$$

Dividiendo las ecuaciones (3) y (5).

$$1 - \operatorname{sen}\alpha = \frac{a_X}{A_X} \quad (6)$$

Dividiendo las ecuaciones (2) y (4).

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha} = \frac{m\, a_X}{M\, A_X} = \frac{m}{M} \cdot (1 - \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow \qquad \frac{m}{M} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{(1 - \operatorname{sen}\alpha)^2}$$

b) Volviendo a la figura 1a, escribimos.

$$mg - T\cos\alpha = m\, a_Y \Rightarrow \qquad T\cos\alpha = m(g - a_Y) \quad (7)$$

$$l_2 \cos\alpha - l_1 \cos\alpha = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad \Rightarrow (l_2 - l_1)\cos\alpha = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (8)$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (7).

$$\frac{T(1 - \operatorname{sen}\alpha)}{T\cos\alpha} = \frac{M\, A_X}{m(g - a_Y)} \quad (9)$$

Dividiendo la ecuación (3) por la (8)

$$\frac{l_2 - l_1}{(l_2 - l_1)\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2} A_X t^2}{\frac{1}{2} a_Y t^2} \Rightarrow \qquad a_Y = A_X \cos\alpha \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9) y la relación $\frac{M}{m} = \frac{(1 - \operatorname{sen}\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha}$, resulta:

$$\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(1 - \operatorname{sen}\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{A_X}{g - A_X \cos\alpha} \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\alpha (g - A_X \cos\alpha) = A_X - A_X \operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g \ \operatorname{tag}\alpha - A_X \cos\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = A_X - A_X \operatorname{sen}\alpha \ \Rightarrow \quad A_x = g \ \operatorname{tag}\alpha$$

426.-Una partícula de masa m recorre un circunferencia de radio R. La componente tangencial de la fuerza que actúa sobre la partícula obedece a la ley F = k t. La partícula en el tiempo t=0 posee una velocidad nula y s_o=0 m.
a) Calcular el tiempo que emplea la partícula en dar una vuelta completa
b) Determinar la fuerza centrípeta que actúa sobre ella cuando se haya desplazado un ángulo de 45º.

a) Aplicamos la segunda ley de Newton

$$F = kt = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int \frac{k}{m}\, t\, dt = \int dv \Rightarrow \frac{k\,t^2}{2m} + Cte = v$$

$$\text{Cuando } t = 0 \rightarrow v = 0 \Rightarrow v = \frac{k\,t^2}{2m} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ds = \int \frac{k\,t^2}{2m} dt \Rightarrow s = \frac{k\,t^3}{6m} + Cte \quad \text{cuando} \quad t = 0 \rightarrow Cte = 0$$

b) Si la partícula da una vuelta completa $s = 2\pi R$

$$2\pi R = \frac{k\,t^3}{6\,m} \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{12\pi m R}{k}}$$

b) El arco al cual corresponde un ángulo de $45º = \frac{\pi}{4}\text{rad}$

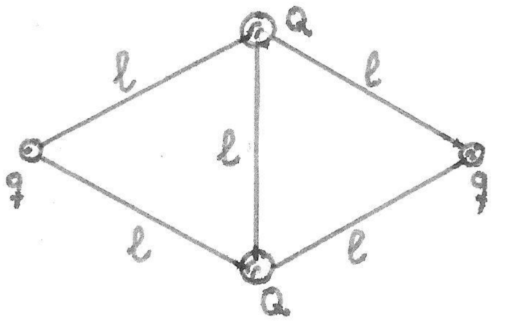
$$s = \frac{\pi}{4}R = \frac{k\,t^3}{2m} \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{\pi m R}{2k}}$$

La fuerza centrípeta vale

$$F_C = \frac{m v^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\frac{k\,t^2}{2m}\right)^2 = \frac{k^2 t^4}{4mR} = \frac{k^2}{4mR}\left(\sqrt[3]{\frac{\pi m R}{2k}}\right)^4 = \frac{k^2}{4mR}\left(\frac{\pi m R}{2k}\right)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_C = \frac{k^2}{4mR}\,\frac{\pi^{\frac{4}{3}} m^{\frac{4}{3}} R^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{4}{3}} k^{\frac{4}{3}}} = \frac{\pi^{\frac{4}{3}} k^{\frac{2}{3}} m^{\frac{1}{3}} R^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{10}{3}}}$$

427.-En la figura cuatro cargas eléctricas están unidas por hilos de la misma longitud l, siendo Q>q.
a) Calcular la tensión del hilo que une las dos cargas Q.
b) ¿Para qué valor de q la tensión del hilo es nula?
c) ¿Para qué valor de q las tensiones de los cinco hilos es la misma?



a) Los hilos están tensos debido a que entre las cargas existen fuerzas eléctricas que tienden a separarlas.

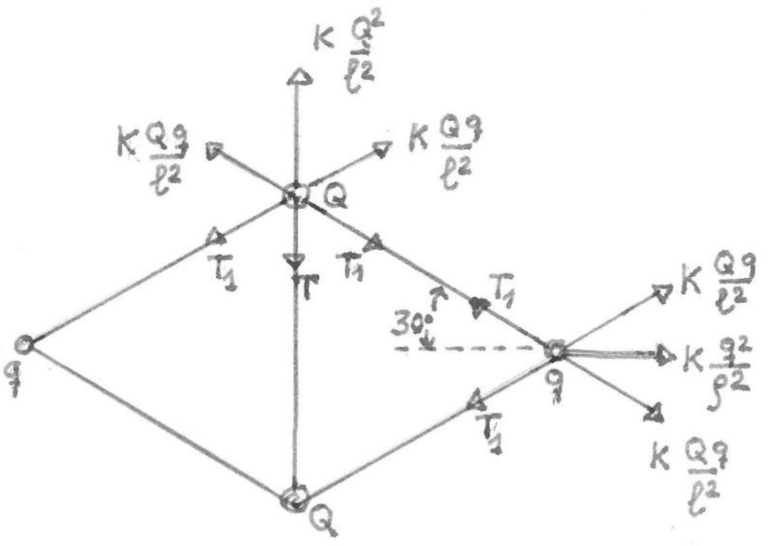


Fig 1

En la figura 1 se observa que sobre la carga Q actúan seis fuerzas, tres de interacciones eléctricas y tres debidas a la tensión de los hilos. Sobre la carga q existen cinco fuerzas, tres son de interacciones eléctricas y dos de tensión de los hilos.

En dicha figura $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}$ y $\rho = 2\ell\cos 30^o$. Las fuerzas sobre las otras cargas son iguales y no se han representado. Las fuerzas no están dibujadas a escala.

La carga Q se encuentra en equilibrio lo que conlleva que la suma de fuerzas en dirección horizontal es nula.

$$T + 2T_1\cos 60^o = K\frac{Q^2}{\ell^2} + 2\frac{Qq}{\ell^2}\cos 60^o \;\Rightarrow\; T = K\frac{Q^2}{\ell^2} + 2\frac{Qq}{\ell^2}\cos 60^o - 2T_1\cos 60^o$$

La carga q está también en equilibrio y la suma de fuerzas en dirección horizontal es nula

$$2T_1\cos 30^o = 2K\frac{Qq}{\ell^2}\cos 30^o + K\frac{q^2}{\rho^2} = 2K\frac{Qq}{\ell^2}\cos 30^o + K\frac{q^2}{(2\,\ell\,\cos 30^o)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T_1 = K\frac{Qq}{\ell^2} + K\frac{q^2}{8\,\ell^2\cos^3 30}$$

Sustituyendo T_1 en T resulta:

$$T = K\frac{Q^2}{\ell^2} + 2\frac{Qq}{\ell^2}\cos 60^o - 2\left(K\frac{Qq}{\ell^2} + K\frac{q^2}{8\,\ell^2\cos^3 30^o}\right)\cos 60^o = K\frac{Q^2}{\ell^2} - K\frac{q^2\cos 60^o}{4\ell^2\cos^3 30^o} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T = K\frac{Q^2}{\ell^2} - K\frac{q^2\,\frac{1}{2}}{4\,\ell^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} \Rightarrow \quad T = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\ell^2}\left(Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}}\right)$$

b) Si la tensión es nula el término del paréntesis de la ecuación anterior es cero

$$Q^2 = \frac{q^2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \quad q = \sqrt{3\sqrt{3}}\,Q = 2{,}28\,Q$$

c) Las tensiones en todos los hilos serán iguales cuando T_1=T

$$K\frac{Qq}{\ell^2} + K\frac{q^2}{8\,\ell^2\cos^3 30} = K\frac{Q^2}{\ell^2} - K\frac{q^2\cos 60^o}{4\ell^2\cos^3 30^o} \Rightarrow Qq + \frac{q^2}{8\cos^3 30} = Q^2 - \frac{q^2\cos 60^o}{4\cos^3 30^o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Qq + 0{,}1925q^2 = Q^2 - 0{,}1925q^2 \Rightarrow \quad 0{,}385q^2 + Qq - Q^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$q = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 + 1{,}54Q^2}}{0{,}77} = \frac{-Q\left(1 \pm \sqrt{2{,}54}\right)}{0{,}77} = \frac{-Q(1 \pm 1{,}59)}{0{,}77}$$

La solución es la positiva: q=0,77Q