PROBLEMAS VARIADOS 1-2017

393.-. Admitimos que la atmósfera está formada por los gases diatómicos oxígeno y nitrógeno en la proporción de 21: 79. Suponemos además que la atmósfera es un gas ideal y que la aceleración de la gravedad g se mantiene constante y finalmente que el proceso en el aire es adiabático.
Según estas suposiciones se puede demostrar que la presión se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$p = p_o\left(\frac{T_o - \Gamma z}{T_o}\right)^{\alpha}$$

En esta ecuación p_o y T_o son la presión y la temperatura a nivel del mar (z=o), Γ se denomina tasa de retraso de la temperatura, esto significa, el cambio en la temperatura T con la altura z sobre la superficie terrestre siendo Γ>0.

Datos : $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1{,}4$ ***,masas atómicas: O = 16 y N = 14***

a) Obtener la relación entre el exponente α y γ; y encontrar la ecuación que relaciona Γ en función de γ, g , R y μ (masa molecular promedio del aire).

b) Determinar la altura que alcanza la atmósfera. Tomar p_o =1 atm y T_o = 300 K

a) Teniendo en cuenta que el proceso es adiabático, y que el aire se comporta como un gas ideal, hallamos la relación entre la presión y la temperatura

$$pV^{\gamma} = \text{Cte} \;;\; pV = RT \Rightarrow \quad V = \frac{R\,T}{p} \Rightarrow \quad p\left(\frac{R\,T}{p}\right)^{\gamma} = \text{Cte} \Rightarrow \quad p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{Cte} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\,T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{Cte}$$

Aplicamos la ecuación anterior al aire entre en la superficie terrestre y a una altura z

$$p_o\,T_o^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p\,T_z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \;\Rightarrow\; \frac{p}{p_o} = \left(\frac{T_o}{T_z}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

En la ecuación del enunciado escribimos $T_z=T_o-\Gamma z$; $\quad p = p_o\left(\frac{T_z}{T_o}\right)^{\alpha}$.

De las dos ecuaciones resulta:

$$\left(\frac{T_o}{T_z}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \left(\frac{T_z}{T_o}\right)^{\alpha} \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{1-\gamma}\ln\frac{T_o}{T_z} = \alpha\ \ln\left(\frac{T_z}{T_o}\right) = -\alpha\ \ln\left(\frac{T_o}{T_z}\right) \quad \Rightarrow \quad -\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{1{,}4}{0{,}4} = 3{,}5$$

La variación de la presión con la altura es. $dp= -\delta\, g\, dz$, el signo menos indica que la presión disminuye a medida que aumenta z.

Dado que el aire se considera como gas perfecto

$$p = \frac{\delta}{\mu} R\, T_z \Rightarrow \delta = \frac{p\,\mu}{R\, T_z} \Rightarrow dp = -\frac{p\,\mu}{R\, T_z} g\, dz \Rightarrow \quad \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\mu\, g}{R\, T_z}\ dz = -\frac{\mu\, g}{R}\int \frac{dz}{T_o - \Gamma z} \quad (1)$$

Para resolver la integral del segundo miembro hacemos el cambio de variable $T_o - \Gamma z = x \ \Rightarrow\ -\Gamma dz = dx$

$$\int \frac{dz}{T_o - \Gamma z} = \int -\frac{dx}{\Gamma x} = -\frac{1}{\Gamma}\ln\ x = -\frac{1}{\Gamma}\ln\left(T_o - \Gamma z\right)$$

Volviendo a la ecuación (1) e integrando

$$\ln p = \frac{\mu\, g}{\Gamma R}\ln\left(T_o - \Gamma z\right) + \mathrm{Cte} \Rightarrow \text{Cuando } z = 0, \ln p = \ln p_o \Rightarrow\ \mathrm{Cte} = \ln p_o - \frac{\mu\, g}{\Gamma R}\ln T_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln p = \frac{\mu\, g}{\Gamma R}\ln\left(T_o - \Gamma z\right) + \ln p_o - \frac{\mu\, g}{\Gamma R}\ln T_o \Rightarrow \ln\frac{p}{p_o} = \frac{\mu\, g}{\Gamma R}\left[\ln\frac{T_o - \Gamma z}{T_o}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p_o\left(\frac{T_o - \Gamma z}{T_o}\right)^{\frac{\mu\, g}{\Gamma R}} \quad (2)$$

Comparando la ecuación (2) con la del enunciado

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{\mu\, g}{\Gamma R} \ \Rightarrow\ \Gamma = \frac{\mu\, g}{R}\frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Para hallar el valor numérico de Γ debemos calcular el valor de μ.

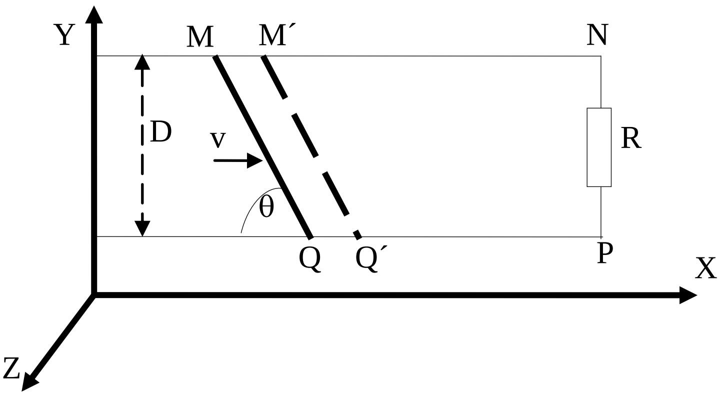
$$\mu = \frac{21 \cdot 32 + 79 \cdot 28}{100} = 28{,}8 \frac{g}{mol} = 28{,}8.10^{-3}\ \frac{kg}{mol} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{28{,}8.10^{-3}\ \frac{kg}{mol} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}}{8{,}31 \frac{J}{mol K}} \cdot \frac{1{,}4 - 1}{1{,}4} = 9{,}7.10^{-3}\ \frac{kg \cdot m \cdot K}{kg \cdot \frac{m^2}{s^2} \cdot s^2} = 9{,}7.10^{-3}\ \frac{K}{m}$$

b) La presión disminuye con la altura, por tanto llegara un momento en que la presión sea cero y hasta ese lugar existe atmósfera

$$0 = 101325 \left(\frac{300 - 9{,}7.10^{-3} h}{300} \right)^{3{,}5} \quad \Rightarrow \frac{300 - 9{,}7.10^{-3} h}{300} = 0 \Rightarrow h = \frac{300}{9{,}7.10^{-3}} = 3{,}09.10^{4}\, m$$

394.-. Una barra conductora MQ, situada en el plano XY, tiene una resistencia eléctrica ρ por unidad de longitud. Dicha barra se desplaza con velocidad uniforme $\vec{v} = v\,\vec{i}$ por un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\,\vec{k}$, apoyándose en dos conductores paralelos lo cuales llevan unas guías para mantener la velocidad, tal como se indica en la figura inferior, separados una distancia D, de resistencia despreciable, los cuales terminan en una resistencia R. La barra mantiene de forma constante un ángulo de inclinación θ. Encontrar la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la barra.



En la figura superior consideramos a la barra en el tiempo t =0 en la posición MQ, al cabo de un intervalo de tiempo Δt se ha desplazado a la posición M´Q´, siendo la distancia MM´= QQ´ = v Δt

En la posición inicial t =0 , el flujo atraviesa el circuito MNPQ, y cuando transcurre Δt el flujo atraviesa el circuito M´NPQ´. En consecuencia hay una variación de flujo magnético que da lugar a la aparición de una fuerza electromotriz, cuyo valor absoluto es:

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{B \cdot S_{MM´´Q´Q}}{\Delta t} \right|$$

El área del paralelogramo MM´Q´Q es la base por la altura

$$S_{MM´Q´Q} = MQ \cdot (MM´ \text{sen}\theta) = \frac{D}{\text{sen}\theta} \cdot v\,\Delta t\ \ \text{sen}\theta = D\,v\,\Delta t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \left|\frac{B\,D\,v\,\Delta t}{\Delta t}\right| = B\,D\,v$$

Esta fuerza electromotriz crea una corriente en el circuito de intensidad I.
Veamos en qué sentido la intensidad I recorre la barra MQ. Recurrimos a la ley de Lenz que establece que el circuito crea una corriente que se opone a la causa externa. Para intentar mantener el flujo inicial la corriente debe ir de M a Q.

Sobre la barra aparece una fuerza cuya expresión vectorial es:

$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B}$$

L =MQ

El vector $\vec{L}$, lo ponemos en función de sus componentes

$$\vec{L} = L\cos\theta\,\vec{i} - L\,\text{sen}\theta\,\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = I\left(L\cos\theta\,\vec{i} - L\,\text{sen}\theta\,\vec{j}\right) \times B\,\vec{k} = -I\,L\,B\cos\theta\,\vec{j} - I\,L\,B\,\text{sen}\theta\,\vec{i}$$

La intensidad de la corriente es:

$$I = \frac{\varepsilon}{\sum R} = \frac{B\,D\,v}{R + \rho\,L} = \frac{B\,D\,v}{R + \dfrac{\rho\,D}{\text{sen}\theta}}$$

Sustituyendo en la fuerza:

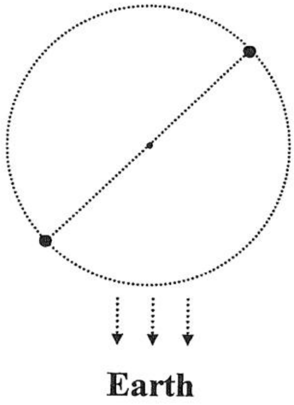
$$\vec{F} = -\frac{B\,D\,v}{R + \dfrac{\rho\,D}{\text{sen}\theta}}\,\frac{D}{\text{sen}\theta}\,B\cos\theta\,\vec{j} - \frac{B\,D\,v}{R + \dfrac{\rho\,D}{\text{sen}\theta}}\,\frac{D}{\text{sen}\theta}\,B\,\text{sen}\theta\,\vec{i} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \vec{F} = -\frac{B^2 D^2 v\cos\theta}{R\,\text{sen}\theta + \rho\,D}\,\vec{j} - \frac{B^2\,D^2\,v}{R + \dfrac{\rho\,D}{\text{sen}\theta}}\,\vec{i} = -\frac{B^2 D^2 v\cos\theta}{R\,\text{sen}\theta + \rho\,D}\,\vec{j} - \frac{B^2\,D^2\,v\,\text{sen}\theta}{R\,\text{sen}\theta + \rho\,D}\,\vec{i}$$

La fuerza anterior aparece sobre la barra al moverse hacia la derecha pero para que ese movimiento ocurra es necesario aplicar a la barra una fuerza exterior del mismo módulo pero de sentido contrario.

395.-Aproximadamente la mitad de las estrellas del firmamento son binarias, esto es, dos estrellas girando alrededor de un punto fijo, movimiento originado por su atracción mutua gravitatoria. Debido a que ambas estrellas se encuentran próximas entre sí al comparar esa distancia con respecto a nosotros en la Tierra, es por lo que aparecen como una sola estrella en el firmamento.

Considerar un sistema binario formado por dos estrellas de la misma masa que el Sol, siendo la distancia entre ellas una unidad astronómica (aproximadamente $1,5.10^{11}$ m). Ambas giran alrededor de un punto fijo describiendo circunferencias.



Propuesto en las Olimpiadas de Hong Kong

a) ¿Dónde se encuentra ese punto fijo?

Ese punto fijo corresponde al centro de masas de ambas estrellas, y como tienen la misma masa se encuentra en el punto medio de la recta que las une.

b) Determinar el periodo de revolución expresándolo en años terrestres.

$G=6,67.10^{-11}$ N m^2kg^{-2} ; $M_{Sol} = 1,989.10^{30}$ kg

La fuerza de atracción gravitatoria que actúa sobre cada estrella es:

$$F = G\frac{M_{Sol}M_{Sol}}{d^2}$$

Esta fuerza de atracción es la fuerza centrípeta necesaria para que la estrella gire alrededor del centro de masas.

$$G\frac{M_{Sol}^2}{d^2} = \frac{M_{Sol}\,v^2}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \frac{G\,M_{Sol}}{d} = 2\left(\frac{2\pi\frac{d}{2}}{T}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2\,\pi^2 d^3}{G\,M_{Sol}}} = \sqrt{\frac{2\,\pi^2\left(1,5.10^{11}\right)^3}{6,67.10^{-11}\cdot 1,989.10^{30}}}$$

$$\Rightarrow T = 2,24.10^7\,s\cdot\frac{1\text{año}}{365\cdot 24\cdot 3600s} = 0,71\text{ año}$$

c) Nuestra Tierra ocupa una posición tal que la línea de visión es paralela al plano de la orbita del sistema binario. Para la longitud de onda λ = 500 nm encontrar el máximo desplazamiento Doppler $\delta\lambda$ y hacer un esquema del desplazamiento Doppler en función del tiempo.

Dato. Velocidad de la luz, $c= 3.10^8$ ms^{-1}

El máximo desplazamiento se producirá cuando las velocidades de las estrellas estén en la misma dirección pero una alejándose de nosotros y otra acercándose. En la figura 1 a) se indica esta situación.

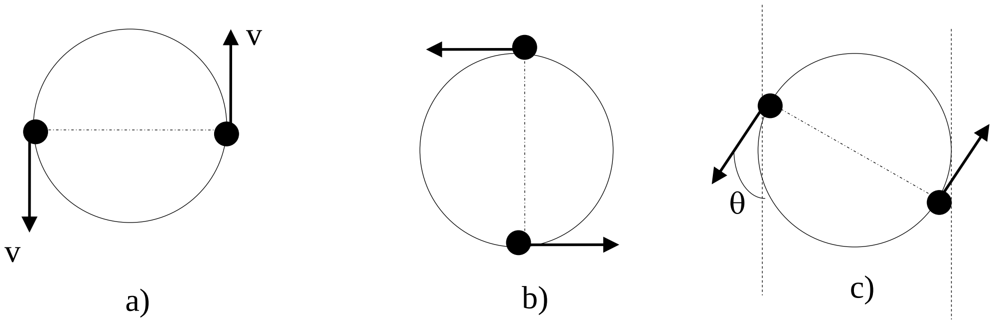


Fig.1

Para la estrella que se acerca hacia nosotros el desplazamiento de la longitud de onda es:

$$\lambda' = \lambda - \frac{v}{\upsilon} = \lambda - \frac{v\lambda}{c}$$

Para la estrella que se aleja de nosotros el desplazamiento de la longitud de onda es<.

$$\lambda'' = \lambda + \frac{v}{c} = \lambda + \frac{v\lambda}{c}$$

El desplazamiento total es:

$$\delta\lambda = \lambda'' - \lambda' = \lambda + \frac{v\lambda}{c} - \lambda + \frac{v\lambda}{c} = 2\frac{v\lambda}{c}$$

La velocidad de la fuente es:

$$v = \frac{2\pi\frac{d}{2}}{T} = \frac{\pi d}{T} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta\lambda = 2\frac{\pi d\lambda}{Tc} = 2\frac{\pi \cdot 1{,}5.10^{11} \cdot 500.10^{-9}}{2{,}24.10^{7} \cdot 3.10^{8}} = 7{,}0.10^{-11}\,\mathrm{m}$$

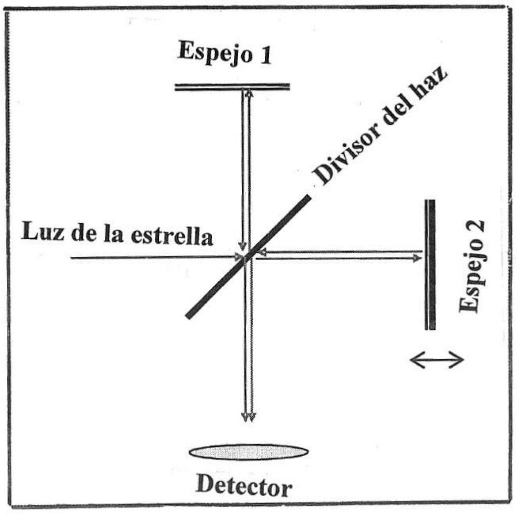
Desde la posición a) a la b) de la figura 1 ha transcurrido un cuarto de T y el desplazamiento ha ido disminuyendo hasta anularse, a partir de ahí aumenta y se hace máximo cuando transcurre otro cuarto de periodo, luego vuelve a repetirse el proceso.
El desplazamiento viene dado por la ecuación

$$\delta\lambda = \frac{2\,v\lambda}{c}\cos\theta = \frac{2\,v\lambda}{c}\cos\frac{2\pi}{T}t$$

d) El interferómetro de Michelson se utiliza para detectar los desplazamientos Doppler cuando las estrellas están más alejadas entre sí. La luz procedente de las estrellas penetra en el instrumento formando un haz estrecho paralelo conteniendo dos ondas de igual intensidad I_o y con longitudes de onda $\lambda-\delta\lambda$ y $\lambda+\delta\lambda$, siendo $\lambda >> \delta$. El divisor del haz refleja la mitad (en intensidad) de las ondas incidentes y deja pasar la otra mitad, sin introducir cambios de fase.

El camino óptico entre el espejo 1 y el divisor de tensión es fijo y de valor L, en cambio la distancia entre el divisor y el espejo 2 es variable L+x, el valor de x puede modificarse. Las ondas reflejadas en los espejos llegan al detector. La intensidad total recibida por el detector se expresa mediante la ecuación

$$I(x) \cong I_o\left[1+f(x)\cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right)\right]$$



Michelson Interferometer

Encontrar la función f(x) y el valor de x_o cuando $f(x_o)=f(0)/2$

Ayuda.- La intensidad total debida a la interferencia de dos ondas de la misma intensidad I_o y la misma longitud de onda es: $I = 2\, I_o\,(1+\cos\Delta)$, donde Δ es la diferencia de fase entre las dos ondas.

En el interferómetro de Michelson la diferencia de fase entre un haz y otro es: $\frac{2\pi}{\lambda}2x$. Al dividirse el haz la intensidad se reparte por igual entre los dos haces. Aplicamos la ecuación .

$$I(x)=\frac{I_o}{2}\left(1+\cos\frac{4\pi x}{\lambda-\delta\lambda}\right)+\frac{I_o}{2}\left(1+\cos\frac{4\pi x}{\lambda+\delta\lambda}\right)=I_o+\frac{I_o}{2}\left[\cos\frac{4\pi x}{\lambda-\delta\lambda}+\cos\frac{4\pi x}{\lambda+\delta\lambda}\right]$$

Aplicamos la relación trigonométrica: $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$I(x)=I_o+\frac{I_o}{2}\left[2\cos\left(\frac{\frac{4\pi x}{\lambda-\delta\lambda}+\frac{4\pi x}{\lambda+\delta\lambda}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{4\pi x}{\lambda-\delta\lambda}-\frac{4\pi x}{\lambda+\delta\lambda}}{2}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(x)=I_o+I_o\left[\cos\frac{4\pi x(\lambda+\delta\lambda)+4\pi x(\lambda-\delta\lambda)}{2(\lambda-\delta\lambda)(\lambda+\delta\lambda)}\cdot\cos\frac{4\pi x(\lambda+\delta\lambda)-4\pi x(\lambda-\delta\lambda)}{2(\lambda-\delta\lambda)(\lambda+\delta\lambda)}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I(x)=I_o+I_o\left[\cos\frac{2\pi x\ 2\lambda}{\lambda^2-(\delta\lambda)^2}\cdot\cos\frac{2\pi x\ 2\delta\lambda}{\lambda^2-(\delta\lambda)^2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I(x)=I_o\left[1+\cos 4\pi x\frac{\lambda}{\lambda^2-(\delta\lambda)^2}\cdot\cos 4\pi x\frac{\delta\lambda}{\lambda^2-(\delta\lambda)^2}\right]$$

Dado que $\lambda>>\delta\lambda$, hacemos $\lambda^2-(\delta\lambda)^2\approx\lambda^2$

$$I(x)=I_o\left[1+\cdot\cos\frac{4\pi x}{\lambda}\cdot\cos\frac{4\pi x(\delta\lambda)}{\lambda^2}\right]=I_o\left[1+f(x)\cos\frac{4\pi x}{\lambda}\right]\Rightarrow\quad f(x)=\cos\frac{4\pi x(\delta\lambda)}{\lambda^2}$$

Si en f(x) sustituimos x=0, resulta f(0)=cos 0= 1

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{4\pi x_o(\delta\lambda)}{\lambda^2}\Rightarrow\frac{4\pi x_o(\delta\lambda)}{\lambda^2}=60^o=\frac{\pi}{3}\text{rad}\Rightarrow x_o=\frac{\lambda^2}{12\,\delta\lambda}=\frac{(500.10^{-9})^2}{12\cdot 7{,}0.10^{-11}}=3.10^{-4}\,\text{m}$$

El efecto Doppler se ignora en el resto del problema.

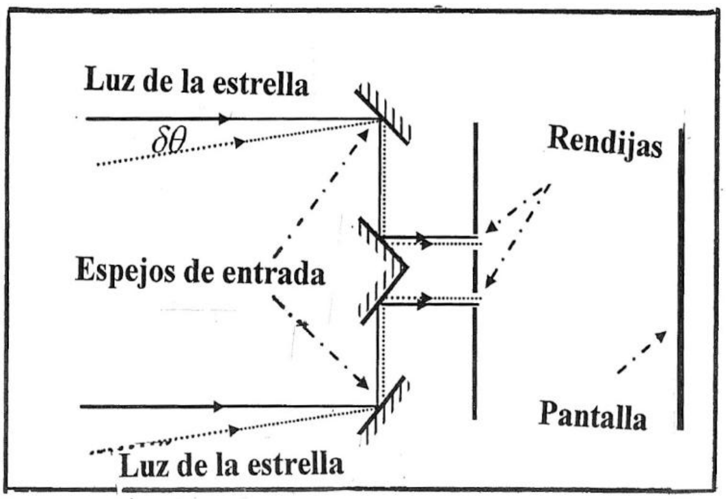
e) El sistema binario se encuentra a 1000 años luz de la Tierra. Encontrar la máxima separación angular $\delta\theta$ entre las dos estrellas.

El ángulo abarcado es el cociente entre el arco que aproximadamente es la distancia vista en horizontal desde la Tierra dividido por la distancia desde la Tierra al sistema binario.

$$\delta\theta=\frac{1{,}5.10^{11}}{1000\cdot 3.10^{8}\cdot 365\cdot 86400}=1{,}6.10^{-8}\text{ rad}$$

f) El Stella Interferometer se utiliza para medir con precisión la separación angular entre las dos estrellas. Como se indica en la figura la luz proveniente de las estrellas se puede considerar como dos haces paralelos anchos de longitud de onda 500 nm. Una onda (onda 1) que viene de una de las estrellas incide normalmente sobre los espejos de entrada, otra onda (onda 2) procedente de la otra estrella incide con un pequeño ángulo sobre la perpendicular. Cada onda se divide a su vez en dos por los dos espejos de la entrada.

La distancia entre los espejos es D. No hay desfase entre los dos haces de luz en los que se divide la onda 1.



Stella Interferometer

Encontrar la diferencia de fase entre las dos ondas reflejadas a partir de la onda 2.

En la figura 2, M_1 y M_2 representan los espejos de entrada que aparecen en el Stella Interferometer .

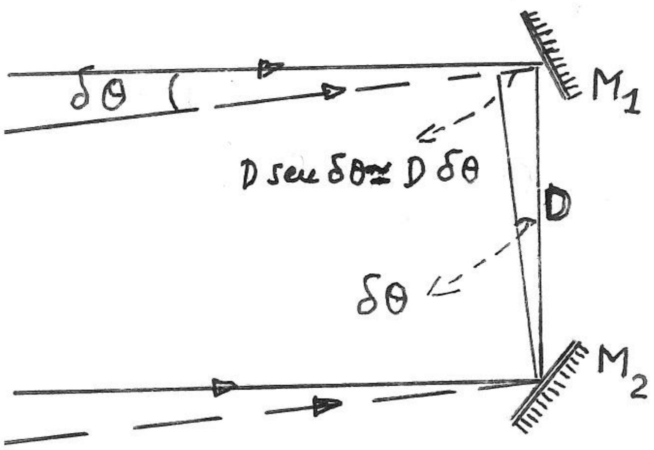


Fig.2

Se observa que existe una diferencia de distancia recorrida

$$\Delta x = D\,\mathrm{sen}(\delta\theta) \approx D \cdot \delta\theta$$

La diferencia de fase es:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot D\,\delta\theta$$

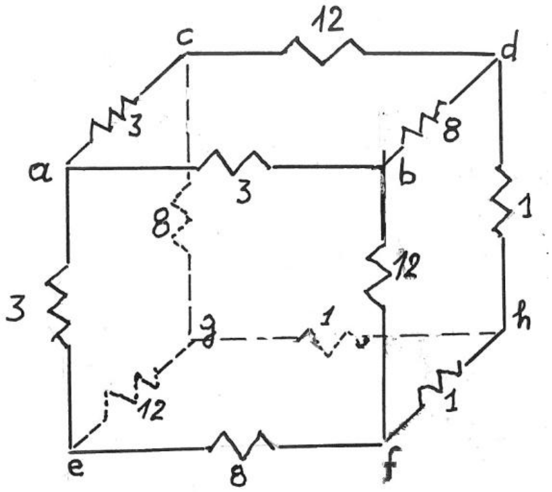
g) Las ondas son conducidas a dos rendijas dispuestas como en el experimento de Young. Considérese que no hay diferencia de recorrido de ambas ondas a través de la entrada superior y de la entrada inferior . Si en la pantalla se superponen las franjas brillantes de interferencia de luz de una estrella se superponen con las de

interferencia oscura de la otra estrella, determinar la distancia mínima entre los espejos de la entrada.
En un experimento real los espejos de entrada se desplazan lentamente hasta que las franjas de la pantalla desaparecen.

Al mover los espejos y hacer desaparecer las franjas de interferencia la diferencia de fase es π radianes.

$$\frac{2\pi}{\lambda} D\ \delta\theta = \pi \Rightarrow D = \frac{\lambda}{2\delta\theta} = \frac{500.10^{-9}}{2\cdot 1{,}6.10^{-8}} = 15{,}6\,\mathrm{m}$$

396.- Un grupo de 12 resistencias están colocadas en cada uno de las aristas de un cubo, tal como se muestra en la figura inferior. Los números que figuran al lado de cada resistencia son sus valores expresados en ohmios. a) Determinar la resistencia equivalente entre los vértices a y h.



b) Las tres resistencias de 12 Ω se reemplazan por tres condensadores iguales, cada uno con capacidad 15,0 μF. Entre los vértices a y h se coloca una pila de 12,0 V. Cuando se alcanza en el circuito el estado estacionario determinar la carga que almacena cada condensador.

Propuesto en las Olimpiadas de USA.

a) Supongamos que unido al vértice a está unido un cable por el que llega una corriente de intensidad I, y hay otro cable unido al vértice h, por el que sale la corriente I de entrada.. En el nudo a la corriente deriva por ac , ab y ae y como en ellos existe la misma resistencia de 3 Ω , las corrientes son iguales y las designamos con i: I = 3i..
En el vértice c llega una corriente i y se bifurca en dos corrientes, una i_{cd} por la resistencia de 12 Ω y otra i_{cg} por la resistencia de 8 Ω.
Se cumple

$$i = i_{cd} + i_{cg}$$

Además las corrientes están en razón inversa de las resistencias, esto es,

$$\frac{i_{cd}}{i_{cg}}=\frac{8}{12}\Rightarrow i_{cd}=\frac{2}{3}i_{cg}\quad\Rightarrow i=\frac{2}{3}i_{cg}+i_{cg}\Rightarrow\quad i_{cg}=\frac{3}{5}i\Rightarrow i_{cd}=\frac{2}{5}i$$

Al vértice b llega una corriente i y se bifurca en i_{bd} (por 8 Ω) e i_{bf} (12 Ω).La situación es igual a la anterior, por tanto, i_{bd}= i_{cg}=3/5 i. Al vértice d llegan dos corriente una i_{cd} y la otra i_{bd} que suman $\frac{2}{5}i+\frac{3}{5}i=i$, que es la intensidad que recorre dh..

Para ir desde el vértice a al h tenemos un camino el acdh, del que conocemos sus intensidades.

$$I R_E=3i R_E=i\cdot 3+i_{cd}\cdot 12+i_{dh}\cdot 1=i\cdot 3+\frac{2}{5}i\cdot 12+i\cdot 1\Rightarrow 3R_E=3+\frac{24}{5}+1\Rightarrow R_E=\frac{44}{15}\Omega$$

b) Durante un cierto tiempo los condensadores se cargan y una vez alcanzado el régimen estacionario por ellos no pasa corriente.. Entre a y h existe una diferencia de potencial de 12 V.

Alcanzado el régimen estacionario, desde el punto de vista de la corriente eléctrica, es como si no existiese cd , ni eg , ni bf. .

La corriente que entra por a se divide en tres tramos que son ac , ab y ae y dado que las resistencias son iguales las tres corrientes tienen la misma intensidad , designada como i.

Para ir de a a h podemos elegir tres caminos acgh, abdh y aebh, en los tres existe la misma resistencia 3+8+1= 12 V y las tres resistencias están en serie, por tanto por todas ellas pasa la intensidad de 1 amperio.

$$V_a-V_c=3V\ ;\ V_a-V_d=11V\Rightarrow\ (-V_a+V_c)+(V_a-V_d)=-3+11=V_c-V_d\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ C=\frac{Q}{V_c-V_d}\ \Rightarrow\qquad Q=15{,}0.10^{-6}\cdot 8=1{,}2.10^{-4}C$$

El modo de operar es el mismo para los otros dos condensadores y dada la simetría tienen todos la misma carga.

397.- Desde el suelo se realiza un tiro oblicuo. Se pretende que alcance un lugar en el que sus coordenadas son (H,D), pero con la condición de que la velocidad de lanzamiento sea la mínima.
a) Determinar el ángulo y la velocidad cuando H = 100 m y D = 80 m.
b) Calcular la altura máxima para el caso anterior y su abscisa

Las ecuaciones paramétricas del movimiento son:

$$x = v\,t\cos\alpha \;\; ; \; y = v\,t\,\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow t = \frac{x}{v\cos\alpha} \Rightarrow y = v\frac{x}{v\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\alpha}\right)^2$$

$$y = x\,\mathrm{tag}\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos^2\alpha}; \text{como } \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tag}^2\alpha \Rightarrow \quad y = x\,\mathrm{tag}\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2\left(1+\mathrm{tag}^2\alpha\right)}{v^2}$$

Aplicando al última ecuación al lugar de coordenadas (H,D) , resulta:

$$H = D\,\mathrm{tag}\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{D^2\left(1+\mathrm{tag}^2\alpha\right)}{v^2} \Rightarrow g\frac{D^2\left(1+\mathrm{tag}^2\alpha\right)}{v^2} = 2D\,\mathrm{tag}\alpha - 2H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{D^2 g\left(1+\mathrm{tag}^2\alpha\right)}{2D\,\mathrm{tag}\alpha - 2H}$$

Nos piden la velocidad mínima y también será un mínimo el cuadrado de la velocidad, por tanto, derivamos el cuadrado de la velocidad respecto de α e igualamos a cero.

$$\frac{dv^2}{d\alpha} = \frac{\left(2D\,\mathrm{tag}\,\alpha - 2H\right)\cdot\left(D^2 g\cdot 2\,\mathrm{tag}\,\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) - \left[D^2 g\cdot(1+\mathrm{tag}^2\alpha)\cdot 2D\frac{1}{\cos^2\alpha}\right]}{\left(2D\,\mathrm{tag}\,\alpha - 2H\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2D\,\mathrm{tag}\,\alpha - 2H\right)\cdot\left(2\,\mathrm{tag}\,\alpha\right) = (1+\mathrm{tag}^2\alpha)\cdot 2D \Rightarrow 4D\,\mathrm{tag}^2\alpha - 4H\,\mathrm{tag}\,\alpha - 2D - 2D\,\mathrm{tag}^2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D\,\mathrm{tag}^2\alpha - 2H\,\mathrm{tag}\,\alpha - D = 0$$

La resolución de la ecuación de segundo grado conduce a:

$$\mathrm{tag}\,\alpha = \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 + 4D^2}}{2D} = \frac{H \pm \sqrt{H^2 + D^2}}{D}$$

De las dos soluciones solamente es válida la que tiene signo positivo, ya que la tangente de alfa es positiva puesto que el ángulo es agudo.

Sustituimos el valor de la tangente en v^2.

$$v^2 = D^2 g \frac{\left[1+\left(\frac{H+\sqrt{H^2+D^2}}{D}\right)^2\right]}{2D\frac{H+\sqrt{H^2+D^2}}{D}-2H} = D^2 g \frac{\left(1+\frac{H^2+H^2+D^2+2H\sqrt{H^2+D^2}}{D^2}\right)}{2\sqrt{H^2+D^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = D^2 g \frac{2\left(H^2+D^2\right)+2H\sqrt{H^2+D^2}}{2D^2\sqrt{H^2+D^2}} = g\left[\sqrt{H^2+D^2}+H\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{g\left(\sqrt{H^2+D^2}+H\right)}$$

Aplicando las ecuaciones a H = 100 m y D = 80 m

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{100+\sqrt{100^2+80^2}}{80} = 2,85 \Rightarrow \alpha = 70,67^{o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{9,8\left(\sqrt{100^2+80^2}+100\right)} = 47,3\frac{m}{s}$$

b) La altura máxima se produce cuando la componente de la velocidad vertical se anula

$$y = v\,t\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v = \frac{dy}{dt} = v\,\mathrm{sen}\,\alpha - g\,t_m = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g} \Rightarrow$$

$$h_m = v\frac{v\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g}\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}g\left(\frac{v\,\mathrm{sen}\,\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v^2\mathrm{sen}^2\alpha}{2g} = \frac{47,3^2\cdot \mathrm{sen}^2 70,67}{2\cdot 9,8} = 101,6\mathrm{m}$$

$$x_m = 47,3\cdot\frac{47,3\cdot \mathrm{sen}\,70,67}{9,8}\cos 70,67 = 71,3\mathrm{m}$$